Otázka 05 - Y01MLO

Zadání

Výroková logika, formule výrokové logiky a jejich pravdivostní ohodnocení, splnitelné formule, tautologie, kontradikce, sémantický důsledek, tautologicky ekvivalentní formule. Binární relace a operace s binárními relacemi. Relace ekvivalence, třídy ekvivalence, faktorová množina. Relace uspořádání. (Y01MLO)

Slovníček pojmů

Výroková logika - Výroková logika je vyjadřovací prostředek matematiky. Základem výrokové logiky je pochopitelně výrok. Výrokem je každá oznamovací věta, u které můžeme určit její pravdivostní hodnotu.

Výrok - Výrok je každé tvrzení, o kterém lze jednoznačně říci, zda je pravdivé či nepravdivé (tj. má určitou pravdivostní hodnotu).

Příklad: „Je horko." je výrokem, ale „Je horko?" nebo „Chci sluníčko!" už výroky nejsou.

- Výroky můžeme dělit na jednoduchý a složený. Za jednoduchý je považován takový výrok, který je dále nedělitelný. Z jednoduchých výroků lze skládat pomocí logických spojek (operací) výroky složené.

Logické spojky - Slouží k vytváření složitějších výroků. Máme těchto 5 základních spojek:

- „není pravda, že"; nazýváme ji negace a značíme ji symbolem $\neg$;

- „a"; nazýváme ji konjukce a značíme ji symbolem $\wedge$;

- „nebo"; nazýváme ji disjunkce a značíme ji symbolem $\vee$;

- „jestliže..., pak"; nazýváme ji implikace a značíme ji symbolem $\Rightarrow$;

- „právě tehdy, když"; nazýváme ji ekvivalence a značíme ji symbolem $\Leftrightarrow$;

Výroková formule
- Definice:
Máme danou neprázdnou množinu A tzv. *elementárních výroků* (též jim říkáme *logické* nebo *výrokové proměnné*). Konečnou posloupnost prvků z množiny A, logických spojek a závorek nazýváme výroková formule (zkráceně jen *formule*), jestliže vznikla podle následujících pravidel:

1. **Každá logická proměnná (zkráceně jen *formule*) $a \in A$ je výroková formule.**
2. **Jsou-li α, β výrokové formule, pak $(\neg\alpha)$, $(\alpha\wedge\beta)$, $(\alpha\vee\beta)$, $(\alpha\Rightarrow\beta)$, $(\alpha\Leftrightarrow\beta)$ jsou též výrokové formule.**
3. **Nic jiného než to, co vzniklo pomocí bodů 1 a 2 není výroková formule.**

Všechny formule, které vznikly z logických proměnných množiny A, značíme $P(A)$.

- Přepis do srozumitelnější podoby:
Posloupnost prvků (vyjádřených výrokovými symboly) nějaké množiny A, logických spojek

(vyjádřených symboly logických spojek) a závorek (vyjádřených pomocnými symboly).

Pravdivostní ohodnocení - je zobrazení u: $P(A) \rightarrow 0,1$, které splňuje následující pravidla:

1. **$\neg\alpha$ je pravdivá právě tehdy, když α je nepravdivá;**
2. **$\alpha \wedge \beta$ je pravdivá právě tehdy, když α a β jsou obě pravdivé;**
3. **$\alpha \vee \beta$ je nepravdivá právě tehdy, když α a β jsou obě nepravdivé;**
4. **$\alpha \Rightarrow \beta$ je nepravdivá právě tehdy, když α je pravdivá a β nepravdivá;**
5. **$\alpha \Leftrightarrow \beta$ je pravdivá právě tehdy, když buď obě formule α a β jsou pravdivé nebo obě nepravdivé**

Poznámka: Vlastnosti pravdivostního ohodnocení můžeme také zobrazit pomocí pravdivostních tabulek logických spojek.

Splnitelná formule - Formule je *splnitelná*, jestliže existuje aspoň jedno pravdivostní ohodnocení, ve kterém je pravdivá.

Tautologie - Taková formule, která je pravdivá ve všech pravdivostních ohodnoceních.

