Otázka 06 - Y01MLO

Zadání

Predikátová logika, formule predikátové logiky, sentence, interpretace jazyka predikátové logiky, splnitelné sentence, tautologie, kontradikce, tautologicky ekvivalentní formule. (Y01MLO)

Slovníček pojmů

- **arita operace (česky místnost operace) je rovna aritě kartézského součinu vstupu, tzn. obsahuje-li vstup n množin, pak říkáme, že operace je n-ární.**
  - **pro** $n=1$ **je operace unární - příkladem může být funkce se signaturou** $f\left(x\right)$**. Unární je také spojka negace** $\neg$**.**
  - **pro** $n=2$ **je operace binární - příkladem může být funkce se signaturou** $f\left(x,y\right)$**. Binární je velká většina logických spojek** $\vee,\wedge,\Rightarrow,\Leftrightarrow$
  - **pro** $n=3\rightarrow f\left(x,y,z\right)$ **atd.**

Predikátová logika

Zatímco výroková logika umožňuje pouze klasifikací vztahů mezi elementárními prvky, predikátová logika tyto prvky dále strukturuje.

```
Sókrates je člověk.
Člověk je smrtelný.
-------------------
Sókrates je smrtelný.
```

Ve výrokové logice tento úsudek nelze zformalizovat, jelikož použité výroky spolu nesouvisí. Úsudek by odpovídal tvrzení {p,q} je konsekventem r, které neplatí.

V matematice a logice se pojmem predikátová logika označuje formální odvozovací systém používaný k popisu matematických teorií a vět.

Jazyk predikátové logiky se skládá z:

1. **logických symbolů, tj.:**
   I. **množiny proměnných** $x,y,z\ldots$
   II. **výrokových logických spojek** $\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow$
   III. **obecného** $\forall$ **a existenčního kvantifikátoru** $\exists$
2. **speciálních symbolů. tj.:**
   I. **množiny** P **predikátových symbolů**
   II. **množiny** K **konstantních symbolů**
   III. **množiny** F **funkčních symbolů**
3. **pomocných symbolů, jako jsou závorky, čárka atd.**

Každý predikátový a funkční symbol má danou aritu (četnost). Viz slovníček pojmů.

Nechť L je jazyk. V následující definici uvažujeme pouze dvě logické spojky → a ¬ a jeden kvantifikátor $\forall$. Zbylé spojky a kvantifikátor lze zavést definicemi. Termem je v jazyce L vše, co vznikne dle následujících pravidel.

Množina termů je definována těmito pravidly:

1. **Každá proměnná a každý konstantní symbol je term.**
2. **Jestliže f je funkční symbol arity n a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $f\left(t_1, t_2, \ldots, t_n\right)$ je také term.**
3. **Nic, co nevzniklo konečným použitím pravidel 1 a 2, není term.**

Příklady na formalizaci vět

Příklad 1

```
Každý kdo má housle, má též hudební sluch.
Petr má housle.
---------------------------
Petr má hudební sluch.
```

Máme zde dvě vlastnosti (predikáty): „hrát na housle“ a „mít hudební sluch“. „Hrát na housle“ označíme jako H. „Mít hudební sluch“ označíme jako MS. Petr zde představuje konstantu, kterou si označíme jako p. „Petr“ je zde také term.

Celý příklad pak do predikátové logiky přepíšeme po větách následovně:

$$\forall x\left(H\left(x\right) \Rightarrow MS\left(x\right)\right)$$

$$H\left(p\right)$$

$$MS\left(p\right)$$

Příklad 2

```
Silva hraje na housle.
Silva má hudební sluch.
-----------------------------
Někdo, kdo hraje na housle má i hudební sluch.
```

Opět si určíme vlastnosti. Silvu zde označíme jako konstantu s. „Hrát na housle“ označíme jako H. „Mít hudební sluch“ označíme jako MS.

Celý výraz pak do jazyka predikátové logiky přepíšeme následovně:

$$H\left(s\right)$$

$$MS\left(s\right)$$

$$\exists x\left(H\left(x\right)\wedge MS\left(x\right)\right)$$

Příklad 3

```
Je-li přirozené číslo sudé, pak jeho následník je číslo liché.
Číslo 2 je sudé.
---------------------------------------------------------------
Následník čísla 2 je číslo liché.
```

Dvě vlastnosti (predikáty), zde jsou „být sudým přirozeným číslem“ a „být lichým přirozeným číslem“.

