Otázka č. 4

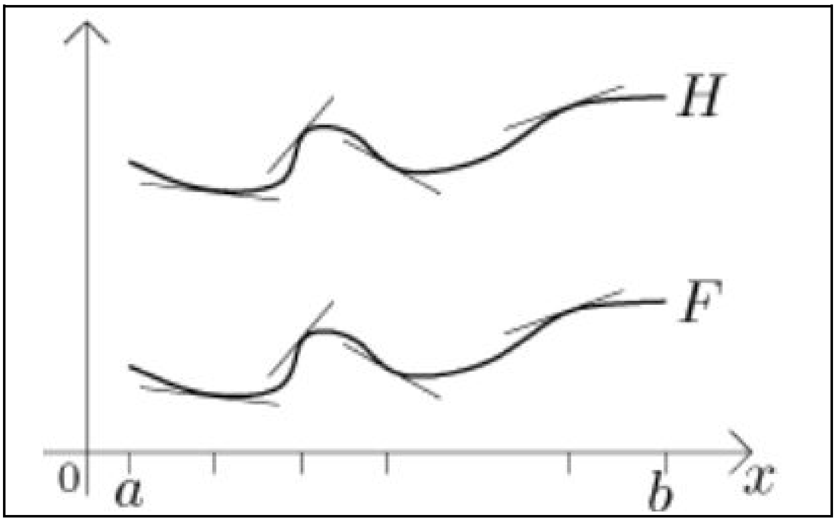
Primitivní funkce, určitý integrál. Metody výpočtu : substituce a per partes. Užití a výynam integrálu. Násobný integrál pro funkce více proměnných

Primitivní funkce, neurčitý integrál (Newtonův integrál)

Nechť f je funkce, jejíž definiční obor obsahuje interval *(a,b)*. Funkce $F : (a,b) \rightarrow R$ se nazývá primitivní funkce k funkci f na intervalu (a,b), právě když platí

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in (a,b)$$

Otázku jednoznačnosti primitivní funkce k dané funkci f zodpovídá věta :
V1 : Každé dvě primitivní funkce funkce F,H k funkci f na intervalu *(a,b)* se liší o reálnou konstantu c, t.j. :



$$H(x) = F(x) + c$$

kde F je určitá primitivní funkce k funkci f na intervalu *(a,b)* značíme symbolem $\int f(x)dx$ zvaným neurčitý integrál (základní integrál / Newtonův integrál) funkce f, píše se :

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

F → je určitá primitivní funkce k f
c → je libovolná reálná konstanta, integrační konstanta
f → je integrovaná funkce nebo integrand
x (argument) → integrační proměnná

Jestliže existuje primitivní funkce k funkci f na daném intervalu *(a,b)*, tak musí platit tahle věta :
V2 : Nechť funkce f je spojitá na intervalu *(a,b)*, pak k ní na *(a,b)* existuje primitivní funkce.

NĚCO MÁLO Z HABALOVÝCH STRÁNEK :

Definice.
Nechť f je funkce definovaná na intervalu I. Řekneme, že funkce F na I je **primitivní funkcí** k f na I, jestliže F je spojitá na I a $F'(x) = f(x)$ pro všechna x z vnitřku I^O intervalu I.
Pokud taková primitivní funkce na I existuje, pak říkáme, že f je **(Newtonovsky) integrovatelná** na I.
Příklad: Funkce $F(x)=3x-1$ je primitivní funkce k $f(x)=3$ na intervalu $(0,13\rangle$.
Tohle je jednoduché, F je zjevně spojitá na celé reálné ose, takže je také spojitá na $(0,13\rangle$. Pro body z $(0,13)=(0,13\rangle^O$ také platí $[3x-1]'=3$, přesně jak je třeba.

Podobně ověříme, že také $G(x)=3x+7$ je primitivní funkcí k $f(x)=3$ na $(0,13\rangle$. Po pravdě řečeno, tyto dvě funkce jsou primitivní funkce k 3 na libovolném intervalu, typicky bychom uvažovali otevřené nebo uzavřené intervaly. Ten polouzavřený v příkladě byl spíš výjimkou, abychom ukázali, že to také jde.

Vzorce pro integrování základních elementárních funkcí

1. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad x > 0, n \in \mathbf{R}, n \neq -1.$
2. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$
3. $\int e^x \, dx = e^x + C.$
4. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1.$
5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$
6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$
7. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + C, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}.$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$
9. $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C_1 = -\operatorname{arccotg} x + C_2.$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2, \quad x \in (-1, 1).$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \, dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a}\right) + C, \quad a > 0.$
12. $\int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$
13. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)|.$

Integrační metody

Věta Existují-li k funkcím $f_1(x), f_2(x), f(x)$ primitivní funkce, pak

1. $\int (f_1(x) \pm f_2(x)) \, dx = \int f_1(x) \, dx \pm \int f_2(x) \, dx.$
2. $\int k \cdot f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx, \quad$ kde k je konstanta.

Příklady výpočtu neurčitých integrálu

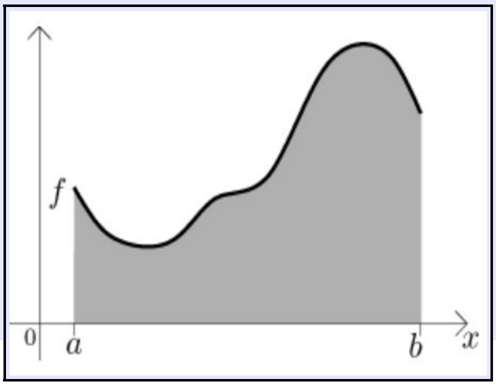
Pr1 :
$\int(x^3 - 6x^2 + 5x - 4)dx = \int x^3\, dx - 6 \int x^2\, dx + 5 \int x\, dx - 4\int dx = x^4/4 - 6.\ x^3/3 + 5.\ x^2/2 - 4x + c =$
$= x^4/4 - 3\ x^3 + 5.\ x^2/2 - 4x + c,\ x \in (-\infty,+\infty)$

Pr2 :
$\int(2 - \sqrt{x})^2\, dx = \int(4 - 4\sqrt{x} + x)\, dx = 4\int dx - 4\int x^{1/2}\, dx + \int x\, dx = 4x - x^{1/2}/(3/2) + x^2/2 + c,\ x \in <0,+\infty)$

POZN. : nezapomínat na podmínky!

