Zpracoval: hypspave@fel.cvut.cz

6. Predikátová logika, formule predikátové logiky, sentence, interpretace jazyka predikátové logiky, splnitelné sentence, tautologie, kontradikce, tautologicky ekvivalentní formule. (A7B01LOG)

I. Predikátová logika.

Jazyk predikátové logiky. Jazyk predikátové logiky se skládá z

1. logických symbolů, tj.:
   a) spočetné množiny individuálních proměnných: x; y; …; x_1; x_2; …
   b) výrokových logických spojek: ¬,∧,∨, ⇒, ⇔
   c) obecného kvantifikátoru ∀ a existenčního kvantifikátoru ∃
2. speciálních symbolů, tj.:
   a) množiny *P* predikátových symbolů (nesmí být prázdná)
   b) množiny *K* konstantní symbolů (může být prázdná)
   c) množiny *F* funkčních symbolů (může být prázdná)
3. pomocných symbolů, jako jsou závorky „(, [,) ,]" a čárka „,".

Termy. Množina termů je definována těmito pravidly:

1. Každá proměnná a každý konstantní symbol je term.
2. Jestliže f je funkční symbol arity n a t_1; t_2; … ; t_n jsou termy, pak f(t_1; t_2; … ; t_n) je také term.
3. Nic, co nevzniklo konečným použitím pravidel 1 a 2, není term.

Atomické formule. Atomická formule je predikátový symbol *P* aplikovaný na tolik termů, kolik je jeho arita. Jinými slovy, je-li arita predikátového symbolu *P* číslo n a t_1; t_2; : : : ; t_n je n-tice termů, pak *P*(t_1; t_2; : : : ; t_n) je atomická formule.

Formule. Množina formulí je definována těmito pravidly:

1. Každá atomická formule je formule.
2. Jsou-li φ a ψ formule, pak $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ jsou opět formule.
3. Je-li φ formule a x proměnná, pak (∀x φ) a (∃x φ) jsou opět formule.
4. Nic, co nevzniklo pomocí konečně mnoha použití bodů 1 až 3, není formule.

Volný a vázaný výskyt proměnné. Výskyt proměnné x je vázaný ve formuli φ, jestliže při postupu od listu ohodnoceného tímto x ve směru ke kořeni derivačního stromu narazíme na kvantifikátor s touto proměnnou. V oparném případě mluvíme o volném výskytu proměnné x.

Otevřené formule, sentence. Formuli, která nemá volné proměnné, říkáme uzavřená formule nebo sentence. Formuli, která nemá vázané proměnné, říkáme otevřená formule.

II. Interpretace jazyka predikátová logiky.

Interpretace speciálních symbolů. Interpretace predikátové logiky s predikátovými symboly *P*, konstantními symboly *K* a funkčními symboly *F* je dvojice D, I, kde

- D je neprázdná množina;
- I je přiřazení, které
    1. každému konstantnímu symbolu a ∈ *K* přiřazuje prvek z D, značíme jej I(a)
    2. každému funkčnímu symbolu f ∈ F arity n přiřazuje zobrazení množiny D^n do D, značíme je I(f),
    3. každému predikátovému symbolu P ∈ P arity n přiřazuje podmnožinu I(P) ⊆ D^n, tj. n-ární relaci na množině D.

Množině D říkáme domain nebo též universum interpretace D; I.

Interpretace termů. Je dána interpretace D; I. Označme písmenem v libovolné ohodnocení proměnných, tj. zobrazení, které každé proměnné x přiřadí prvek v(x) ∈ D.

1. Je-li term konstantní symbol a, pak jeho hodnota je prvek I(a) ∈ D. Jeli term proměnná x, pak jeho hodnota je v(x) ∈ D (tj. hodnota daná ohodnocením proměnných v).
2. Je-li f funkční symbol arity n a t_1; … ; t_n jsou termy, jejichž hodnotu známe, a ta je rovna pořadí d_1; … ; d_n, pak term f (t1; … ; t_n) má hodnotu I(f)(d_1; … ; d_n). [Jinými slovy, hodnota termu f (t_1; … ; t_n) je funkční hodnota funkce I(f) provedené na n-tici prvků d_1, …, d_n z D.]