Kontradikce - Taková formule, která je nepravdivá ve všech pravdivostních ohodnoceních.

Sémantický důsledek - Formule φ je konsekventem, též sémantickým nebo tautologickým důsledkem množiny formulí S, jestliže φ je pravdivá v každém ohodnocení *u*, v němž je pravdivá S.
Fakt, že formule φ je konsekventem množiny S, označujeme S ⊨ φ.

Tautologická ekvivalence
- Definice:
Řekneme, že formule φ a ψ jsou *tautologicky ekvivalentní* (také *sémanticky ekvivalentní*), jestliže φ ⊨ ψ a také ψ ⊨ φ.
Fakt, že φ a ψ jsou tautologicky ekvivalentní, označujeme φ ⫤⊨ ψ.

- Přepis do srozumitelnější podoby:
Formule A a B nazveme tautologicky ekvivalentní, pokud platí že jsou si navzájem konsekventem, tedy jejich pravdivostní ohodnocení jsou shodné.

Binární relace - Relace (přesněji *binární relace*) z množiny A do množiny B je libovolná množina uspořádaných dvojic R ⊆ A×B. Jestliže A = B, mluvíme o relaci na množině A.

Operace s relacemi:

- **Podrelace**
- **Průnik**
- **Sjednocení**
- **Doplněk**
- **Inverzní relace**
- **Skládání relací**

Podrelace - Řekneme, že relace R je *podrelací* relace S, jestliže R ⊆ S, tj. je-li a R b, pak také platí a S b.

Množinové operace s relacemi - Mějme dvě relace R a S z množiny A do množiny B. Pak průnikem relací R a S je relace R ∩ S; sjednocením těchto relací je relace R ∪ S; doplňkem relace R je relace Ŕ = (A × B) \ R.

Inversní relace. - Mějme relaci R z množiny A do množiny B. Pak inversní relací k relaci R je relace R^{-1} z množiny B do množiny A definovaná takto:
x R^{-1} y právě tehdy, když y R x.

Skládání relací - Mějme relaci R z množiny A do množiny B a S relaci z množiny B do množiny C. Pak *složená relace R o S* je relace z množiny A do množiny C definovaná předpisem:

a R o S c právě tehdy, když existuje b ∈ B takové, že *a R b* a *b S c*.

Relace na množině - Relace R ⊆ A × A se nazývá relace na množině A.

Vlastnosti relací na množině - Řekneme, že relace R na množině A je

1. reflexivní, jestliže pro všechna a ∈ A platí *a R a*;
2. symetrická, jestliže pro všechna a,b ∈ A platí: je-li *a R b*, pak také *b R a*;
3. antisymetrická, jestliže pro všechna a,b ∈ A platí: je-li *a R b* a *b R a*, pak nutně *a = b*;
4. tranzitivní, jestliže pro všechna a,b,c ∈ A platí: je-li *a R b* a *b R c*, pak nutně *a R c*.

Relace ekvivalence - Relace R na množině A se nazývá ekvivalence, jestliže je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Třídy ekvivalence a faktorová množina - Je dána relace ekvivalence R na množině A. Třídou ekvivalence R odpovídající prvku a ∈ A nazýváme množinu *R[a] = = {b ∈ A | a R b}*. Množinu všech tříd dané ekvivalence, tj. množinu *{R[a] | a ∈ A}* často nazýváme faktorovou množinou podle ekvivalence R a značíme *A/R*.

Uspořádání - Relaci R na množině A nazveme *uspořádání* (*částečné uspořádání*), jestliže je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Formule výrokové logiky

Výroková formule
- Definice:
Máme danou neprázdnou množinu A tzv. *elementárních výroků* (též jim říkáme *logické* nebo *výrokové proměnné*). Konečnou posloupnost prvků z množiny A, logických spojek a závorek nazýváme výroková formule (zkráceně jen *formule*), jestliže vznikla podle následujících pravidel:

1. Každá logická proměnná (zkráceně jen *formule*) $a \in A$ je výroková formule.
2. Jsou-li α, β výrokové formule, pak $(\neg\alpha), (\alpha\wedge\beta), (\alpha\vee\beta), (\alpha\Rightarrow\beta), (\alpha\Leftrightarrow\beta)$ jsou též výrokové formule.
3. Nic jiného než to, co vzniklo pomocí bodů 1 a 2 není výroková formule.