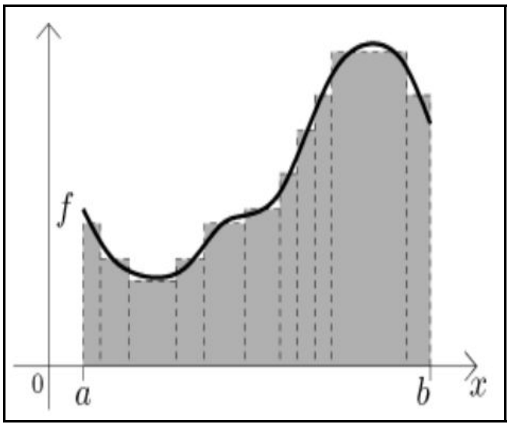
Určitý integrál (Riemannův integrál)

Motivace : meření obsahu plochy pod grafem funkce.



Nechť f je funkce definovaná na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$. Pro jednoduchost si představíme, že f je spojitá a kladná. Pak má smysl uvažovat oblast mezi osou x a grafem f.

Pokud se nám nějak podaří najít obsah této oblasti, budeme tomu číslu říkat **určitý integrál** z f od a do b.



Určení obsahu se dá zkusit mnoha způsoby, ale podle toho, jaké má funkce f vlastnosti, to může být velmi těžké či dokonce nemožné. My zde použijeme Riemannův přístup. Je založen na jednoduchém postřehu, že snadno spočítáme obsah obdélníka. Budeme se tedy snažit aproximovat oblast pod grafem f pomocí vhodných obdélníků.

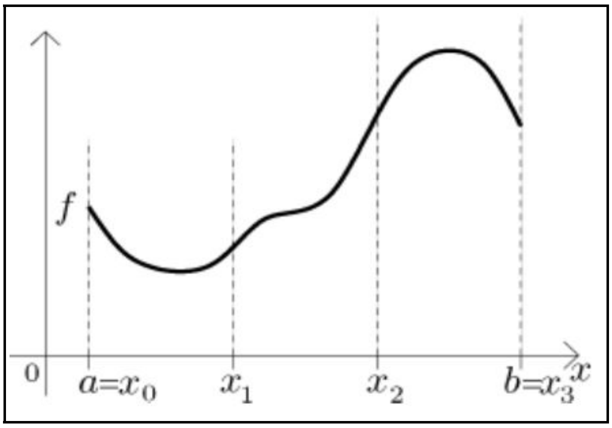
Z obrázku se zdá, že pokud bychom udělali ty obdélníky extrémně úzké, byla by chyba aproximace velice malá. Pokud tedy budeme zkoušet užší a užší obdélníky, při troše štěstí budou tyto aproximované obsahy konvergovat k nějakému číslu, jmenovitě ke skutečnému obsahu oblasti pod grafem f. Tento postup selže, pokud se při zužování obdélníků nebudou zmenšovat chyby aproximace; toto závisí na tvaru f, opravdu divoké funkce vedou k podivným oblastem a někdy ani nemá smysl mluvit o jejich obsahu.

Teď se pokusíme naše úvahy udělat přesně.

Šířky obdélníků jsou určeny, když interval $\langle a,b\rangle$ rozdělíme na menší části. Používáme k tomu pojmu *dělení*:

Definice.
Uvažujme uzavřený interval $\langle a,b\rangle$. **Dělením** intervalu $\langle a,b\rangle$ rozumíme libovolnou konečnou množinu $P=\{x_0, x_1,..., x_N\}$ bodů z $\langle a,b\rangle$ splňujících podmínku $a = x_0 < x_1 < . . . < x_N = b$.

Uvažujme nějakou omezenou funkci *f* definovanou na intervalu ⟨*a*,*b*⟩. Když zvolíme nějaké dělení, interval ⟨*a*,*b*⟩ se rozpadne na *N* částí, které určí svislé strany aproximujících obdélníků:



Teď se musíme rozhodnout, jaké budou jejich výšky. Na to je několik metod, zde použijeme tu, se kterou se nejjednodušeji pracuje. Abychom se pojistili, zkusíme prostě ty největší a nejmenší možné (a rozumné) obdélníky, čímž dostaneme ***horní součet*** a ***dolní součet***:

Definice.
Nechť *f* je omezená funkce definovaná na uzavřeném intervalu ⟨*a*,*b*⟩. Je-li dáno dělení *P* intervalu ⟨*a*,*b*⟩, pro *k* = 1,...,*N* označme

$$\boxed{\begin{aligned} M_k &= \sup\{f(t);\ x_{k-1} \le t \le x_k\}, \\ m_k &= \inf\{f(t);\ x_{k-1} \le t \le x_k\}. \end{aligned}}$$

Pak definujeme **horní součet** příslušný dělení *P* vzorcem

$$\boxed{U(f,P) = \sum_{k=1}^{N} M_k \cdot (x_k - x_{k-1}).}$$

Podobně definujeme **dolní součet** příslušný dělení *P*:

