Otázka 07 - Y01DMA

Zadání

Matematická indukce a rekurse. Řešení rekurentních (diferenčních) rovnic s konstantními koeficienty. (Y01DMA)

Úvod

Tato otázka se skládá z několika indukčních principů. Ty nám slouží k důkazování toho, že všechny prvky x nějaké množiny A mají vlastnost V(x). O indukci obecně lze říct, že patří k základním dokazovacím principům a své uplatnění lze nalézt v mnoha oborech, především pak matematice, informatice (computer science) a logice.

Matematicka indukce

Při dokazování matematickou indukcí musíme vždy následovat daný scénář. Ten se skládá z těchto kroků:

- Ještě před samotnou indukcí musíme mít jasno, kterou vlasnost V dokazujeme a pro jakou množinu přirozených čísel tato vlastnost platí.
- **Základní krok** - ověříme že číslo n_0 (první číslo z dané množiny) má vlastnost V
- **Indukční krok** - zformulování indukčního předpokladu na jehož základě se dokáže, že vlasnost V má i číslo n+1.
  - **Indukční předpoklad** je obvykle to, co dokazujeme. Pokud tedy dokazujeme, že pro všechna přirozená čísla n ≥ 4 platí nerovnost n! ≥ 2^n, pak indukční předpoklad je, že pro všechna přirozená čísla n ≥ 4 platí nerovnost n! ≥ 2^n. Ná základě tohoto tvrzení pak dokazujeme, že toto platí i pro číslo n+1.

Princip slabé indukce

Ať n_0 je pevné přirozené číslo a ať V je vlastnost přirozených čísel n ≥ n_0. Ať jsou dále splněny následující dvě podmínky

1. Číslo n_0 má vlastnost V
2. Jestliže číslo n ≥ n_0 má vlastnost V, potom i číslo n + 1 má vlastnost V.

Potom vlastnost V platí pro všechna přirozená čísla.

Princip indukce nám takto dovoluje vyhnout se nekonečné posloupnosti tvrzení a nabízí nám „zkratku“ - Jde vlastně o odvození nekonečné posloupnosti tvrzení místo dokazování každého tvrzení zvlášť.

***Příklad 1*:**

Dokažte následující tvrzení: Pro všechna přirozená čísla n ≥ 4 platí nerovnost n! ≥ 2^n.

ŘEŠENÍ : Nerovnost n! ≥ 2^n označíme jako V(n). Nyní můžeme zapsat tvrzení následovně:

Pro všechna přirozená čísla n ≥ 4 platí V(n)

1. **Základní krok: Ukážeme nejprve, že V(n) platí pro nejmenší možné n, tj. pro číslo 4. Je jasné, že platí 4! ≥ 2^4.**
2. **Indukční krok: Předpokládáme, že pro pevné, (ale libovolné) n ≥ 4 platí V(n) (= indukční předpoklad) a ukážeme, že platí i V(n + 1). Musíme tedy ukázat platnost nerovnosti (n + 1)! ≥ 2^{n+1}. Dekomponujeme levou stranu rovnosti takto: (n + 1)! = n!(n + 1). Použitím indukčního předpokladu a zřejmé nerovnosti n + 1 ≥ 2, dostaneme po vynásobení obou nerovností nerovnost (n + 1)! ≥ 2^{n+1}. A to jsme potřebovali.**

Bod 1. říká, že platí V(4). Podle indukčního kroku, že platí V(5). Opětovným použitím indukčního kroku dostáváme platnost V(6), ...

***Příklad 2*:**

Dokažte, že platí nerovnost $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$ pro všechna přirozená čísla n ≥ 2. Tuto vlastnost pojmenujme V.

ŘEŠENÍ : Budeme postupovat nějakým principem indukce podle n ≥ 2.