Poznamenejme, že neobsahuje-li term t proměnnou, pak jeho hodnota nezáleží na ohodnocení proměnných v, ale pouze na interpretaci.

Pravdivost formulí v dané interpretaci. Nejprve definujeme pravdivost formulí v dané interpretaci D; I při daném ohodnocení proměnných v:

1. Nechť φ je atomická formule. Tj. φ = P(t_1; … ; t_n), kde P je predikátový symbol arity n a t_1; … ; t_n jsou termy, jejichž hodnoty d_1; … ; d_n jsou známé. Pak φ je pravdivá v interpretaci D; I právě tehdy, když (d_1; … ; d_n) ∈ I(P). Jinými slovy: φ je v naší interpretaci pravdivá právě tehdy, když n-tice hodnot termů t_1; … ; t_n má vlastnost I(P).
2. Jsou-li φ a ψ formule, jejichž pravdivost v interpretaci D; I a ohodnocení v již známe, pak
   ¬φ je pravdivá právě tehdy, když φ není pravdivá.
   φ∧ψ je pravdivá právě tehdy, když φ i ψ jsou pravdivé.
   φ∨ψ je nepravdivá právě tehdy, když φ i ψ jsou nepravdivé.
   φ⟹ψ je nepravdivá právě tehdy, když φ je pravdivá a ψ je nepravdivá.
   φ⟺ψ je pravdivá právě tehdy, když obě formule φ a ψ jsou pravdivé, nebo obě formule φ a ψ jsou nepravdivé.
3. Je-li φ formule a x proměnná, označme
   I_v(φ) = {d ∈ D | změníme-li v tak, že v(x) = d, dostaneme pravdivou formuli }.
   Definujeme:
    - ∀x φ(x) je pravdivá právě tehdy, když I_v(φ) = D.
    - ∃x φ(x) je pravdivá právě tehdy, když I_v(φ) 6≠ ∅.

Nyní již definujeme pravdivost sentence v dané interpretaci D, I:
Sentence φ je pravdivá v interpretaci D, I právě tehdy, když je pravdivá pro každé ohodnocení proměnných v.

III. Tautologie, kontradikce, splnitelná sentence.

Model sentence. Interpretace D; I, ve které je sentence φ pravdivá, se nazývá model sentence φ.

Tautologie, kontradikce, splnitelná sentence. Sentence φ se nazývá tautologie, jestliže je pravdivá v každé interpretaci. Sentence se nazývá kontradikce, jestliže je nepravdivá v každé interpretaci. Nazývá se splnitelná, jestliže je pravdivá v aspoň jedné interpretaci.

Předchozí definice mohla znít i takto: Sentence je tautologií právě tehdy, když každá interpretace je jejím modelem; je splnitelná právě tehdy, když má alespoň jeden model a je to kontradikce právě tehdy, když nemá žádný model.

Tautologická ekvivalence sentenci. Řekneme, že dvě sentence jsou tautologicky ekvivalentní, mají-li stejné modely. To znamená, jsou-li pravdivé ve stejných interpretacích. Fakt, že sentence α je tautologicky ekvivalentní sentenci β značíme α |=| β.

Tvrzení. Nechť φ a ψ jsou sentence. Pak platí:
φ |=| ψ právě tehdy, když φ ⟺ψ je tautologie.

Tvrzení. Platí:

1. $\forall x \forall y Q(x, y) = \forall y \forall x Q(x, y)$
2. $\exists x \exists y Q(x, y) = \exists y \exists x Q(x, y)$
3. $\neg(\exists x P(x)) = (\exists x \neg P(x))$
4. $\neg(\forall x P(x)) = (\forall x \neg P(x))$

Splnitelná množina sentencí. Řekneme, že množina sentencí S je, jestliže existuje interpretace, která je modelem každé sentence φ z množiny S. Taková interpretace se nazývá model množiny S. Nemá-li množina sentencí S model, říkáme, že je nesplnitelná.

Sémantický důsledek, konsekvent. Je dána množina sentencí S a sentence φ. Řekneme, že φ je sémantický důsledek (konsekvent) množiny sentencí S právě tehdy, když každý model množiny S je také modelem sentence φ. Značíme S |= φ.

Věta. Pro každou množinu sentencí S a sentenci φ platí:
S |= φ právě tehdy, když S ∪ {¬φ} je nesplnitelná množina.