Všechny formule, které vznikly z logických proměnných množiny A, značíme $P\left(A\right)$.

- Přepis do srozumitelnější podoby:
Posloupnost prvků (vyjádřených výrokovými symboly) nějaké množiny A, logických spojek (vyjádřených symboly logických spojek) a závorek (vyjádřených pomocnými symboly).

TODO Dopsat priklady co je a neni formule

Derivační strom formule (strom formule)

Je to kořenový strom formule, kde každý vrchol, který není listem je ohodnocen logickou spojkou a jedná-li se o binární spojku, má vrchol dva následníky, jedná-li se o unární spojku, má vrchol pouze jednoho následníka. Přitom pro formule tvaru (α ∧ β), (α ∨ β), (α ⇒ β) odpovídá levý následník formuli α, pravý následník formuli β. Listy stromu jsou ohodnoceny logickými proměnnými.

Hloubka formule

je definována jako výška stromu této formule.

Příklad

Znázorněte derivační strom formule:

$\left(x \Rightarrow y\right) \Rightarrow \left[\left(\neg x \vee y\right) \wedge \left(y \Rightarrow \neg x\right)\right]$

```
              ⇒               0
             / \
            /   \
           /     \
          /       \
         ⇒         ∧          1
        / \       /  \
       /   \     /    \
      x     y   ∨      ⇒      2
               / \    / \
              /   \  /   \
             ¬     y y    ¬   3
             |            |
             |            |
             x            x   4
```

Hloubka tohoto stromu je 4.

Poznámka:
Hloubka derivačního stromu logické proměnné je 0.

Pravdivostní ohodnocení

Definice:

Pravdivostní ohodnocení je zobrazení u: $P\left(A\right) \rightarrow 0,1$, které splňuje následující pravidla:

1. $\neg\alpha$ **je pravdivá právě tehdy, když α je nepravdivá;**
2. $\alpha \wedge \beta$ **je pravdivá právě tehdy, když α a β jsou obě pravdivé;**
3. $\alpha \vee \beta$ **je nepravdivá právě tehdy, když α a β jsou obě nepravdivé;**
4. $\alpha \Rightarrow \beta$ **je nepravdivá právě tehdy, když α je pravdivá a β nepravdivá;**

5. $\alpha \Leftrightarrow \beta$ **je pravdivá právě tehdy, když buď obě formule α a β jsou pravdivé nebo obě**

Poznámka: Vlastnosti pravdivostního ohodnocení můžeme také zobrazit pomocí pravdivostních tabulek logických spojek:

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Příklady

Př. 1.: Sestrojte pravdivostní tabulku a rozhodněte, zda jde o tautologii:

a) (x ∨ y) ⇔ (y ⇒ x)

1. Uděláme pravdivostní tabulku nejdříve pro x,y

x	y
0	0
0	1
1	0
1	1

2. Pak pro obě formule (x ∨ y), (y ⇒ x)

x	y	$x \vee y$	$y \Rightarrow x$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

3. nakonec pro ekvivalenci obou formulí

x	y	$x \vee y$	$y \Rightarrow x$	$(x \vee y) \Leftrightarrow (y \Rightarrow x)$
0	0	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Tautologie to není, protože v posledním sloupci nejsou samé jedničky.

Př. 2.: Ve kterých ohodnoceních u je formule pravdivá?

a) x ∧ (y ⇒ (z ∨ x))

1. Vytvoříme zase tabulku pravdivostních hodnot pro x, y, z:

x	y	z

0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

2. Pak pro všechny formule:

x	y	z	$z \vee x$	$y \Rightarrow (z \vee x)$	$x \wedge \left(y \Rightarrow (z \vee x) \right)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Formule je pravdivá pro všechna u(x) = 1.