1. **Základní krok: pro n = 2 je levá strana nerovnosti výraz $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ neboli $\frac{7}{12}$**
2. **Indukční krok: zvolíme libovolné, ale pevné číslo n ≥ 2 a předpokládejme, že platí V(n) (= indukční předpoklad)**

Máme ukázat platnost nerovnosti $\frac{1}{(n+1)+1}+\frac{1}{(n+1)+2}+\ldots+\frac{1}{2(n+1)}>\frac{1}{2}$

Pokusíme se o dekompozici - zřejmě levé strany. Protože smyslem dekomposice je objevit „problém menších rozměrů“, pokoušíme se v levé straně objevit výraz $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$

Jak je vidět, levá strana indukčního kroku začíná a končí později než levá strana zadané nerovnosti. Je možné tedy použít triku přičtení a odečtení, kde následně dostaneme:

$$\frac{1}{(n+1)+1}+\frac{1}{(n+1)+2}+\ldots+\frac{1}{2(n+1)}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Využijeme indukční předpoklad a můžeme tedy s jistotou říci, že platí:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2}$$

Nyní by k ukončení důkazu indukčního kroku tedy stačilo ukázat, že platí nerovnost (je to zbytek levé strany po využití indukčního předpokladu):

$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}\geq 0$ resp. že platí nerovnost: $\frac{1}{2n+1}\geq\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+2}$.

To je ale snadné, protože pravá strana je: $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2n+2}$ a nerovnost $\frac{1}{2n+1}\geq\frac{1}{2n+2}$ pro n ≥ 2 platí. Pro tento důkaz jsme použili slabý princip indukce.

Rekurzivni algoritmus

Všechny úlohy rozměru $n \geq n_0$ jsou zpracovány, pokud:

1. **Základní krok: úloha rozměru n_0 je zpracována nerekursivně**
2. **Rekursivní volání: úloha rozměru n + 1 je zpracována, pokud po dekompozici je zpracována úloha rozměru n**

Princip silné indukce

Ať V je nějaká vlastnost přirozených čísel. K tomu, abychom mohli usoudit, že všechna přirozená čísla $n >= n_0$ mají vlastnost V, stačí ukázat dvě věci:

1. **Základní krok: číslo n_0 má vlastnost V**
2. **Indukční krok: číslo n + 1 má vlastnost V, za předpokládu, že všechna přirozená čísla k, kde $n_0 \leq k < n + 1$, mají vlastnost V**

(Pozn 1. Definice indukčního kroku citovaná ze script: Jestliže všechna prřirozená čísla k, n0 ≤ k < n + 1, mají vlastnost W, pak n + 1 má vlastnost W.)

(Pozn 2.: Indukční předpoklad se formuluje stylem: Předpokládejme, že pro všechny k, $n_0 \leq k < n + 1$, platí vlastnost V.... Následně musíme rozložit n + 1 a najít ta menší k)

Věta. Princip silné indukce je logicky ekvivalentní principu slabé indukce.

***Příklad 1*:**
Dokažte, že platí tvrzení: Každé číslo $n \geq 2$ má prvočíselný rozklad.

ŘEŠENÍ :

1. **Základní krok: Pro x = 2 je zřejmě zápis 2 = 2^1 hledaný prvočíselný rozklad**
2. **Indukční krok: Předpokládáme, že prvočíselný rozklad existuje pro všechna přirozená čísla k, pro která platí $2 \leq k < x + 1$. Nastane jeden ze dvou případů.**

- **x + 1 je prvočíslo, řekněme p. Potom x + 1 = p^1 je hledaný prvočíselný rozklad.**
- **x + 1 je složené číslo. Pak existují dvě přirozená čísla, řekněme a a b tak, že platí $x+1=a.b$ a 1 < a < x + 1 a 1 < b < x + 1. Podle indukčního předpokladu existuje prvočíselný rozklad $a=p_1^{n_1}.p_2^{n_2}.p_3^{n_3}...p_r^{n_r}$ a prvočíselný rozklad $b=q_1^{m_1}.q_2^{m_2}.q_3^{m_3}...q_r^{m_s}$**

Vynásobte tyto dva prvočíselné rozklady. Po případném přesunutí jednotlivých faktorů dostáváme prvočíselný rozklad čísla x + 1 = a · b.

Princip dobrého uspořádání. Každá neprázdná podmnožina přirozených čísel má nejmenší prvek.

Věta. Princip dobrého uspořádání je logicky ekvivalentní principům indukce.

Věta. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. **Slabý princip indukce**
2. **Silný princip indukce**
3. **Princip dobrého uspořádání.**

Tvrzení Terminaci rekursivního algoritmu zaručí *variant* (=rozměr řešeného problému, který se zmenšuje, nelze jej však zmenšovat do nekonečna).

