Datové struktury a algoritmy

Část 11

Vyhledávání, zejména rozptylování

Petr Felkel

28.1.2007

Topics

Vyhlednávání

Rozptylování (hashing)
- Rozptylovací funkce
- Řešení kolizí
  - Zřetězené rozptylování
  - Otevřené rozptylování
    - Linear Probing
    - Double hashing

Slovník - Dictionary

Řada aplikací potřebuje
- dynamickou množinu
- s operacemi: Search, Insert, Delete
- = slovník

Př. Tabulka symbolů překladače

identifikátor	typ	adresa
suma	int	0xFFFFDC09
...	...	...

Vyhledávání

asociativní
- Porovnáváním klíčů — **Ω(log n)**
  - Nalezeno, když klíč_prvku = hledaný klíč
  - např. sekvenční vyhledávání, BVS,...

adresní vyhledávání
- Indexováním klíčem (přímý přístup) — **Θ(1)**
  - klíč je přímo indexem (adresou)
  - rozsah klíčů ~ rozsahu indexů
- Rozptylováním — **průměrně Θ(1)**
  - výpočtem adresy z hodnoty klíče

Rozptylování - Hashing

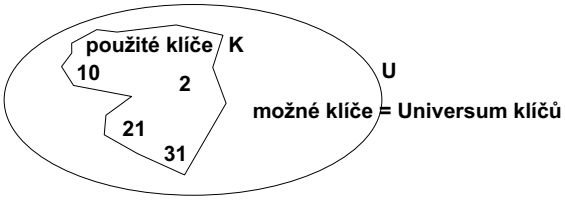
= kompromis mezi rychlostí a spotřebou paměti
- ∞ času - sekvenční vyhledávání
- ∞ paměti - přímý přístup (indexování klíčem)
- málo času i paměti
  - hashing
  - velikost tabulky reguluje čas vyhledání

Rozptylování - Hashing

Konstantní očekávaný čas pro *vyhledání* a *vkládání* (*search* and *insert)* !!!

Něco za něco:
- čas provádění ~ délce klíče
- není vhodné pro operace *výběru podmnožiny* a *řazení* (*select* a *sort)*

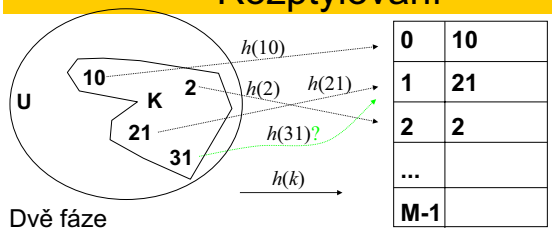
Rozptylování



Rozptylování vhodné pro |K| << |U|

K množina použitých klíčů
U universum klíčů

Rozptylování



Dvě fáze

1. Výpočet rozptylovací funkce $h(k)$
   ($h(k)$ vypočítá adresu z hodnoty klíče)
2. Vyřešení kolizí
   $h(31)$ ..... kolize: index 1 již obsazen

1. Výpočet rozptylovací funkce $h(k)$

Rozptylovací funkce $h(k)$

Zobrazuje
množinu klíčů $K \in U$
do intervalu adres $A = <a_{min}, a_{max}>$, *obvykle* $<0,M-1>$
$|U| >> |K| \cong |A|$
($h(k)$ Vypočítá adresu z hodnoty klíče)

Synonyma: $k_1 \neq k_2$, $h(k_1) = h(k_2)$
= kolize

Rozptylovací funkce $h(k)$

Je silně závislá na vlastnostech klíčů a jejich reprezentaci v paměti

Ideálně:
- výpočetně co nejjednodušší (rychlá)
- aproximuje náhodnou funkci
- využije rovnoměrně adresní prostor
- generuje minimum kolizí
- proto: využívá všechny složky klíče

Rozptylovací funkce $h(k)$

Každá hashovací funkce má slabá místa, kdy pro různé klíče dává stejnou adresu

Univerzální hashování

- Místo jedné hashovací funkce $h(k)$ máme konečnou množinu ***H*** funkcí mapujících U do intrervalu $\{0, 1, \ldots, m\text{-}1\}$
- Při spuštění programu jednu náhodně zvolíme
- Tato množina je univerzální, pokud pro různé klíče $x,y \in U$ vrací stejnou adresu $h(x) = h(y)$ přesně v $|\boldsymbol{H}|/m$ případech
- Pravděpodobnost kolize při náhodném výběru funkce $h(k)$ je tedy přesně $1/m$

