

Zpracoval: hypspave@fel.cvut.cz

7. Matematická indukce a rekurse. Řešení rekurentních (diferenčních) rovnic s konstantními koeficienty. (A7B01MCS)

I. Matematická indukce a rekurse.

Indukční principy patří k základním důkazovým metodám matematiky. Jsou založeny na následující „konstruktivní“ představě množiny $N = \{0, 1, \dots\}$ přirozených čísel:

1. 0 je přirozené číslo.
2. Pokud je n přirozené číslo, je $n + 1$ přirozené číslo.
3. Žádným jiným způsobem, než dvěma výše uvedenými, nelze přirozené číslo zkonstruovat.

Výše uvedeným třem bodům (neformálně) odpovídají tři části důkazu indukcí jistého tvrzení podle přirozeného čísla n :

1. Dokážeme, že tvrzení platí pro $n = 0$.
2. Dokážeme, že pokud tvrzení platí pro libovolné pevné n , potom platí i pro $n + 1$.
3. S použitím principu indukce prohlásíme, že jsme dané tvrzení dokázali pro všechna přirozená čísla $n \geq 0$.

Slabý princip indukce.

Ať T je vlastnost přirozených čísel a předpokládejme, že jsou splněny následující dvě podmínky:

1. Číslo 0 má vlastnost T .
2. Jestliže číslo n má vlastnost T , pak má vlastnost T i číslo $n + 1$.

Pak mají všechna přirozená čísla n vlastnost T .

Př.

(a) Pro všechna přirozená čísla $n \geq 4$ platí nerovnost $n! \geq 2^n$. Nerovnost $n! \geq 2^n$ označíme jako $V(n)$. Potom lze **(a)** přeformulovat následovně:

(b) Pro všechna přirozená čísla $n \geq 4$ platí $V(n)$.

Tvrzení **(b)** dokážeme indukcí.

1. Základní krok. Ukážeme nejprve, že $V(n)$ platí pro nejmenší hodnotu n , která přichází v úvahu, tj. pro $n = 4$. To znamená dokázat nerovnost $4! \geq 24$, a to je triviální.

2. Indukční krok. Předpokládáme, že pro pevné (ale libovolné) $n \geq 4$ platí $V(n)$ a ukážeme, že platí i $V(n + 1)$. Musíme tedy ukázat platnost nerovnosti $(n + 1)! \geq 2^{n+1}$. Dekomponujeme levou stranu nerovnosti takto:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1).$$

Použitím indukčního předpokladu $n! \geq 2^n$ a zřejmé nerovnosti $n+1 \geq 2$, dostaneme po vynásobení obou nerovností nerovnost $(n + 1)! \geq 2^{n+1}$. A to jsme potřebovali.

Silný princip indukce.

Ať n_0 je přirozené číslo a ať W je vlastnost přirozených čísel $n \geq n_0$. Dále předpokládejme, že jsou splněny následující dvě podmínky:

1. Číslo n_0 má vlastnost W .
2. Jestliže všechna přirozená čísla k , $n_0 \leq k < n + 1$, mají vlastnost W , pak $n + 1$ má vlastnost W .

Potom všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ mají vlastnost W .

Př.

Každé přirozené číslo $x \geq 2$ má prvočíselný rozklad.

Důkaz silným principem indukce:

1. Základní krok. Pro $x = 2$ je zřejmě zápis $2 = 2^1$ hledaný prvočíselný rozklad.
2. Indukční krok. Předpokládáme, že prvočíselný rozklad existuje pro všechna přirozená čísla k , pro která platí $2 \leq k < x + 1$. Nastane jeden ze dvou případů:
(a) $x + 1$ je prvočíslo, řekneme p . Potom $x + 1 = p^1$ je hledaný prvočíselný rozklad.
(b) $x + 1$ je složené číslo. Pak existují dvě přirozená čísla řekneme a a b tak, že platí $x + 1 = a \cdot b$ a $1 < a < x + 1$ a $1 < b < x + 1$.

Podle indukčního předpokladu existuje prvočíselný rozklad

$$a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r},$$

a prvočíselný rozklad

$$b = q_1^{m_1} \cdot q_2^{m_2} \cdot \dots \cdot q_s^{m_s}.$$

Vynásobte tyto dva prvočíselné rozklady. Po případném přesunutí jednotlivých faktorů dostáváme prvočíselný rozklad čísla $x + 1 = a \cdot b$.

Rekurse.

V tomto (krátkém) odstavci připomeneme jiný pohled na principy indukce. Půjde nám o vybudování analogie mezi indukcí a chováním (terminací a korektností) rekursivních algoritmu. Každému rekursivnímu algoritmu, který svoji práci ukončí, lze přiřadit parametr, který ukončení algoritmu (terminaci) zaručí. Tomuto parametru říkáme variant. Pro jednoduchost předpokládejme, že tento parametr je nějaké přirozené číslo n . Kdykoli to nepovede k nedorozumění, budeme číslu n také říkat rozměr řešeného problému. Typické rysy, které terminující rekursivní algoritmus má, jsou:

1. Existuje nejmenší rozměr problému, pro který algoritmus nepracuje rekursivně. (Ve skutečnosti může být těchto „nejmenších rozměrů několik, ale zatím situaci nekomplikujme.)
2. Problémy větších rozměrů jsou nejprve dekomponovány na problémy menších rozměrů a poté je vykonána rekurse.