Tvrzení
Důkaz indukcí == rekursivní algoritmus
Princip dobrého uspořádání a variant zaručí terminaci rekurzívního algoritmu.

Princip strukturální indukce

Pojmy.

Abeceda: $\Sigma = At \cup \left\{ true, not, \wedge, or, \left(, \right) \right\}$.

Množina F všech formulí je $F \subset \Sigma^{\times}$.
F je induktivně generovaná „gramatikou" (atom), (true), (and), (not).

Princip.
Ať Σ je libovolná konečná abeceda. Ať G je konečná sada odvozovacích pravidel, která induktivně zadává množinu slov $L \subset \Sigma^{\times}$.
Ať A je množina všech axiomů z G. Ať D je množina všech deduktivních pravidel z G.
Ať V je nějaká vlastnost slov nad abecedou Σ. K tomu, abychom ukázali, že každé slovo v množině L má vlastnost V, stačí ukázat[a]:

1. **Základní krok: Závěr každého axiomu z množiny A má vlastnost V.**
2. **Indukční krok: Pro každou instanci libovolného deduktivního pravidla v množině D platí: Jestliže všechny předpoklady pravidla mají vlastnost V, potom i závěr tohoto pravidla má vlastnost V.**

a) Tomu se říká: Vlastnost V je invariantní na průchod gramatikou G.

Platí.

1. **Jestlize platí (silný nebo slabý) princip indukce, platí i princip strukturální indukce.**
2. **Pro každou neprázdnou abecedu Σ platí: existuje množina** $M \subset \Sigma^{\times}, \textit{kterou nelze zadat induktivně}$.

***Příklad 1*:**
Ať At je množina atomických formulí. Množina $F\left(At\right)$ všech formulí výrokové logiky je induktivně zadáná následujícími axiomy

$\overline{tt}\left(true\right)$ **|** $\overline{a}\left(a\right)$

a deduktivními pravidly

$\frac{\varphi}{\neg\varphi}\left(\neg\right)$ **|** $\frac{\varphi_1\varphi_2}{\left(\varphi_1\wedge\varphi_2\right)}\left(\wedge\right)$ **|** $\frac{\varphi_1\varphi_2}{\left(\varphi_1\vee\varphi_2\right)}\left(\vee\right)$ **|** $\frac{\varphi_1\varphi_2}{\left(\varphi_1\Rightarrow\varphi_2\right)}\left(\Rightarrow\right)$ **|** $\frac{\varphi_1\varphi_2}{\left(\varphi_1\Leftrightarrow\varphi_2\right)}\left(\Leftrightarrow\right)$

Dokažte, že v každé formuli $\varphi \in F\left(At\right)$ je počet levých a pravých závorek shodný.

ŘEŠENÍ : Protože množina $F\left(At\right)$ je induktivně vytvořená, zkusíme k důkazu využít princip strukturální indukce. Na množině všech slov nad abecedou $\Sigma = \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \left(tt\right), \left(, \right) \cup At$ zavedeme následující vlastnost: V(w) platí, pokud je ve slovu w počet levých a pravých závorek stejný.

Chceme dokázat, že platí V (w), a to pro každé slovo z množiny F(At). Podle principu strukturální indukce stačí ukázat, že vlastnost V je invariantní na průchod pravidly ze zadání.

- **Základní krok: máme ukázat, že závěr každého axiomu ze zadání má vlastnost V . To je zřejmé: závěr každého axiomu má nula pravých a nula levých závorek. Důkaz základního kroku je u konce.**
- **Indukční krok: máme ukázat, že pro každé deduktivní pravidlo ze zadání platí: jestliže všechny předpoklady pravidla mají vlastnost V , má vlastnost V i závěr tohoto pravidla. To je zřejmé: vezměme například pravidlo $\left(\Leftrightarrow\right)$, pro ostatní pravidla proběhne důkaz analogicky. Pokud platí $V\left(\varphi_1\right)$ a $V\left(\varphi_2\right)$, platí zřejmě i $V\left(\left(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2\right)\right)$. Důkaz indukčního kroku je u konce.**

Podle principu strukturální indukce je důkaz ukončen.