Rozptylovací funkce *h*(*k*) - příklady

Příklady fce *h*(*k*) pro různé typy klíčů
- reálná čísla
- celá čísla
- bitová
- řetězce

Chybná rozptylovací funkce

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady

Pro reálná čísla 0..1
- multiplikativní: **h(k,M) = round(k * M)**
  (neoddělí shluky blízkých čísel)
  M = velikost tabulky (table size)

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady

Pro celá čísla (w-bitová) - *for w-bit integers*
- multiplikativní: (kde M je prvočíslo)
  - **h(k,M) = round(k /2^w * M)**
- modulární:
  - **h(k,M) = k % M**
- kombinovaná:
  - **h(k,M) = round(c * k) % M, c ∈<0,1>**
  - **h(k,M) = (int)(0.616161 * (float) k) % M**
  - **h(k,M) = (16161 * (unsigned) k) % M**

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady
Hash functions *h*(*k*) - examples

Rychlá, silně závislá na reprezentaci klíčů

h(k) = k & (M-1) **pro M = 2^x (není prvočíslo),**
a & = bitový součin

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady

Pro řetězce *(for strings):*

```
int hash( char *k, int M )
{
   int h = 0, a = 127;
   for( ; *k != 0; k++ )
       h = ( a * h + *k ) % M;
   return h;
}
```

Hornerovo schéma: $k_2 * a^2 + k_1 * a^1 + k_0 * a^0 =$
$((k_2 * a) + k_1) * a + k_0$

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady

Pro řetězce: (pseudo-) randomizovaná

```
int hash( char *k, int M )
{  int h = 0, a = 31415; b = 27183;
   for( ; *k != 0; k++, a = a*b % (M-1) )
       h = ( a * h + *k ) % M;
   return h;
}
```

Univerzální rozptylovací fce
- kolize s pravděpodobností 1/M
- odlišná náhodná konstanta pro různé pozice v řetězci

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-chyba

Častá chyba: funkce *vrací stále stejnou hodnotu*

– chyba v konverzi typů

– funguje, ale vrací blízké adresy

– proto generuje hodně kolizí

=> *aplikace je extrémně pomalá*

Shrnutí

Rozptylovací funkce h(k)

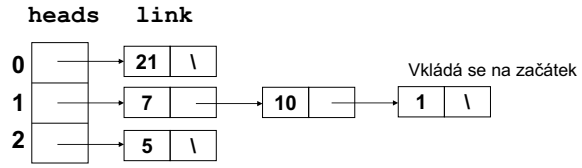
- počítá adresu z hodnoty klíče

2. Vyřešení kolizí

a) Zřetězené rozptylování 1/5 Chaining

h(*k*) = *k* mod 3

posloupnost : 1, 5, 21, 10, 7



seznamy synonym

a) Zřetězené rozptylování 2/5

```
private:
  link* heads; int N,M;   [Sedgewick]

public:
  init( int maxN )        // initialization
  {
    N=0;                  // No.nodes
    M = maxN / 5;         // table size
    heads = new link[M]; // table with pointers
    for( int i = 0; i < M; i++ )
       heads[i] = null;
  }
  ...
```


a) Zřetězené rozptylování 3/5

```
Item search( Key k )
{
  return searchList( heads[hash(k, M)], k );
}

void insert( Item item )          // Vkládá se na začátek
{
  int i = hash( item.key(), M );
  heads[i] = new node( item, heads[i] );
  N++;
}
```

a) Zřetězené rozptylování 4/5

Řetěz synonym má ideálně délku $\alpha = n/m$, $\alpha > 1$ (plnění tabulky)
(n = počet prvků, m = velikost tabulky, m<n)

velmi nepravděpodobný extrém

Insert	**$I(n) = t_{hash} + t_{link} = O(1)$**	
Search	**$Q(n) = t_{hash} + t_{search}$**	**průměrně**
	$= t_{hash} + t_c * n/(2m) = O(n)$	**$O(1 + \alpha)$**
Delete	**$D(n) = t_{hash} + t_{search} + t_{link} = O(n)$**	**$O(1 + \alpha)$**

pro malá α (velká m) se hodně blíží O(1) !!!
pro velká α (malá m) m-násobné zrychlení x seq. s.