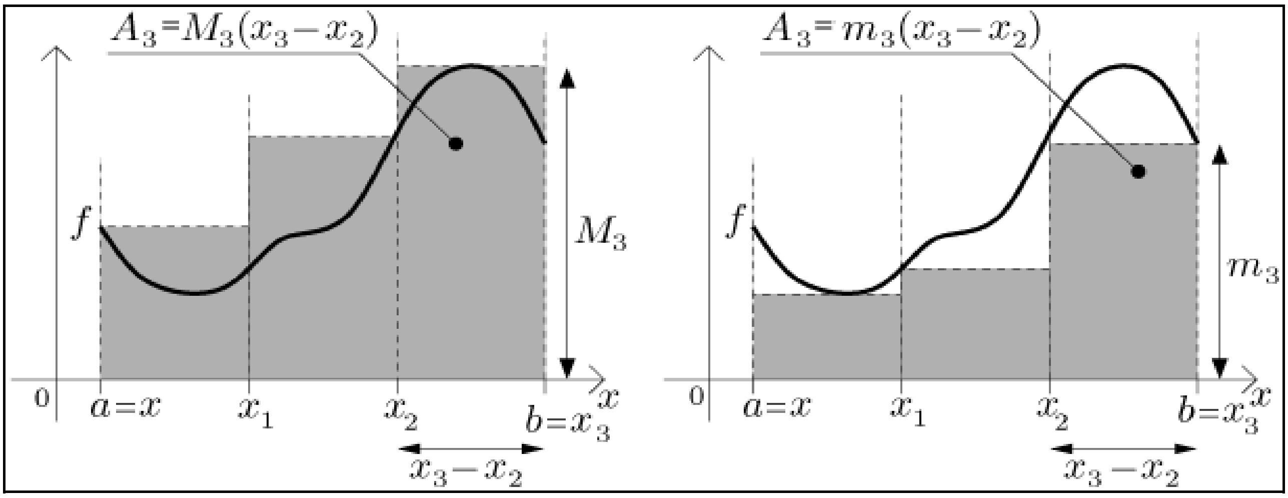
$$\boxed{L(f,P) = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}).}$$

Značení *U* a *L* zde použité není standardní → jedná se o informace ze stránek prof. Habalu.

Vysvětlení značení : V české literatuře se pro součty používá různých značení (například *S* podtržené nahoře a dole či znak integrálku s čárkou nahoře a dole atd.), "správné" značení tedy neexistuje. Zde zvolené označení jsme vybrali s ohledem na rozšířené symboly v anglické literatuře (upper/lower sum), už proto, aby čtenář nebyl zmaten, pokud se rozhodne podívat do anglické verze těchto stránek – http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/1/txc3da1a.htm.

Povšimněte si, že ona suprema a infima vždy existují a jsou konečná díky omezenosti funkce *f*, takže součty jsou dobře definovány. V obou případech vlastně sčítáme obsahy obdélníků. Jejich základny jsou dány dělením, výšky pak supremem či infimem *f* v jednotlivých obdélnících.

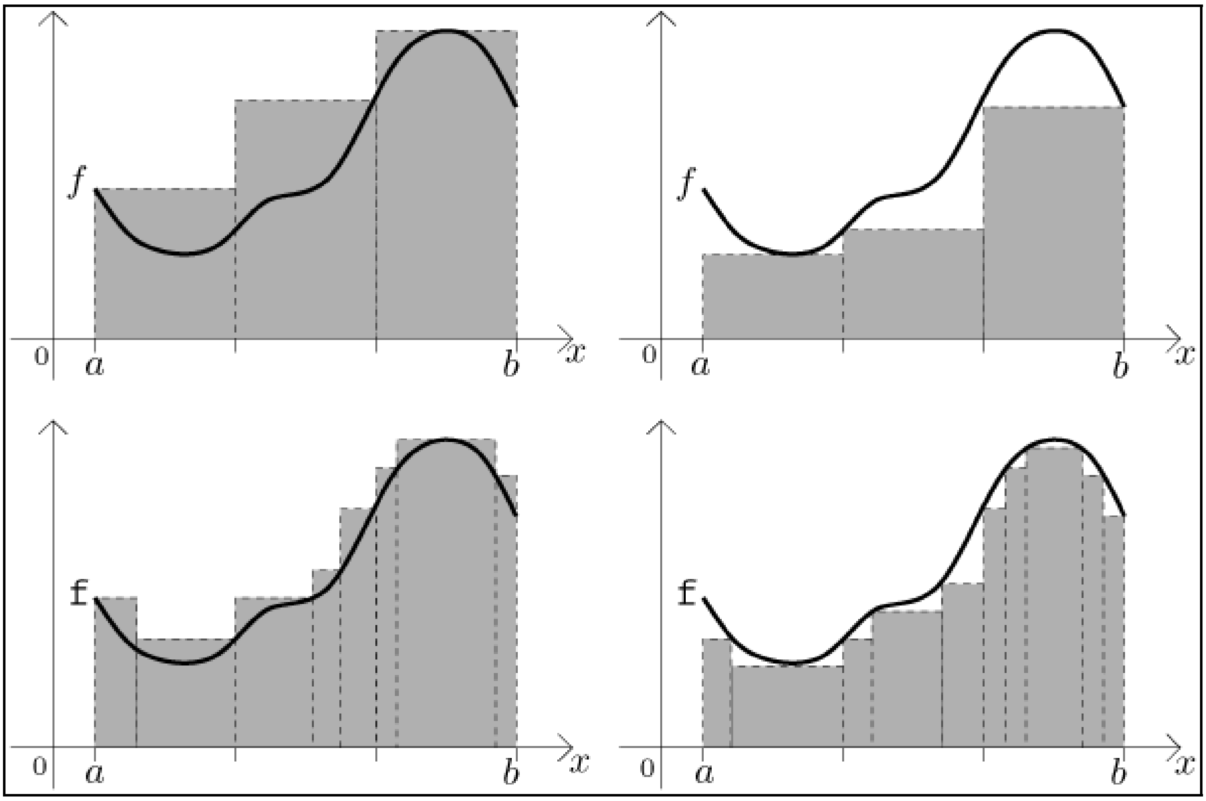
Horní i dolní součet je znázorněn na následujícím obrázku. Šrafovaná plocha nalevo je horní součet, napravo dolní součet. V grafech jsme také označili některé výrazy použité při výpočtu obsahu třetího obdélníka.