Rekurentni rovnice

Definice.
***Lineární rekurentní rovnice k-tého řádu s konstantními koeficienty* je zápis: $a_kX(n + k) + a_{k-1}X(n + k - 1) + \dots + a_0X(n) = f(n)$, kde $a_k \neq 0$.**

Koeficienty: (reálná nebo komplexní čísla): a_k, a_{k-1}, … a_0
Pravá strana: posloupnost f(n)
Příslušná homogenní rovnice:
$a_kX(n + k) + a_{k-1}X(n + k - 1) + \dots + a_0X(n) = 0$
Charakteristická rovnice: $a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_0 = 0$

Reseni homogenni rovnice.

- **Vyresime chrakteristickou rovnici $a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_0 = 0$.**

Koreny: λ_1 (nasobnst k_1), …, λ_r (nasobnost k_r).

- **Koren λ_1 nasobnosti k_1 >= 1 prida k_1 ruznych posloupnosti do fundamentalniho systemu:**

$\lambda^n{}_1, n\times\lambda^n{}_1, n^2\times\lambda^n{}_1, \ldots, n^{k_1-1}\times\lambda^n{}_1$
(analogicky prispeji koreny $\lambda_2,\ldots,\lambda_r$).

- **Fundamentalni system ma celkove k ruznych posloupnosti, protoze $k_1+k_2+\ldots+k_r=k$**
- **Kompletni reseni homogenni rovnice je linearni kombinace fundamentalniho systemu**

Odhad partikularniho reseni pro pravou stranu A^n * P(n), kde A je cislo a P(n) je polynom

- **d je nasobnost A jako korene chrakteristicke rovnice (nasobnost 0 znamena: A neni koren).**
- **Odhad partikularniho reseni: $n^d\times A^n\times p\left(n\right)$, kde p(n) je polynom stejneho stupne jako P(n).**
- **Koeficienty polynomu p(n) ziskame z pozadavku, ze $n^d\times A^n\times p\left(n\right)$ ma resit danou nehomogenni rovnici.**

Pro slozitejsi pravou stranu lze pouzit princip superposice.

Komplexni reseni nehomogenni rovnice.

- **Secteme kompletni reseni homogenni rovnice a partikularni reseni.**
- **Jsou-li zadany pocatecni podminky: nakonec urcime koeficienty linearni kombinace fundamentalniho systemu.**

Priklad.
Rieste rek. rovnicu c(n+1) - c(n) = n, n >= 1, c(1) = 0.

Homog. rovnica: c(n+1) - c(n) = 0, n >= 1
Charakter. rovnica: $\lambda-1=0$
$\lambda=1$

Fundamentalny system: 1^n**, n >= 1**

Reseni homogennej rovnice: $\alpha\times1^n, n\geqslant1, \alpha\in\mathbf{R}$

Partikularni reseni: $1^n\times n$ **, kde** $1^n=A^n, n=P\left(n\right)$

Odhad: d = 1, $n^1\times1^n\left(an+b\right)=c\left(n\right), a, b\in\mathbf{R}$

$an^2+bn=c\left(n\right)$ **Dosadime do povodnej rovnice** $a\left(n+1\right)^2+b\left(n+1\right)-an^2-bn=n, n\geqslant1$

Resime porovnanim koef: (musi mat jedno reseni)
u n^2**: a - a = 0**
u n^1**: 2a + b - b = 1**
u n^0**: a + b = 0**
a = 1/2, b = -1/2

Partik. reseni: $an^2+bn=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n, n\geqslant1$

Kompletni. reseni nehomogenni rovnice: $\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+\alpha\times1^n, \alpha\in\mathbf{R}, n\geqslant1$

Slovníček pojmů

Invariant predikat ktory zostava pravdivy po celu dobu - vykonavania programu, tj. pocas vykonavania specifickej sekvencie operacii
- zajisti parcialni korektnost

Terminace u rek. alg. algoritmus ukonci vypocet pro jakakoli pripustna vstupni data

Formule parcialni korektnosti u alg. tvrzeni, ktere plati, pokud algoritmus svoj praci ukonci.

Zdroje

* Kapitola 1 - ftp://math.feld.cvut.cz/pub/velebil/y01dma/dma-notes.pdf [ftp://math.feld.cvut.cz/pub/velebil/y01dma/dma-notes.pdf]

spolecne/spol7.txt · Poslední úprava: 2010/06/07 12:54 autor: Gizmo