Př. 3.: Zjistěte, zda je formule tautologie, kontradikce nebo splnitelná formule

a) (x ⇒ (x ⇒ y)) ⇒ y

1. Tabulka pravdivostních hodnot pro x, y:

x	y
0	0
0	1
1	0
1	1

2. Pro všechny formule:

x	y	$x \Rightarrow y$	$x \Rightarrow (x \Rightarrow y)$	$\left(x \Rightarrow (x \Rightarrow y) \right) \Rightarrow y$
0	0	1	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Jedná se o splnitelnou formuli, která není tautologií.

b) [(x ∧ y) ∨ (¬x ∧ ¬y)] ⇔ [(¬x∨ ¬y) ∧ (x ∨ y)]

Kompletní tabulka:

x	y	$\neg x$	$\neg y$	$x \wedge y$	$\neg x \wedge \neg y$	$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$	$\neg x \vee \neg y$	$x \vee y$	$(\neg x \vee \neg y) \wedge (x \vee y)$	*celá formule*
0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0

Formule je kontradikce, protože není pravdivá ani v jednom ohodnocení.

Splnitelné formule

Definice

Formule je splnitelná, jestliže existuje aspoň jedno pravdivostní ohodnocení, ve kterém je pravdivá.

Příklady

Splnitelná formule je např. množina $p \wedge q, p \Rightarrow q$

Nesplnitelná formule je např. množina $p, \neg p$

Př. 1.: Je množina formulí M splnitelná nebo nesplnitelná?

M = {a∨¬b, b∧¬a, b⇒a}

Postup:
Sestrojíme tabulku pravdivostních ohodnocení pro všechny formule. Pokud bude existovat aspoň jeden řádek, ve kterém budou u formulí samé jedničky, je množina formulí splnitelná. Takže:

1. Pravdivostní tabulka pro všechny proměnné

a	b	$\neg a$	$\neg b$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0

2. Dál do tabulky nabombíme formule a jejich pravdivostní ohodnocení

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \vee \neg b$	$b \wedge \neg a$	$b \Rightarrow a$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1

Jak vidíme, neexistuje jediný řádek, ve kterém jsou pro každou formuli samé jedničky, proto je množina formulí nesplnitelná.

Př. 2: Je množina M splnitelná? Rozhodněte, zda M |= φ

$$M = (y \wedge z) \Rightarrow \neg x ; \neg y \wedge x ; z \Rightarrow x ; (z \wedge \neg x) \Leftrightarrow y , \varphi = \neg z \Leftrightarrow x$$

Postup: Nejdříve musíme zjistit, zda je množina M splnitelná. Pokud splnitelná bude, můžeme zjišťovat, zda je φ konsekventem množiny M.

1. Pravdivostní tabulka pro všechny proměnné

x	y	z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

2. Pokračujeme formulemi a jejich pravdivostními ohodnoceními **První a poslední formuli si rozdělíme, aby se nám pravdivostní ohodnocení lépe počítalo**

x	y	z	$\neg x$	$\neg y$	$y \wedge z$	$(y \wedge z) \Rightarrow \neg x$	$\neg y \wedge x$	$z \Rightarrow x$	$z \wedge \neg x$	$(z \wedge \neg x) \Leftrightarrow y$
0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0

Množina je splnitelná. V 5. a 6. řádku jsou všechny formule z množiny M pravdivé.

M |= φ?
Zjišťujeme, zda je formule $\neg z \Leftrightarrow x$ pravdivá pro všechna ohodnocení, kde je pravdivá také množina M. Množina M je pravdivá pro následující proměnné:

x	y	z
1	0	0
1	0	1

Pro tato pravdivostní ohodnocení utvoříme pravdivostní ohodnocení formule $\neg z \Leftrightarrow x$:

x	y	z	$\neg z$	$\neg z \Leftrightarrow x$
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0

V posledním sloupci nejsou samé jedničky, takže φ není konsekventem množiny formulí M.

Tautologie

Definice

Tautologie je taková formule, která je pravdivá ve všech pravdivostních ohodnoceních.

Příklady

Viz sekce „Pravdivostní ohodnocení“

Kontradikce

Definice

Kontradikce je taková formule, která je nepravdivá ve všech pravdivostních ohodnoceních.