Pokud označíme skutečný obsah oblasti pod grafem *f* jako *A* (doufajíce, že obsah existuje), pak se z obrázku zdá zřejmé, že

$$L(f, P) \leq A \leq U(f, P).$$

Abychom našli hodnotu *A*, budeme měnit obdélníky takovým způsobem, aby se horní součet zmenšoval a dolní součet zvětšoval, dokud se nebudou skoro rovnat. Protože skutečný obsah je vždy mezi horním a dolním součtem, rovnost součtů znamená, že jsme určili *A*. Změny obdélníků budou mít formu jejich zužování. U užších obdélníků je i menší chyba aproximace, což znamená, že se bude horní součet zmenšovat (a tedy přibližovat k *A*) a dolní součet se bude zvětšovat (a přibližovat k *A*). Srovnejte na následujícím obrázku chybu aproximace horního a dolního součtu při zjemnění dělení.



Výhodou přístupu použitím horních a dolních součtů je, že nás nemusí zajímat, jak se vlastně to zužování obdélníků přesně dělá, všechny detaily jsou chytře schovány v následující definici. Bohužel, tento Riemannův přístup přes obdélníky funguje, jen pokud je funkce *f* dostatečně pěkná, říkáme *Riemannovsky integrovatelná*. Přesně řečeno:

Definice.
Nechť f je omezená funkce definovaná na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$. Řekneme, že f je **Riemannovsky integrovatelná** na $\langle a,b\rangle$, jestliže infimum horních součtů přes všechna dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ je rovno supremu dolních součtů přes všechna dělení $\langle a,b\rangle$.

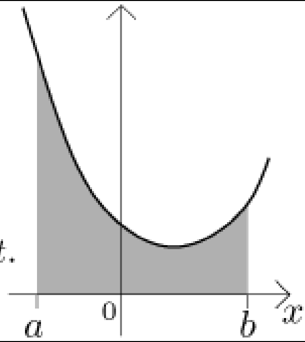
Pak definujeme **Riemannův určitý integrál** funkce f od a do b jako

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \inf_P \{U(f,P)\}.}$$

Obvykle říkáme prostě **Riemannův integrál**, rozumí se, že se tím míní určitý integrál. Protože pro Riemannovsky integrovatelné funkce se infimum horních součtů rovná supremu dolních součtů, mohli jsme toho druhého rovněž použít k definici Riemannova integrálu.

Tomu hadovitému tvaru se říká **integrační symbol**, je to vlastně prodloužené S (jako *suma*). Integrované funkci se někdy říká **integrand**. Máme zde **dolní mez** a a **horní mez** b, které určují integrační interval $\langle a,b\rangle$. Proměnné x se říká **integrační proměnná** a vlastně na ní nezáleží. Protože Riemannův integrál je chápán jako obsah pod grafem f, jediná důležitá informace je tvar grafu. Pokud se tedy rozhodneme použít ve témže vzorci jinou proměnnou, tvar grafu a tedy i integrál zůstanou stejné. Takže například

$$\int_a^b x^2 - x + 1\,dx = \int_a^b y^2 - y + 1\,dy = \int_a^b t^2 - t + 1\,dt.$$



Zdá se to zřejmé, plocha pod tímtéž kouskem dané paraboly je vždy stejná, ať už k vodorovné ose připíšeme jakékoliv písmenko.

Symbol dx je **diferenciál** proměnné x.

V definici jsme použili menší mez (levý konec intervalu) jako dolní mez integrálu. Někdy ovšem potřebujeme "integrovat pozpátku", od b k a. Často prostě jen potřebujeme napsat integrál, aniž bychom se museli zabývat pořadím mezí, takže potřebujeme obecnější definici. Vypadá takto: Nechť $a < b$. Definujeme

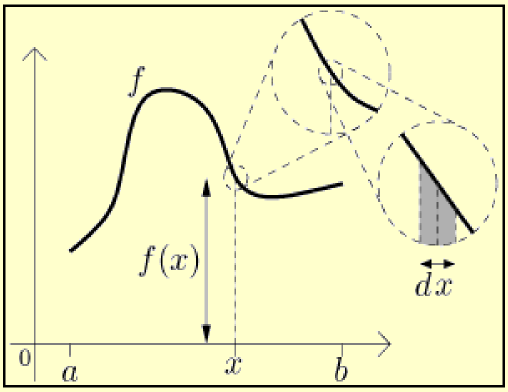
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Když teď umíme integrovat s libovolným pořadím mezí, tato formulka se stává obecným vzorcem: Můžeme kdykoliv prohodit integrační meze, pokud zároveň přidáme před integrál mínus.

PRO ZAJÍMAVOST JAK NA dx ? Dobré projít, není ale až tak podstatné spíš ze zajímavosti, nebo více vysvětlí :

Teď uvedeme differenciál *dx*, což je nekonečně malý kousek osy *x* (ale jeho délka přesto není nulová). Samozřejmě taková věc vůbec neexistuje, krása této myšlenky je ovšem v tom, že když se používá opatrně, tak se zdá, že funguje; co je důležitější, když se při přemýšlení o matematických myšlenkách používá *dx*, tak často vypadají mnohem přirozeněji a jednodušeji. To je také důvod, proč většina matematiků, i když dobře ví, že žádné nekonečně malé kousky osy *x* neexistují, stejně používá pojmu *dx* při přemýšlení nad problémy. Samozřejmě, když tak přijdou k nějakému závěru, tak to musí být korektně zkontrolováno a dokázáno. My teď aplikujeme přístup pomocí *dx* na určitý integrál.