a) Zřetězené rozptylování 5/5

Praxe: volit $m = n/5$ až $n/10$ => plnění $\alpha = 10$ prvků / řetěz

- vyplatí se hledání sekvenčně
- neplýtvá nepoužitými ukazateli

Shrnutí:
+ nemusíme znát n předem
– potřebuje dynamické přidělování paměti
– potřebuje paměť na ukazatele a na tabulku[m]

b) Otevřené rozptylování (open-address hashing)

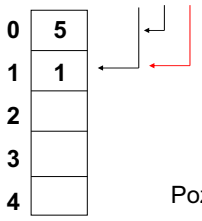
Znám předem počet prvků (odhad)
nechci ukazatele (v prvcích ani tabulku)
=> posloupnost do pole

Podle tvaru hashovací funkce $h(k)$ při kolizi
1. lineární prohledávání (linear probing)
2. dvojí rozptylování (double hashing)

0	5
1	1
2	21
3	10
4	

b) Otevřené rozptylování

$h(k) = k \bmod 5$ ($h(k) = k \bmod m$, m je rozměr pole)
posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



Problém:
kolize - 1 blokuje místo pro 21
1. linear probing
2. double hashing

Pozn.: 1 a 21 jsou synonyma
často ale blokuje nesynonymum.
Kolize je blokování libovolným klíčem

Test - Probe

= určení, zda pozice v tabulce obsahuje klíč shodný s hledaným klíčem

- search hit = klíč nalezen
- search miss = pozice prázdná, klíč nenalezen
- Jinak = na pozici je jiný klíč, hledej dál

b) Otevřené rozptylování
(open-addressing hashing)

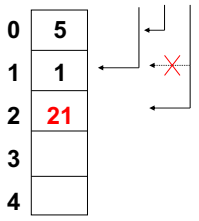
Metoda řešení kolizí
(solution of collisions)

b1) Linear probing
Lineární prohledávání
b2) Double hashing
Dvojí rozptylování

b1) Linear probing

$h(k) = [(k \bmod 5) + i] \bmod 5 = (k + i) \bmod 5$

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



kolize - 1 blokuje

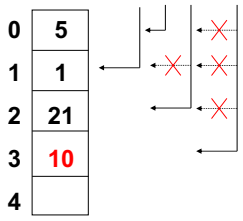
=> 1. linear probing

vlož o 1 pozici dál (i++ => i = 1)

b1) Linear probing

$h(k) = (k + i) \bmod 5$

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



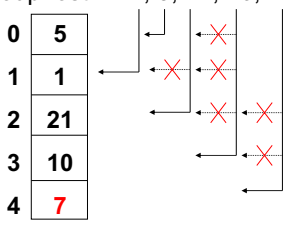
1. kolize - 5 blokuje - vlož dál
2. kolize - 1 blokuje - vlož dál
3. kolize - 21 blokuje - vlož dál

vloženo o 3 pozice dál (i = 3)

b1) Linear probing

$h(k) = (k + i) \bmod 5$

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



1. kolize - vlož dál (i++)
2. kolize - vlož dál (i++)

vlož o 2 pozice dál (i = 2)

b1) Linear probing

$h(k) = (k + i) \bmod 5$

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7

i = 0

i = 0

i = 1

i = 3

i = 2

b1) Linear probing

```
private:
  Item *st; int N,M;   [Sedgewick]
  Item nullItem;
public:
  init( int maxN )       // initialization
  {
    N=0;                 // Number of stored items
    M = 2*maxN;          // load_factor < 1/2
    st = new Item[M];
    for( int i = 0; i < M; i++ )
       st[i] = nullItem;
  }...
```


b1) Linear probing

```
void insert( Item item )
{
  int i = hash( item.key(), M );

  while( !st[i].null() )
      i = (i+1) % M; // Linear probing

  st[i] = item;
  N++;
}
```

b1) Linear probing

```
Item search( Key k )
{
  int i = hash( k, M );

  while( !st[i].null() ) { // !cluster end
                           // zarážka (sentinel)
     if( k == st[i].key() )
          return st[i];
     else
          i = (i+1) % M; // Linear probing
    }
     return nullItem;
}
```


b) Otevřené rozptylování
(open-addressing hashing)