Označíme S jako „být sudým přirozeným číslem“
Označíme L jako „být lichým přirozeným číslem“
Číslo označíme jako x. Máme zde ještě následníka, což zapíšeme jako funkci $f: n \rightarrow n+1$

První větu můžeme říci také tak, že „Pro všechna přirozená čísla platí, pokud je sudé, pak následník je číslo liché. První větu tak zapíšeme jako $\forall\left(S\left(x\right)\Rightarrow L\left(f\left(x\right)\right)\right)$

Druhá věta bude $S\left(2\right)$

Třetí věta bude $L\left(f\left(2\right)\right)$

Příklad 4

```
Každé celé číslo má předchůdce.
```

Vlastnost čísla a být předchůdcem čísla b označíme jako predikát $Q\left(a,b\right)$. Větu si musíme zase trochu „přetransformovat“ na „Pro každé celé číslo existuje alespoň jeden předchůdce.“

$\exists a\, Q\left(a,b\right)$**, což znamená „pro celé číslo existuje alespoň jeden předchůdce“**

$\forall b \exists a\, Q\left(a,b\right)$**, tato věta již vyjadřuje původní zadání. Přesný přepis by zněl „pro každé b existuje takové a, pro které platí, že je předchůdce b“**

Formule predikátové logiky

Formule predikátové logiky se skládá z posloupnosti symbolů jazyka predikátové logiky.

Atomická formule je predikátový symbol P aplikovaný na tolik termů, kolik je jeho arita. Jinými slovy, je-li arita predikátového symbolu P číslo n a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ je n-tice termů, pak

$P\left(t_1, t_2, \ldots, t_n\right)$ **je atomická formule.**

Množina formulí je definována těmito pravidly:

1. **Každá atomická formule je formule.**
2. **Jsou-li φ a ψ dvě formule pak $\left(\neg\varphi\right), \left(\varphi \wedge \psi\right), \left(\varphi \vee \psi\right), \left(\varphi \Rightarrow \psi\right), \left(\varphi \Leftrightarrow \psi\right)$ jsou opět formule.**
3. **Je-li φ formule a x proměnná, pak ($\forall x\ \varphi$) a ($\exists x\ \varphi$) jsou opět formule.**
4. **Nic, co nevzniklo pomocí konečně mnoha použití bodů 1 až 3, není formule.**

Příklady

Příklad 5

```
Nikdo, kdo nebyl poučen o bezpečnosti práce, nesmí do laboratoře.
```

Proměnnou zde budou lidé, označíme je jako x. Predikáty jsou:

- **„být poučen o bezpečnosti práce“, označíme jako $P\left(x\right)$**
- **„smět do laboratoře“, označíme jako $S\left(x\right)$**

Výsledná formule:

$$\forall x\left(\neg P\left(x\right) \Rightarrow \neg S\left(x\right)\right)$$

Příklad 6

```
Každý člověk, kdo je zaměstnán v ČR, je daňový poplatník.
```

Subjekt označíme jako x. Predikáty jsou:

- **„být zaměstnán v ČR“, označíme jako $Z\left(x\right)$**
- **„být daňový poplatník“, označíme jako $D\left(x\right)$**

Větu může být vyjádřena také následovně: „Pro všechny subjekty platí, že pokud jsou zaměstnány v ČR, pak jsou daňoví poplatníci.“

$$\forall x\left(Z\left(x\right) \Rightarrow D\left(x\right)\right)$$

Příklad 7

```
Ne každý dobrý herec, hraje v Národním divadle.
```

Subjektem bude herec, označíme jako x. Predikáty jsou:

- **„být dobrým hercem", označíme jako $H\left(x\right)$**
- **„hrát v Národním divadle", označíme jako $N\left(x\right)$**

Výsledná formule pak bude: $\exists x\left(H\left(x\right)\wedge\neg N\left(x\right)\right)$

Další definice

Podformule

Podřetězec formule φ, který je sám formulí, se nazývá podformulí formule φ. Odpovídá podstromu derivačního stromu určeného vrcholem s predikátovým symbolem, logickou spojkou nebo kvantifikátorem.

Vázaný a volný výskyt

Mějme formuli φ a proměnnou x, která se vyskytuje ve φ.

1. **Výskyt proměnné x je vázaný ve φ, jestliže se x vyskytuje v nějaké podformuli formule φ tvaru $\exists x\ \psi$ nebo $\forall x\ \psi$.**
2. **V opačném případě mluvíme o volném výskytu.**

Příklad

Uvažujme formuli v jazyku s unárním funkčním symbolem f, binárním funkčním symbolem $+$ a binárními predikátovými symboly $<$ a =.

$$\exists x\left(x<y\wedge\forall y\left(z+f\left(y\right)=x\right)\right)$$

- **Výskyt proměnné z je volný.**
- **Všechny výskyty x jsou vázané.**
- **Proměnná y má první výskyt volný a druhý vázaný.**

Sentence

- **Pokud má formule φ pouze vázané výskyty proměnných, pak se nazývá sentence (uzavřená formule).**
- **Pokud má formule φ pouze volné výskyty proměnných, pak se nazývá otevřená formule.**