Protože je *dx* nekonečně malé, každý opravdický obdélník bude širší než obdélník šířky *dx*. Obdélník šířky *dx* je tedy ten nejužší obdélník, jinými slovy, chyba aproximace bude zanedbatelná. To je mimo jiné dáno tím, že každý kousek grafu *f* o šířce *dx* je tak malý, že můžeme předpokládat (aniž bychom dělali chybu), že je to kousek přímky. Pokusíme se to ukázat na obrázku, kde zvětšíme kousíček grafu:



Oblast pod tímto kouskem je tedy přesně lichoběžník (vodorovná základna na ose *x*, svislé strany, přímka na horní straně). Jeho obsah se spočítá vynásobením základny *dx* výškou měřenou uprostřed, což je *f*(*x*). Abychom získali celkový obsah, jednoduše sečteme obsahy všech lichoběžníků:

$$\boxed{A = \sum_{x=a}^{x=b} f(x) \cdot dx.}$$

Tato suma samozřejmě nemá smysl (což by nemělo překvapit vzhledem k tomu, že jsme začali představením neexistujícího nekonečně malého kousku osy *x*). Proč ne? Když rozdělíme oblast pod grafem na pruhy o nekonečně malé šířce, kolik jich bude? Odpověď je zřejmá: nekonečně mnoho. A nejen to, lichoběžníků je dokonce nespočetně mnoho a proto nevíme, jak vlastně sčítat všechny jejich obsahy, my umíme sčítat jen konečně mnoho či spočetně mnoho čísel. Že celá ta sčítací věc smrdí se znázorní tím, že nahradíme sumační znaménko znaménkem integrálním:

$$\boxed{A = \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{b} f(x) \cdot dx = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

Znovu zdůrazňujeme, že toto odvození nebylo korektní, nicméně tento způsob přemýšlení se zdá přirozený a často dobře funguje. Pokud si zvyknete na *dx* coby nekonečně malý kousek osy *x*, spousta dalších vzorců bude vypadat přirozeněji (objem, těžiště atd.).

Vlastnosti Riemannova integrálu

Věta.
(i) Nechť $a<b<c$ jsou reálná čísla, nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle a,c\rangle$. Funkce f je Riemannovsky integrovatelná na $\langle a,c\rangle$ tehdy a jen tehdy, pokud je Riemannovsky integrovatelná na obou intervalech $\langle a,b\rangle$ a $\langle b,c\rangle$; pak také

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.}$$

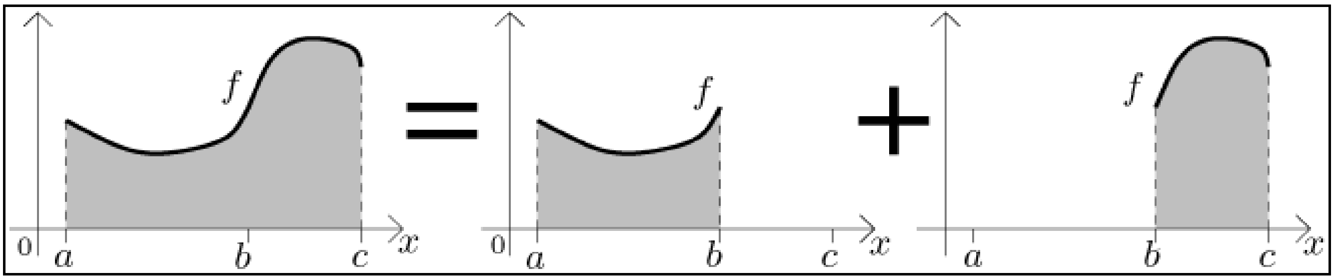
(ii) Nechť f je Riemannovsky integrovatelná funkce na $\langle a,b\rangle$, nechť k je reálné číslo. Pak funkce kf je Riemannovsky integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a

$$\boxed{\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.}$$

(iii) Nechť f a g jsou Riemannovsky integrovatelné funkce na $\langle a,b\rangle$. Pak je funkce $f+g$ Riemannovsky integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a

$$\boxed{\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.}$$

První vlastnost by měla být jasná z obrázku:



Druhá vlastnost plyne algebraicky z definice Riemannova integrálu. Konstanta k totiž může být vytknuta z infima a suprema f na jednotlivých podintervalech dělení, pak vytknuta ze sum v horních a dolních součtech a následně i z infima a suprema definujícího integrál.

Třetí vlastnost už není tak zjevná, protože supremum součtu dvou funkcí se rozhodně nerovná součtu suprem jednotlivých funkcí. Je zde ale k dispozici alespoň nerovnost, která vede správným směrem, a nakonec se to dá udolat. ------ nebudu rozvádět tam se pevně věřím nikdo z nás nedostane.

METODA VÝPOČTU – SUBSTITUCE

Substituce je metoda, při které v integrálu změníme proměnnou pomocí zvoleného transformačního vzorce, zde budeme přecházet od x k y. Pokud je vzorec ve tvaru $y=g(x)$, jde o substituci přímou, nepřímá substituce vzniká vzorcem $h(y)=x$ a smíšená vzorcem $h(y)=g(x)$. Nejsnadnější je přímá substituce, postup je pak náledující.

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \begin{vmatrix} y = g(x) \\ dy = g'(x)\,dx \end{vmatrix} = \int f(y)\,dy$$
$$= F(y) + C = F(g(x)) + C.$$

Často však i v případě, že začneme vzorcem $y=g(x)$, ještě musíme pracovat i s jeho upravenými tvary, což pak sklouzává ke smíšené substituci, v praxi se rozdíly z velké části stírají. Uvedeme si proto univerzální algoritmus pro smíšenou substituci, přímá i nepřímá pak budou jen speciální případy.