Představme si následující algoritmus (zapsaný v pseudokódu):

```
int fac(int n)
{
    if(n == 0) return 1;
    else return n*fac(n-1);
}
```

Určitě jste rozpoznali rekursivní výpočet faktoriálu. Variantem je číslo n (to je čistá shoda náhod, variant nemá s hodnotou vstupních dat nic společného). Algoritmus pracuje nerekursivně pro $n=0$ a pro větší hodnoty nejprve „dekomponuje“ (řešení problému n je redukováno na řešení problému velikosti $n-1$). Použití variantu a principu indukce často dovolí dokázat totální korektnost algoritmu. Totální korektností rozumíme splnění dvou podmínek:

1. Terminace: algoritmus skončí svůj běh pro libovolná vstupní data.
 2. Parciální korektnost: jestliže algoritmus skončí, potom skončí korektně. (Spočítá to, co má spočítat.)
1. Terminaci zajistí hodnoty variantu v N .
 2. Parciální korektnost dokážeme takto: stačí indukcí ukázat rovnost $\text{fac}(n) = n!$ pro všechna $n \geq 0$.

(a) Základní krok. Zřejmě platí $\text{fac}(0) = 1 = 0!$.

(b) Indukční krok. Předpokládejme, že platí $\text{fac}(n) = n!$. Nejprve využijeme dekompozici $\text{fac}(n+1) = (n+1) \cdot \text{fac}(n)$ danou algoritmem.

Použitím indukčního předpokladu dostáváme rovnost $\text{FAC}(n+1) = (n+1)!$.

Rovnost $\text{FAC}(n) = n!$ pro všechna n dostáváme použitím slabého principu indukce.

II. Řešení rekurentních (diferenčních) rovnic s konstantními koeficienty

Lineární rekurentní rovnice k -tého řádu s konstantními koeficienty je zápis:

$$X(n+k) + c_1 \cdot X(n+k-1) + c_2 \cdot X(n+k-2) + \dots + c_k \cdot X(n) = F(n), \quad n \geq n_0$$

kde $k \geq 1$ je pevné přirozené číslo, c_1, c_2, \dots, c_k jsou reálná čísla a $c_k \neq 0$.

Zápis

$$X(n+k) + c_1 \cdot X(n+k-1) + c_2 \cdot X(n+k-2) + \dots + c_k \cdot X(n) = 0, \quad n \geq n_0$$

nazveme homogenní rovnice příslušející k rovnici.

Charakteristická rovnice je:

$$\lambda^k + c_1 \cdot \lambda^{k-1} + c_2 \cdot \lambda^{k-2} + \dots + c_k = 0$$

Hledání obecného řešení lineární rekurentní rovnice bude probíhat podobně jako hledání lineární diferenciální rovnice ve třech fázích:

1. Nalezneme nejprve obecné řešení příslušné homogenní rovnice. Toto řešení bude lineární kombinací „základních“ posloupností, které homogenní rovnici řeší. Systému těchto základních posloupností budeme říkat fundamentální systém řešení homogenní rovnice. Pro nalezení fundamentálního systému bude zapotřebí nalézt všechny kořeny charakteristické rovnice.
2. Pokud řešíme pouze obecnou a byli zadány počáteční podmínky dosadíme.
3. Nalezneme nějaké (zcela libovolné) řešení nehomogenní rovnice. Tomuto řešení budeme říkat partikulární řešení. Nalézt partikulární řešení může být poměrně těžké. Pokud je však pravá strana rekurentní rovnice (tj. posloupnost $F(n)$) dostatečně jednoduchá, lze tvar

partikulárního řešení odhadnout. Přesný tvar partikulárního řešení lze potom snadno dopočítat.

3. Celkové (obecné) řešení nehomogenní rovnice je součtem partikulárního řešení a obecného řešení homogenní rovnice.
4. Pokud byli zadány počáteční podmínky dosadíme.

Př.

Najděte vzorec pro přímý výpočet čísla Fibonacciho posloupnosti, definované takto:

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{pro } n = 0; \\ 1, & \text{pro } n = 1; \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{jinak.} \end{cases}$$

1. Nalezneme obecné řešení:

$F(n+2) - F(n+1) - F(n) = 0$, počáteční podmínky $F(0)=0$, $F(1)=1$

Charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \text{ kořeny } \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{(1+4)/2} = 1 \pm \sqrt{5}/2$$

Fundamentální systém (FS):

$$\lambda_1^n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}^n$$

$$\lambda_2^n = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}^n$$

Obecná řešení je kombinace FS:

$$F_n = \alpha \frac{1 + \sqrt{5}}{2}^n + \beta \frac{1 - \sqrt{5}}{2}^n$$

Doplnění počátečních podmínek (partikulární ř. nehledáme je to pouze obecná rovnice):

$$F(0) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 = 0$$

$$F(1) = \alpha \frac{1 + \sqrt{5}}{2}^1 + \beta \frac{1 - \sqrt{5}}{2}^1 = 1$$

$$\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Vzorec pro přímý výpočet čísla Fibonacciho posloupnosti:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1 - \sqrt{5}}{2}^n$$

Hledání partikulárního řešení.