Metoda řešení kolizí
(solution of collisions)

b1) Linear probing
Lineární prohledávání
b2) Double hashing
Dvojí rozptylování

b2) Double hashing

Hash function $h(k) = [h_1(k) + i.h_2(k)] \bmod m$

$h_1(k) = k \bmod m$ // initial position
$h_2(k) = 1 + (k \bmod m')$ // offset

} Both depend on k => Each key has different probe sequence

m = prime number or m = power of 2
m' = slightly less m' = odd
If d = greatest common divisor => search 1/d slots only

Ex: k = 123456, m = 701, m' = 700
$h_1(k)$ = 80, $h_2(k)$ = 257 Starts at 80, and every 257 % 701

b2) Double hashing

$h(k) = k \bmod 5$
posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7

0	5
1	1
2	
3	
4	

kolize - 1 blokuje (collision-blocks)

=> 2. double hashing

b2) Double hashing

$h(k) = [(k \bmod 5) + i.h_2(k)] \bmod 5$, Nebo zjednodušeně (or simplified) $h(k) = (k + i.3) \bmod 5$
posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7
stačí prvočíslo ≠ m

0	5
1	1
2	
3	
4	21

kolize - 1 blokuje
(collision blocks)
=> 2. double hashing
vlož o 3 pozice dál (i++ => i = 1)
(i je číslo pokusu)

b2) Double hashing

$h(k) = (k + i.3) \bmod 5$ (Př. velmi zjednodušené $h(k)$)
posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7

0	5
1	1
2	
3	10
4	21

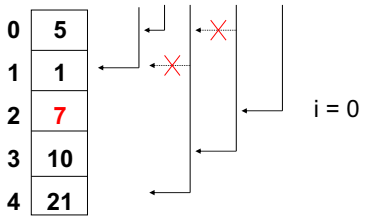
kolize - 5 blokuje - vlož dál

(vlož o 3 pozice dál (i = 1)

b2) Double hashing

$h(k)$ = (k + i.3) mod 5 (Př. velmi zjednodušené $h(k)$)

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



b2) Double hashing

$h(k)$ = (k + i.3) mod 5 (Př. velmi zjednodušené $h(k)$)

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7

0	5	i = 0
1	1	i = 0
2	7	i = 0
3	10	i = 1
4	21	i = 1

Linear probing x Double hashing

$h(k)$ = (k + i) mod 5

0	5	i = 0
1	1	i = 0
2	21	i = 1
3	10	i = 3 !
4	7	i = 2

dlouhé shluky
(long clusters)

$h(k)$ = (k + i.3) mod 5

0	5	i = 0
1	1	i = 0
2	7	i = 0
3	10	i = 1
4	21	i = 1

vnořené sekvence
(mixed probe sequences)

b2) Double hashing

```
void insert( Item item )
{
  Key k = item.key();
  int i = hash( k, M ),
      j = hashTwo( k, M );// different for k1 != k2

  while( !st[i].null() )
     i = (i+j) % M; //Double Hashing

  st[i] = item; N++;
}
```


b2) Double hashing

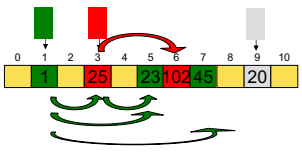
```
Item search( Key k )
{
  int i = hash( k, M ),
      j = hashTwo( k, M );// different for k1 != k2

  while( !st[i].null() )
  {
     if( k == st[i].key() )
          return st[i];
     else
          i = (i+j) % M; // Double Hashing
   }
   return nullItem;
}
```


Double hashing - example

b2) Double hashing $h(k) = [h_1(k) + i.h_2(k)\ ] \bmod m$

Input	$h_1(k)$= k %11	$h_2(k)$= 1+k %10	i	$h(k)$
1	1	2	0	1
25	3	6	0	3
23	1	4	0,1	1,5
45	1	6	0,1	1,7
102	3	3	0,1	3,6
20	9	1	0	9



$h_1(k) = k$ % 11

$h_2(k) = 1 + (k$ % 10)

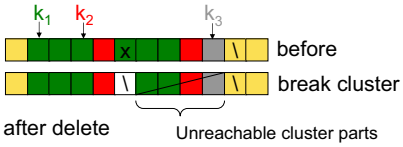
Item removal (delete)

Item ‘x’ removal

x replaced by null

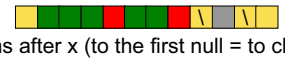
null breaks cluster(s) !!!