Algoritmus pro substituci.
Krok 1. Zvolte transformační vzorec $h(y)=g(x)$.
Krok 2. Odvoďte odpovídající transformační vzorec pro diferenciály, $h'(y)dy=g'(x)dx$.
Jinými slovy, zderivujte obě strany a připojte odpovídající diferenciály.
Pokud šlo o přímou substituci $y=g(x)$, tak se diferenciály transformují vzorcem $dy=g'(x)dx$.
Pokud šlo o nepřímou substituci $h(y)=x$, tak se diferenciály transformují vzorcem $h'(y)dy=dx$.
Step 3. Pokud integrál obsahuje výraz $g'(x)dx$. a mimo něj se proměnná x vyskytuje pouze v rámci výrazu $g(x)$, jděte na další krok.
Jinak použijte vzorce z Kroku 1 a 2 k odvození dalších vzorců, které jsou potřeba pro vyjádření x v intervalu.
Namísto odvozování nových vztahů v Kroku 3 je někdy možné přepsat integrál tak, aby již pasoval ke vzorcům, které již máme z Kroků 1 a 2.
Krok 4. Přepište integrál z jazyka x do jazyka y tak, že nahradíte všechny výskyty x (včetně dx) pouze pomocí vzorců odvozených ze zvoleného transformačního vzorce v předchozích krocích a ničeho jiného. V transformovanékm integrálu nesmí zůstat žádné x. Pokud toto není možné, tak zvolenou substituci nelze provést.
Krok 5. Spočítejte nový integrál, dostanete neurčitý integrál, který používá proměnnou y. Pak udělejte odpovídající zpětnou substituci, tedy odvoďte vzorec pro y ze základní transformačního transformačního vzorce (není třeba, pokud šlo o přímou substituci) a dosaďte za y, čímž se dostanete zpět k jazyku x.

Příklad : Uvažujte následující výpočet.

$$\int \sin(2x+1)\,dx = \begin{vmatrix} y = 2x+1 \\ dy = 2\,dx \\ dx = \frac{1}{2}\,dy \end{vmatrix} = \int \sin(y)\,\tfrac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int \sin(y)\,dy$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(y) + C = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C,\ \ x \in I\!R.$$

Daný integrál není tabulkový, ale stal by se jím, pokud bychom mohli nahradit člen $2x+1$ písmenem y. To inspiruje naši volbu transformační rovnice, ale ještě nemůžeme provést nahrazení. Potřebujeme totiž nahradit oba výskyty x a k nahrazení dx potřebujeme odvodit příslušný vzorec (Krok 2 výše). Všimněte si, že tento vzorec pochází pouze ze zvolené tranzformace, integrál na to nemá žádný vliv.

Teprve po odvození $dy=2dx$ je čas jít zpět k našemu integrálu a podívat se, jak nám to spolu zapadá. Odpověď zní, že to moc dobře nesedí, protože v integrálu nemáme $2dx$. Je proto čas na Krok 3 neboli přepíšeme naše vzorce do učitečnějšího tvaru, v tomto případě bychom ocenili nějaký vzorec pro d. Naštěstí jej snadno dostaneme.

Máme tedy vhodné vzorce pro nahrazení a provedeme substituci. Jak jsme čekali, dostaneme tak tabulkový integrál, a vyřešíme jej. Nakonec uděláme zpětnou substituci a přidáme nutné části: konstantu C a obor platnosti.

Někdy je možné namísto vytváření nových vzorců vytvořit potřebné výrazy v integrálu chytrým přepisem. Zde je to velmi snadné.

$$\int \sin(2x+1)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x+1)\,2\,dx = \left| \begin{aligned} y &= 2x+1 \\ dy &= 2\,dx \end{aligned} \right| = \frac{1}{2}\int \sin(y)\,dy = \ldots$$

Tento příklad byl extrémně jednoduchý, zkušený integrátor by často rovnou napsal odpověď a výpočty dělal v hlavě, ale ukazuje hlavní prvky substituce. Než se dáme do příkladů, které se zanoří hlouběji do zákrut substituce, podíváme se na jednu důležitou otázku.

Jak volit substituci

Ve většině případů používáme substituci ke zjednodušení složené funkce. V typickém případě se proměnná objevuje v podobě nějakého výrazu $g(x)$, který je dosazen do funkce f. Pokud nahradíme $g(x)$ jen písmenem y, tak se integrál podstatně zjednoduší. Dostáváme se tak k přímé substituci $y=g(x)$. .

Prvním náznakem, že substituce může být dobrý nápad, je tedy přítomnost složené funkce. To je ale teprve první krok. Víme, že úspěch substituce je určen schopností transformovat všechny výskyty x, největším problémem je diferenciál. Když tedy začneme přemýšlet nad nějakou substitucí $y=g(x)$, tak bychom se měli podívat, jestli je v integrálu také člen $g'(x)dx$. Pokud tam je, tak substituce nejspíše uspěje.

Shrnuto, pokud daný integrál zahrnuje složenou funkci, tak se podíváme na výraz uvnitř a ověříme, zda se jeho derivace nachází vedle dx. Pokud je odpověď kladná, pak tato substituce bude fungovat. Například bychom určitě použili substituci $y=g(x)$, $dy=g'(x)dx$ u integrálů jako ty následující:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx, \qquad \int [g(x)]^n g'(x)\,dx, \qquad \int \sin\bigl(g(x)\bigr)g'(x)\,dx, \qquad \int e^{g(x)}g'(x)\,dx.$$

Po substituci z nich budou integrály po řadě z $1/y$, y^n, $\sin(y)$ a e^y.

Nicméně často tomu tak není. Pak se musíme zeptat, jestli se věci nedají alespoň přerovnat tak, aby pasovaly. V mnoha případech to je možné, zejména to vždy platí o **lineární substituci** $y=Ax+B$, $dx=1/A\,dy$, viz příklad výše. Pomocí lineární substituce snadno zjednodušíme integrály jako tyto:

$$\int \frac{1}{(2x-3)^4}\,dx, \qquad \int \sqrt{1-2x}^{\,13}dx, \qquad \int \sin(5x)\,dx, \qquad \int e^{3x-1}dx.$$

Například v následujícím integrálu složená funkce jasně ukazuje na lineární substituci $y=2x-1$ a my už víme, že uspěje, jen je třeba najít vzorec pro x v čitateli.