Příklady

Příklad 8

Je formule $\left[\forall x\left(P(x)\vee Q(x,y)\right)\Rightarrow R(a,x)\right]$ **sentence?**

Postup: Víme, že pokud je formule sentence, tak nemá žádné volné proměnné. Zda má formule volné proměnné zjistíme, když si znázorníme derivační strom formule. Vypadá takto:

```
      ⇒
     / \
    /   \
   /     \
  Vx      R
  |      / \
  V    a   x
 /  \
P    Q
|   / \
x  x   y
```

Volné proměnné jsou takové proměnné, u kterých při směru ke kořeni derivačního stromu nenarazíme na kvantifikátor ($\forall,\exists$**) s touto proměnnou.**
Jaké zde máme volné proměnné? Jsou to a,x **u predikátu** R **a** y **u predikátu** Q**. Takže volné proměnné existují, tudíž formule** $\left[\forall x\left(P(x)\vee Q(x,y)\right)\Rightarrow R(a,x)\right]$ **není sentence.**

Poznámka: proměnná x **u predikátu** P **a** Q **je vázaná proměnná.**

Příklad 9

$\forall z\forall y\exists x\left(x<y\wedge\forall y\left(z+f(y)=x\right)\right)$ **Tato formule je sentence.**

Příklad 10

$x<y\wedge z+f(y)$ **Tato formule je otevřená.**

Příklad 11

$\exists x\left(x<y\wedge\forall y\left(z+f(y)=x\right)\right)$ **Tato formule není ani uzavřená ani otevřená.**

Příklad 12

$0<f\left(f\left(0\right)\right)$ **Tato formule je uzavřená i otevřená.**

Interpretace jazyka predikátové logiky

Interpretace predikátové logiky s predikátovými symboly P, konstantními symboly K a funkčními symboly F je dvojice D, I kde:

- **D je neprázdná množina**
- **I je přiřazení, které**
  1. **každému konstantnímu symbolu $a\in K$ přiřazuje prvek z D, značíme jej $I\left(a\right)$**
  2. **každému funkčnímu symbolu $f\in F$ arity n přiřazuje zobrazení množiny D^n do D, značíme je $I\left(f\right)$**
  3. **každému predikátovému symbolu $P\in P$ arity n přiřazuje podmnožinu $I\left(P\right)\subseteq D^n$, tj. n-ární relaci na množině D.**

Množině D (ve slidech U) říkáme *domain* nebo též *universum interpretace* D, I .

Splnitelné sentence

Sentence φ se nazývá splnitelná, jestliže je pravdivá v aspoň jedné interpretaci.

Příklady

Ukažte, že následující sentence jsou splnitelné formule:

a) $\forall x\,\exists y\,Q\left(x, y\right)$

Chceme-li ukázat, že je daná formule splnitelná, je nejlepší najít její model (tedy takovou interpretaci, ve které je sentence pravdivá).

Zvolíme-li jako universum D přirozená čísla $\mathbb{N}$, pak vlastnost Q můžeme interpretovat například jako „být větší nebo roven“. Pak celá interpretace sentence zní: „Pro všechna přirozená čísla existuje číslo, které je větší nebo rovno.“ A to je pravda.

b) $\forall x\,\forall y\left(x+y=y+x\right)$

Jedna z pravdivých interpretací: $D=\mathbb{N}$, pro všechna x a y platí, že $x+y=y+x$ (komutativní zákon)

***Poznámka:* Obecně se při hledání interpretace splnitelné formule doporučuje používat jako universum různé obory čísel, nejlépe přirozená čísla, protože se na nich jednoznačně dá ukázat pravdivost či nepravdivost predikátů. Takže žádná universa lidí, zajíců, papoušků apod.**

c) $\forall x \forall y \left(P(x,y) \Rightarrow P(y,x) \right)$

Jedna z pravdivých interpretací: $D=\mathbb{N}$, predikátový symbol P představuje vlastnost „být roven“. Pro přirozená čísla x, y platí,že pokud $x=y$, pak $y=x$.

Množina sentencí S je splnitelná právě tehdy, když existuje interpretace D,I, v níž všechny sentence z S jsou pravdívé. Neníli množina sentencí S splnitelná, tj. nemáli model, říkáme, že je nesplnitelná.