Příklady

Viz sekce „Pravdivostní ohodnocení“

Sémantický důsledek

Definice

Formule φ je konsekventem, též sémantickým nebo tautologickým důsledkem množiny formulí S, jestliže φ je pravdivá v každém ohodnocení *u*, v němž je pravdivá S.
Fakt, že formule φ je konsekventem množiny S, označujeme S ⊨ φ.

Příklady

Platí následující konsekventy?

a) {α⇒β, β⇒γ} ⊨ α⇒γ;

Postup je myslím jasný, sestrojíme opět tabulku nejdříve pro α, β, γ, pak pro jednotlivé formule.

α	β	γ	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\beta \Rightarrow \gamma$	$\alpha \Rightarrow \gamma$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Ano, formule $\alpha \Rightarrow \gamma$ *je konsekventem*, protože formule je pravdivá ve všech ohodnoceních, ve kterých je množina $\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma$ pravdivá.

b) {α⇒β, α∨¬β} ⊨ ¬α;

α	β	$\neg\beta$	$\alpha\Rightarrow\beta$	$\alpha\vee\neg\beta$	$\neg\alpha$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0

Množina je pravdivá v 1. a 4. řádku. Formule $\neg\alpha$ je pravdivá pouze v 1. a 2. řádku.

Formule $\neg\alpha$ tak *není konsekventem*, protože není pravdivá ve všech ohodnoceních, ve kterých je množina $\alpha\Rightarrow\beta, \alpha\Rightarrow\neg\beta$ pravdivá.

c) {(α∧β)⇒γ, (α∧¬β)⇒γ} ⊨ α⇒γ;

α	β	γ	$\alpha\wedge\beta$	$(\alpha\wedge\beta)\Rightarrow\gamma$	$\neg\beta$	$\alpha\wedge\neg\beta$	$(\alpha\wedge\neg\beta)\Rightarrow\gamma$	$\alpha\Rightarrow\gamma$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0	1	1

Formule $\alpha\Rightarrow\gamma$ *je konsekventem*, protože formule je pravdivá ve všech ohodnoceních, ve kterých je množina $(\alpha\wedge\beta)\Rightarrow\gamma, (\alpha\wedge\neg\beta)\Rightarrow\gamma$ pravdivá.

Tautologická ekvivalence

Definice

Řekneme, že formule φ a ψ jsou *tautologicky ekvivalentní* (také *sémanticky ekvivalentní*), jestliže φ ⊨ ψ a také ψ ⊨ φ.
Fakt, že φ a ψ jsou tautologicky ekvivalentní, označujeme φ ⊨⊣ ψ.

Základní ekvivalentní formule:

α, β, γ jsou formule.

$\neg\neg\alpha \models\dashv \alpha;$

$(\alpha\wedge\alpha) \models \alpha; (idempotence \wedge a \vee)$
$(\alpha\vee\alpha) \models \alpha; (idempotence \wedge a \vee)$

$(\alpha\wedge\beta) \vdash (\beta\wedge\alpha); (komutativita \wedge a \vee)$

$$\left(\alpha \vee \beta\right) \vDash \left(\beta \vee \alpha\right); \left(\textit{komutativita} \wedge a \vee\right)$$

$$\left(\alpha \wedge \beta\right) \wedge \gamma \vDash \alpha \wedge \left(\beta \wedge \gamma\right); \left(\textit{asociativita} \wedge a \vee\right)$$
$$\left(\alpha \vee \beta\right) \vee \gamma \vDash \alpha \vee \left(\beta \vee \gamma\right); \left(\textit{asociativita} \wedge a \vee\right)$$

$$\alpha \wedge \left(\beta \vee \alpha\right) \vDash \alpha; \left(\textit{absorpce} \wedge a \vee\right)$$
$$\alpha \vee \left(\beta \wedge \alpha\right) \vDash \alpha; \left(\textit{absorpce} \wedge a \vee\right)$$

$$\left(\alpha \Rightarrow \beta\right) \vDash \left(\neg \alpha \vee \beta\right);$$

$$\left(\alpha \Leftrightarrow \beta\right) \vDash \left(\alpha \Rightarrow \beta\right) \wedge \left(\beta \Rightarrow \alpha\right);$$

$$\neg \left(\alpha \wedge \beta\right) \vDash \left(\neg \alpha \vee \neg \beta\right); \left(\textit{de Morganovo pravidlo}\right)$$
$$\neg \left(\alpha \vee \beta\right) \vDash \left(\neg \alpha \wedge \neg \beta\right); \left(\textit{de Morganovo pravidlo}\right)$$