Partikulární řešení nehomogenní rovnice:

$$X(n+k) + c_1 \cdot X(n+k-1) + c_2 \cdot X(n+k-2) + \dots + c_k \cdot X(n) = F(n), \quad n \geq n_0$$

se naučíme hledat pouze pro „dostatečně jednoduchou“ pravou stranu. Budeme předpokládat, že posloupnost $F(n)$, $n \geq n_0$ je ve tvaru

$$A^n \cdot P(n), \quad n \geq n_0$$

kde A je nějaká konstanta (muže být i komplexní) a $P(n)$ je nějaký polynom. Lze ukázat, že partikulární řešení pak má tvar:

$$n^d \cdot A^n \cdot p(n), \quad n \geq n_0$$

kde d je násobnost konstanty A jako kořene charakteristické rovnice (v případě, že A není kořenem charakteristické rovnice, klademe $d = 0$) a $p(n)$ je polynom stejného stupně jako polynom $P(n)$.

Koeficienty polynomu $p(n)$ je třeba dopočítat. K tomu využijeme požadavek, že posloupnost má být řešením rovnice:

$$X(n+k) + c_1 \cdot X(n+k-1) + c_2 \cdot X(n+k-2) + \dots + c_k \cdot X(n) = F(n), \quad n \geq n_0$$

Př.

Partikulární řešení rovnice $X(n+1) - 2X(n) = 3^n \cdot (2n+6)$, $n \geq 25$, odhadneme ve tvaru $n^0 \cdot 3^n \cdot (an+b)$, $n \geq 25$. Číslo 3 není kořenem charakteristické rovnice $\lambda - 2 = 0$.

Potřebujeme nyní ještě určit koeficienty a a b . Protože posloupnost $n^0 \cdot 3^n \cdot (an+b)$, $n \geq 25$, má být řešením rovnice:

$$X(n+1) - 2X(n) = 3^n \cdot (2n+6), \quad n \geq 25$$

musí po dosazení posloupnosti $n^0 \cdot 3^n \cdot (an+b)$, $n \geq 25$, za $X(n)$ platit rovnost

$$(n+1)^0 \cdot 3^{n+1} \cdot (a(n+1)+b) - 2 \cdot n^0 \cdot 3^n \cdot (an+b) = 3^n \cdot (2n+6), \quad n \geq 25$$

Obě strany rovnosti můžeme vydělit výrazem 3^n . Dostáváme tak ekvivalentní rovnost (nulté mocniny již nevyepisujeme).

$$3 \cdot (a(n+1)+b) - 2 \cdot (an+b) = 2n+6, \quad n \geq 25$$

Porovnáním koeficientu u stejných mocnin napravo i nalevo dostáváme soustavu rovnic:

- koeficienty u n^1 : $a = 2$
- koeficienty u n^0 : $3a - b = 6$

Řešením této soustavy je $a = 2$, $b = 0$.

Partikulární řešení rovnice $X(n+1) - 2X(n) = 3^n \cdot (2n+6)$, $n \geq 25$, je tedy posloupnost

$$3^n \cdot (2n), \quad n \geq 25.$$

Př.

Partikulární řešení rovnice $X(n+2) - 6X(n+1) + 9X(n) = 3^n \cdot (n-1)$, $n \geq 5$, odhadneme ve tvaru $n^2 \cdot 3^n \cdot (an+b)$, $n \geq 5$, protože číslo 3 je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice.

Př.

$X(n+2)-4X(n+1)+4X(n)=2^n+n$ počáteční podmínky: $X(0)=0, X(1)=1/4$

Charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2$$

FS:

$$\{2^n, n \cdot 2^n\}$$

Obecné:

$$X(n) = \alpha 2^n + \beta n 2^n$$

Partikulární:

Použiji superpozici, budu pro 2^n a n hledat partikulární řešení zvlášť tzn., že budou dvě.

$$X_{p1} = a \cdot 2^n \cdot n^2 \text{ po dosazení je } X_{p1} = 1/8 \cdot 2^n \cdot n^2$$

$$X_{p2} = (bn+c) \text{ po dosazení je } X_{p2} = 1n+2$$

Celkové:

$$X(n) = \alpha 2^n + \beta n 2^n + 1/8 \cdot 2^n \cdot n^2 + 1n + 2$$

Počáteční podmínky:

$$X(0)=0, X(1)=1/4$$

$$\text{Doplníme a vyjde } \alpha = -2, \beta = 1/2$$

Celé řešení:

$$X(n) = -2 \cdot 2^n + 1/2 \cdot n 2^n + (1/8) \cdot 2^n \cdot n^2 + 1n + 2$$