Tautologie

Definice

- **Rekneme, že sentence φ jazyka α predikátové logiky je *tautologie*, pokud platí |=| tt**

neboli: sentence φ je nazývána *tautologií*, jestliže je pravdivá v každé interpretaci

Příklad

- **sentence φ $\left(\left(x \Rightarrow \left(y \wedge \neg y \right) \right) \Rightarrow \neg x \right)$ je tautologie.**

Kontradikce

Definice

- **Rekneme, že sentence φ jazyka α predikátové logiky je *kontradikce*, pokud platí |=| ff**

neboli: sentence φ je nazývána *kontradikcí*, jestliže je nepravdivá v každé interpretaci

Příklad

- **sentence φ $\neg \left(\left(x \Rightarrow \neg x \right) \Leftrightarrow \neg x \right)$ je kontradikce.**

Tautologicky ekvivalentní formule

Definice: Řekneme, že dvě sentence φ a ψ jsou tautologicky ekvivalentní právě tehdy, když platí φ |= ψ a ψ |= φ. Tento fakt značíme φ|=|ψ.

z toho vyplývá:

- **formule S a T jsou tautologicky ekvivalentní, když formule S ⇔ T je tautologie**
- **formule S a T jsou tautologicky ekvivalentní, když pro každé pravdivostní ohodnocení u platí u(T) = u(S)**

Řekneme, že sentence φ je konsekventem, též sémantickým důsledkem množiny sentencí S právě tehdy, když každý model množiny S je také modelem sentence φ. Tento fakt značíme $S \models \varphi$.

Pro každou množinu sentencí S a každou sentenci φ platí:

$S \models \varphi$ právě tehdy, když $S \cup \left\{ \neg \varphi \right\}$ je nesplnitelná množina.

Příklady na tautologii, kontradikci a splnitelné sentence

Rozhodněte, zda následující sentence jsou tautologie, kontradikce nebo splnitelné sentence.

a) $\left(\exists x\, P\left(x \right) \right) \vee \left(\exists x\, \neg P\left(x \right) \right)$

Uvažujme následující interpretaci: $D = \mathbb{N}$, P - být sudým

Poznámka: Uvažujeme přirozená čísla bez nuly ($\mathbb{N}$), nula může být zdrojem problémů.

Pak interpretace sentence zní: Existuje alepsoň jedno přirozené číslo x, které je sudé nebo existuje alepsoň jedno přirozené číslo x, které není sudé. Obě formule jsou pravdivé, tudíž celá sentence je tautologie.

b) $\forall x \left(P\left(x \right) \vee \neg P\left(x \right) \right)$ **Uvažujme zase následující interpretaci: $D = \mathbb{N}$, P - být sudým**

Pak interpretace sentence zní: Pro všechna přirozená čísla x platí, že buď jsou sudá nebo nejsou sudá. To je samozřejmě vždycky pravda, tudíž sentence je tautologie.

c) $\left(\exists x\, P\left(x \right) \right) \Rightarrow \left(\forall x\, P\left(x \right) \right)$

Uvědomme si, že sentence je pravdivá vždy, když sentence $\exists x\, P\left(x \right)$ je nepravdivá.

Uvažujme následující interpretaci: $D = \mathbb{N}$, P - být sudým
Pak interpretace sentence zní: Pokud existuje alespoň jedno přirozené číslo, které je sudé, pak všechna přirozená čísla jsou sudá. To není pravda. Sentence $\left(\exists x\, P\left(x \right) \right) \Rightarrow \left(\forall x\, P\left(x \right) \right)$ není v této interpretaci pravdivá.

Uvažujme ještě jednu interpretaci: $D = \mathbb{N}$, P - být záporným
Pak interpretace sentence zní: Pokud existuje alespoň jedno přirozené číslo, které je

nzáporné, pak všechna přirozená čísla jsou záporná. První sentence ani druhá sentence nejsou pravdivé, tudíž sentence je splnitelná v této interpretaci.

Sentence tedy není kontradikcí, protože jsme ukázali interpretaci, ve které je splnitelná. Sentence ale není tautologie, protože jsme ukázali interpretaci, ve které není splnitelná. Je to splnitelná sentence, která není tautologií.

d) $\left(\forall x\, P\left(x\right)\right) \wedge \left(\exists x\, \neg P\left(x\right)\right)$

Uvažujme naši interpretaci: $D = \mathbb{N}$ **,** P **- být sudým**

Pak interpretace sentence zní: Všechna přirozená čísla jsou sudá a zároveň existuje alespoň jedno přirozené číslo které není sudé. To je jasná kontradikce.

Zkuste si i jiné interpretace, vždy vyjde, že sentence je kontradikce.

Zdroje

Tato stránka vznikla revizí původního textu k této otázce v archivu. Text v archivu byl několikráte procházen, porovnáván s přednáškami, skripty a poznámkami z přednášek Y01MLO. Následně byl doplněn na místech, kde se zdál nedostečný či neúplný. Byly upraveny či smazány některé příklady a naopak přidány nové - hlavně na základě příkladů z poznámek. Příklady byly brány hlavně z poznámek z hodiny nebo z přednášek.

spolecne/spol6.txt · Poslední úprava: 2010/06/11 06:41 autor: Kucera5