=> do not leave the hole after delete



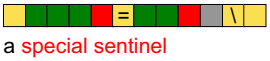
Correction different for linear probing and double hashing

b1) in linear probing



=> reinsert the items after x (to the first null = to cluster end)

b2) in double hashing

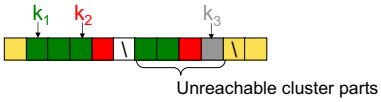


=> fill the hole up by a special sentinel

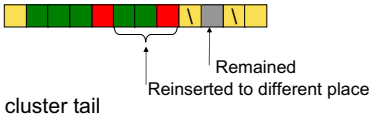
skipped by search, replaced by insert

Item removal (delete)

b1) in linear probing

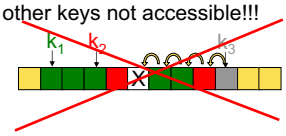


=> reinsert the items behined the cluster break (to the null)



=> avoid simple move of cluster tail

it can make other keys not accessible!!!

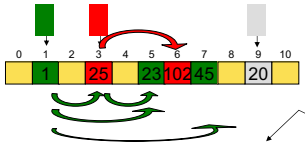


Linear-probing Item Removal

```
// do not leave the hole - can break a cluster
void remove( Item item )
{ Key k = item.key();
  int i = hash( k, M ), j;
  while( !st[i].null() )// find item to remove
      if( item.key() == st[i].key() ) break;
      else i = (i+1) % M;
  if( st[i].null() ) return; // not found
  st[i] = nullItem; N--;      //delete,reinsert
  for(j = i+1; !st[j].null(); j=(j+1)%M, N--)
  {  Item v = st[j]; st[j] = nullItem;
     insert(v);  //reinsert elements after deleted
  }
}
```


Item removal (delete)

b2) Double hashing $h(k) = [h_1(k) + i.h_2(k)\ ] \bmod m$

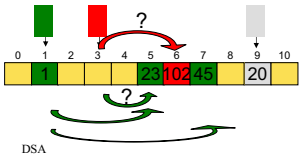


$h_1(k) = k \% 11$

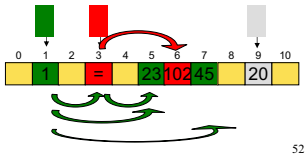
$h_2(k) = 1 + (k \% 10)$

Remove 25

null – breaks paths to 23 and 102



Sentinel is correct



Double-hashing Item Removal

```
// Double Hashing - overlapping search sequences
//      - fill up the hole by sentinel
//  - skipped by search, replaced by insert
void remove( Item item )
{ Key k = item.key();
  int i = hash( k, M ), j = hashTwo( k, M );
  while( !st[i].null() ) // find item to remove
     if( item.key() == st[i].key() ) break;
     else i = (i+j) % M;
  if( st[i].null() ) return; // not found
  st[i] = sentinelItem; N--; // "delete" = replace
}
```


b) Otevřené rozptylování (open-addressing hashing)

α = plnění tabulky (*load factor of the table*)

α = n/m, α ∈⟨0,1⟩

***n* = počet prvků (*number of items in the table*)**

***m* = velikost tabulky, m>n (*table size*)**

b) Otevřené rozptylování (open-addressing hashing)

Average number of probes [Sedgewick]

Linear probing:

Search hits	$0.5 (1 + 1 / (1 - \alpha))$	**found**
Search misses	$0.5 (1 + 1 / (1 - \alpha)^2)$	**not found**

Double hashing:

Search hits	$(1 / \alpha) \ln (1 / (1 - \alpha)) + (1 / \alpha)$
Search misses	$1 / (1 - \alpha)$

$\alpha = n/m$, $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$

b) Očekávaný počet testů

Linear probing:

Plnění α	**1/2**	**2/3**	**3/4**	**9/10**
Search hit	**1.5**	**2.0**	**3.0**	**5.5**
Search miss	**2.5**	**5.0**	**8.5**	**55.5**

10 více testů

Double hashing:

Plnění α	**1/2**	**2/3**	**3/4**	**9/10**
Search hit	**1.4**	**1.6**	**1.8**	**2.6**
Search miss	**1.5**	**2.0**	**3.0**	**5.5**

Tabulka může být více zaplněná než začne klesat výkonnost.
K dosažení stejného výkonu stačí menší tabulka.

References

[Cormen]

Cormen, Leiserson, Rivest: Introduction to Algorithms, Chapter 12, McGraw Hill, 1990