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx = \left| \begin{aligned} y &= 2x-1 \\ dy &= 2\,dx \\ dx &= \tfrac{1}{2}\,dy \\ x &= \tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2} \end{aligned} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}}{\sqrt{y}}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{4}\int y^{\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}}\,dy$$
$$= \frac{1}{6}y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{6}\sqrt{2x-1}^{\,3} + \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C,\ x > \frac{1}{2}.$$

Více pak na http://math.feld.cvut.cz/mt/pagec3dc.htm, jedná se o řešené příklady.

METODA VÝPOČTU – PER PARTES

Integrování "per partes" je založeno na identitě, která se dá vyjádřit například vzorcem

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

Hlavní myšlenka této metody je následující: Dostali jste integrál a povedlo se jej napasovat na integrál vlevo v oné identitě. Pak můžete přejít k výrazu napravo. To má samozřejmě smysl dělat jen tehdy, když je nový integrál napravo snažší (nebo stený, viz níže).

Algoritmus pro integraci per partes.
Krok 1. Vyjádřete si integrand jako součin dvou funkcí, jeden činitel označte jako $f(x)$, druhý jako $g'(x)$.
Krok 2. Dopočítejte si ostatní výrazy z formule. Jmenovitě, $f'(x)$ obdržíte derivováním funkce $f(x)$ a $g(x)$ získáte z funkce $g'(x)$ integrováním, přičemž nepoužijete $+C$.
Krok 3. Dosadíte do per partesího vzorce. Výpočet per partes je hotov a můžete se pokusit o vyřešení integrálu na pravé straně rovnosti.

Použití per partes se tradičně značí do matice, do prvního řádku se vepíše f a g', do druhého pak dopočítá f' a g. Ukážeme si příklad.

$$\begin{aligned}\int (2x+1)\sin(x)\,dx &= \begin{vmatrix} f = 2x+1 & g' = \sin(x) \\ f' = 2 & g = -\cos(x)\end{vmatrix} \\ &= (2x+1)\big(-\cos(x)\big) - \int 2\big(-\cos(x)\big)\,dx \\ &= -(2x+1)\cos(x) + 2\int \cos(x)\,dx \\ &= -(2x+1)\cos(x) + 2\sin(x) + C,\ \ x \in I\!R.\end{aligned}$$

Poznamenejme, že celý výraz v daném integrálu musí být v postupu použit, takže když vynásobíme výrazy v prvním řádku matice, musí vyjít přesně výraz v integrálu. Není možné si kousek daného intgrálu nechat bokem. Jak vidíme, v druhém řádku matice pak najdeme nový integrál.

Zkušení integrátoři si tu matici někdy ani nepíší, integrace per partes funguje následovně: Nejprve jednu část daného výrazu zintegrujeme, dostaneme tak první nový člen, který už je hotov. V něm pak tu druhou část zderivujeme a dostaneme nový integrál.

Jak vybrat integraci per partes

Je třeba myslet na dvě věci. Za prvé, tu část, kterou hodláme integrovat (neboli tu, kterou vybíráme jako $g'(x)$, musíme být schopni zintegrovat, a to pokud možno hned (komplikované integrování u g málokdy vede na lepší nový integrál). Tím jsme silně omezeni, v zásadě na mocniny, siny a kosiny, exponenciály. Víc toho opravdu snadno integrovat neumíme.
Za druhé, zbytek, tedy to, co budeme derivovat a označujeme f, by se měl derivací výrazně vylepšit (právě zde by se mělo zabezpečit, že nový integrál bude snažší). Když si zase představíme, jak vypadá výsledek derivování různých výrazů, tak zjistíme, že i zde nemáme moc na výběr.

Když se to dá dohromady, skončíme v zásadě se třemi typy integrálů, na které má smysl integrování per partes aplikovat. Je dobré si je pamatovat.

•Typ "**odstraňujeme *x***".
Integrál tohoto typu jsme už viděli v úvodním příkladě této sekce, v součinu je funkce, kterou dokážeme snadno integrovat, vynásobená polynomem, který pomocí derivování redukujeme.
Základní příklady:

$$\int x^2 \sin(3x)\,dx, \qquad \int x^7 \cos(x)\,dx, \qquad \int x^4 e^{4x}\,dx.$$

Volíme mocninu *x* (či obecněji polynom) jako *f* a onu pěkně integrovatelnou funkci jako *g*'. Je jasné, že každou derivací snížíme stupeň polynomu o jedničku, takže v případě vyšších mocnin je třeba integraci per-partes opakovat. Ukážeme teď zajímavější příklad. Nejprve ale uděláme pomocný výpočet, který by zkušený integrátor dělal z hlavy v průběhu per-partesení.

$$\int e^{3x}\,dx = \left|\begin{array}{r} y = 3x \\ dy = 3\,dx \\ dx = \frac{1}{3}\,dy \end{array}\right| = \frac{1}{3}\int e^y\,dy = \frac{1}{3}e^y + C = \frac{1}{3}e^{3x} + C.$$

Teď už můžeme počítat následující integrál, jasný to kandidát na odstranění *x* pomocí per partes.

$$\begin{aligned} \int (x^2+3)e^{3x}\,dx &= \left|\begin{array}{ll} f = x^2+3 & g' = e^{3x} \\ f' = 2x & g = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right| = (x^2+3)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int x\,e^{3x}\,dx \\ &= \left|\begin{array}{ll} f = x & g' = e^{3x} \\ f' = 1 & g = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right| = \frac{1}{3}(x^2+3)e^{3x} - \frac{2}{3}\Big[\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx\Big] \\ &= \frac{1}{3}(x^2+3)e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{9}\int e^{3x}\,dx \\ &= \frac{1}{3}(x^2+3)e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C,\ x \in I\!R. \end{aligned}$$

Typickou chybou při opakovaném per partes je zapomenout na tu závorku. Všimněte si, že bychom s touto metodou neuspěli, pokud by mocnina u *x* nebyla kladné celé číslo. Přesvědčte se sami, že například odmocniny z *x* se derivováním nezbavíte.