Binární relace

Definice

Relace (přesněji *binární relace*) z množiny A do množiny B je libovolná množina uspořádaných dvojic R ⊆ A×B. Jestliže A = B, mluvíme o relaci na množině A.

Příklady

Příklad 1

Pokud máme množinu *A* - všechny holky, množinu *B* - všichni kluci, tak relaci *R* mohou tvořit všechny dvojice kluků a holek, které spolu někdy chodili.

Příklad 2

Máme množinu *A* obsahující prvky 1, 2, 3 a množinu *B* obsahující prvky 2, 3, 4, a chceme nalézt relaci, ve které se budou prvky z obou množin rovnat. To znamená, že hledáme takové dvojice prvků, které jsou zastoupeny v obou množinách. Výsledná binární relace tedy bude obsahovat dvě dvojice a to *(2, 2)* a *(3, 3)*. Žádný jiný prvek tam patřit nebude - třeba *(1, 4)* sice představuje dvojici, kde první prvek je z množiny *A* a druhý z množiny *B*, ale dohromady nesplňují to dané pravidlo (rovnosti) a proto tam nepatří.

Konvence zápisu

Standardní zápis by byl *(x, y)* ∈ *R*. Protože to je ale zdlouhavé, tak se používá kratší a čitelnější zápis *xRy*, který znamená to samé.

Operace s relacemi

Operace s relacemi:

- **Podrelace**
- **Průnik**
- **Sjednocení**
- **Doplněk**
- **Inverzní relace**
- **Skládání relací**

Podrelace

Definice

Řekneme, že relace R je *podrelací* relace S, jestliže R ⊆ S, tj. je-li a R b, pak také platí a S b.

Příklad

Příkladem může být třeba relace S - být menší číslo, a relace R - být menší nebo rovno. Relace S by pak byla podrelací R.

Množinové operace s relacemi

Definice

Mějme dvě relace R a S z množiny A do množiny B. Pak průnikem relací R a S je relace R ∩ S; sjednocením těchto relací je relace R ∪ S; doplňkem relace R je relace Ŕ = (A × B) \ R.

Inversní relace

Definice

Mějme relaci R z množiny A do množiny B. Pak inversní relací k relaci R je relace R^{-1} z množiny B do množiny A definovaná takto:
x R^{-1} ***y*** **právě tehdy, když *y R x*.**

Příklady

Máme relaci R „je menší“ na množině reálných čísel. Do této relace tedy patří všechny dvojice (x,y) kde je $x<y$. Do inverzní relace R^{-1} patří všechny dvojice, které splňují yRx, což jsou všechny dvojice, kde je $y<x$.

Skládání relací

Definice

Mějme relaci R z množiny A do množiny B a S relaci z množiny B do množiny C. Pak *složená relace R o S* je relace z množiny A do množiny C definovaná předpisem:

a R o S c **právě tehdy, když existuje *b* ∈ *B* takové, že *a R b* a *b S c*.**

Příklad

Nechť *R* je množina reálných čísel a $S \subseteq R \times R$ je binární relace definována následovně:

$S = \{(x,y) \in R^2 \mid x+y=1\}$. Jinými slovy je relace *S* definována takto: *x S y* právě tehdy, když *x+y=1*.

Zkusíme pro názornost složit relaci *S* sama se sebou tedy: *S o S*

Máme dvě relace, pro první platí, že x+y=1, pro druhou, že y+z=1.

Pokud dosadíme do rovnosti, vyjde nám $x+y=y+z \Rightarrow x=z$, tudíž relace

***S o S* lze zapsat:**

$S \circ S = \{(x,y) \in R^2 \mid x=y\}$ (tzn. prvky jsou v relaci, pokud se rovnají).