•Typ "**odstraňujeme logaritmy**".
Tento přístup je založen na tom, že derivací logaritmu získáme mocninu, takže nový integrál již bude bez logaritmu. Postupu se tedy používá pro integrály typu

$$\int x^7 \ln(3x)\,dx, \qquad \int x^2 \ln^5(x)\,dx, \qquad \int \frac{1}{x^3}\ln^2(5x)\,dx, \qquad \int \ln(x)\,dx.$$

Zde bereme naopak mocninu logaritmu jako *f* a mocninu *x* (či polynom) jako *g*'. Vyšší mocniny logaritmu vyžadují opakování per partes.

Velice zajímavý je ten poslední integrál. Asi jste si už dříve všimli, že integrál logaritmu nápadně chybí v seznamu tabulkových integrálů. Logaritmus totiž není derivací žádné elementární funkce a jeho integrál obvykle vyhodnocujeme (pokud si jej nepamatujeme či někde nenajdeme) pomocí integrace per-partes a zajímavé (a trikové) volby *g*'=1.

$$\begin{aligned} \int \ln(x)\,dx = \int \ln(x)\cdot 1\,dx &= \left|\begin{array}{ll} f = \ln(x) & g' = 1 \\ f' = \frac{1}{x} & g = x \end{array}\right| \\ &= x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - \int 1\,dx \\ &= x\ln(x) - x + C,\ x > 0. \end{aligned}$$

•Typ "**odstraňujeme cyklometrické funkce**".
Cyklometrické funkce jsou podobné logaritmu v tom, že když je zderivujeme, tak dostaneme výraz úplně jiného typu, a to typu příjemnějšího z pohledu derivace. Dá se tedy také aplikovat podobný trik na integrály jako tyto:

$$\int \arcsin(x)\,dx, \quad \int \operatorname{arctg}(x)\,dx, \quad \int x^3 \operatorname{arctg}(2x)\,dx, \quad \int x \arcsin^2(3x)\,dx.$$

Jako příklad si ukážeme důležitý integrál arkus tangensu, kdy zase použijeme trik s jedničkou.

$$\begin{aligned}
\int \arcsin(x)\,dx &= \begin{vmatrix} f = \arcsin(x) & g' = 1 \\ f' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & g = x \end{vmatrix} \\
&= x\arcsin(x) - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{vmatrix} y = 1 - x^2 \\ dy = -2x\,dx \\ x\,dx = -\frac{1}{2}\,dy \end{vmatrix} \\
&= x\arcsin(x) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = x\arcsin(x) + \frac{1}{2}\int y^{-\frac{1}{2}}\,dy \\
&= x\arcsin(x) + \frac{1}{2}\cdot 2y^{\frac{1}{2}} + C \\
&= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C,\ \ x \in \langle -1, 1 \rangle.
\end{aligned}$$

Čtenář se s integrací per partes asi setká nejčastěji právě u těch tří typů výše, metoda se dá ale použít i v jiných situacích, někdy docela překvapivě. Jeden docela užitečný trik si teď ukážeme.

Poznámka: Poznamenejme, že primitivní funkce, kterou si bereme jako *g*, nemusí být ta nejjednodušší, kdy za *C* volíme 0. Někdy je výhodné použít jinou hodnotu, aby nám pomohla s novým integrálem. Uvažujme následující příklad. Je to typický zástupce typu "odstraňujeme logaritmus" a my na něj použijeme integraci per partes obvyklým způsobem.

$$\int 2x\ln(x+13)\,dx = \begin{vmatrix} f = \ln(x+13) & g' = 2x \\ f' = \frac{1}{x+13} & g = x^2 \end{vmatrix} = x^2\frac{1}{x+13} - \int \frac{x^2}{x+13}\,dx.$$

K dokončení příkladu bychom museli nejprve vydělit zlomek a pak integrovat zbytek, což není obtížné, ale proč pracovat, když nemusíme. Jednoduchý trik nás toho zlomku zbaví.

$$\begin{aligned}
\int 2x\ln(x+13)\,dx &= \begin{vmatrix} f = \ln(x+13) & g' = 2x \\ f' = \frac{1}{x+13} & g = x^2 - 169 \end{vmatrix} \\
&= (x^2 - 169)\frac{1}{x+13} - \int \frac{x^2-169}{x+13}\,dx \\
&= (x^2 - 169)\frac{1}{x+13} - \int \frac{(x-13)(x+13)}{x+13}\,dx \\
&= (x^2 - 169)\frac{1}{x+13} - \int x - 13\,dx \\
&= (x^2 - 169)\frac{1}{x+13} - \frac{1}{2}x^2 - 13x + C,\ \ x > -13.
\end{aligned}$$

Mnohem lepší. Nestává se to natolik často, abychom o tom moc povídali, ale je dobré být si vědom toho, že máme při volbě *g* jistou svobodu.

Více pak na http://math.feld.cvut.cz/mt/pagec3dc.htm, jedná se o řešené příklady.

UŽITÍ A VÝZNAM INTEGRÁLU

Geometrická aplikace určitého integrálu je zřejmá. Odvozoval se podle ní Riemannův určitý integrál.

Dále je jeho využití – fyzikální aplikace určitého integrálu :

dráha přímočarého pohybu konaného rychlostí v = v(t) v časovém intervalu (t_1,t_2) je daná určitým integrálem :

$$\boxed{s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt}$$