Relace ekvivalence

Definice

Relace ekvivalence - Relace R na množině A se nazývá ekvivalence, jestliže je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Vlastnosti relací na množině - Řekneme, že relace R na množině A je

1. **reflexivní, jestliže pro všechna a ∈ A platí *a R a*;**
2. **symetrická, jestliže pro všechna a,b ∈ A platí: je-li *a R b*, pak také *b R a*;**
3. **antisymetrická, jestliže pro všechna a,b ∈ A platí: je-li *a R b* a *b R a*, pak nutně *a* = *b*;**
4. **tranzitivní, jestliže pro všechna a,b,c ∈ A platí: je-li *a R b* a *b R c*, pak nutně *a R c*.**

Příklady

Příklad 1

„Rovná se" na množině reálných čísel je ekvivalence, protože pro všechna reálná čísla x platí $x=x$ (reflexivní), pokud $x=y$, tak se i $y=x$ (symetrická), pokud $x=y$ a $y=z$, pak se $x=z$ (tranzitivní).

Příklad 2

Mějme relaci xRy právě tehdy, když x, y jsou obě sudá čísla nebo x, y jsou obě lichá čísla. Relace je reflexivní, protože určitě platí xRx. Symetrická je taky, protože pokud platí xRy, pak platí, že x, y jsou buď jedno nebo druhé, pak při přehození (yRx) se nic nezmění. Tranzitivní je také, takže se jedná o ekvivalenci.

Třídy ekvivalence a faktorová množina

Definice

Je dána relace ekvivalence R na množině A. Třídou ekvivalence R odpovídající prvku a ∈ A nazýváme množinu *R[a]* = = *{b ∈ A | a R b}*.

Množinu všech tříd dané ekvivalence, tj. množinu *{R[a] | a* ∈ *A}* často nazýváme faktorovou množinou podle ekvivalence R a značíme *A/R*.

Příklady

Příklad na třídu ekvivalence

Mějme relaci xRy právě tehdy, když x, y jsou obě sudá čísla nebo x, y jsou obě lichá čísla - stejnou jako v předchozím příkladu. Třída ekvivalence k číslu $x=3$ je množina všech čísel x pro která platí $3Rx$, což jsou všechna lichá čísla. Stejnou třídu ekvivalence bude mít například číslo 5. Pro číslo 2 bude třída ekvivalence množina všech sudých čísel. Tato relace má celkem dvě třídy ekvivalence - množinu všech sudých čísel a množinu všech lichých čísel.

Příklad na faktorovou množinu

Mějme relaci xRy právě tehdy, když x, y jsou obě sudá čísla nebo x, y jsou obě lichá čísla - stejnou jako v předchozím příkladu. V tom jsme dospěli k tomu, že tato relace má dvě třídy ekvivalence - množinu všech sudých čísel {2, 4, 6, 8, ...} a množinu všech lichých čísel {1, 3, 5, 7, ...}. Faktorová množina je množina všech tříd dané ekvivalence, tj. by se jednalo o množinu o dvou prvcích - množině sudých čísel a množině lichých čísel. Faktorová množina by byla $F=\left(\left(2,4,6,\ldots\right),\left(1,3,5,\ldots\right)\right)$

Relace uspořádání

Definice

Relaci R na množině A nazveme *uspořádání* (*částečné uspořádání*), jestliže je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Příklad

Relace „je menší nebo rovno“.
Ověření:
Je reflexivní, protože všechny čísla jsou si sobě rovny: 2 ≤ 2
Je antisymetrická, protože pokud x je menší nebo rovno y a y je menší nebo rovno x , pak se $x=y$. Je tranzitivni, pokud x je menší nebo rovno y a y je menší nebo rovno z , pak nutně x je menší nebo rovno z .

Zdroje

Skripta:

Matematická logika - Marie Demlová

Velmi jemný úvod do matematické logiky - Jiří Velebil

Odkazy:

Slidy z předmětu Matematická logika [http://www2.cs.cas.cz/~horcik/Teaching/mlo.html]

spolecne/spol5.txt · Poslední úprava: 2010/06/14 06:01 autor: O.Zavadil