Kapitola 2

Dvojný integrál.

1 Násobná integrace.

V této části se budeme zabývat nalezením elegantnějšího a hlavně efektivnějšího způsobu výpočtu objemu tělesa $M(f,T)$ než nám poskytuje obecná konstrukce (viz Příklad 1.10 V minulé kapitole). Začneme — na první pohled —poněkud odtažitě. Zapomeneme chvíli na objem $V(f,T)$ a podíváme se na integrování funkcí dvou proměnných.

Nechť $f(x,y)$ je spojitá funkce na obdélníku $T = \langle a_1, a_2\rangle \times \langle b_1, b_2\rangle$. Pro každé pevně zvolené x je funkce $f(x,y)$ spojitě závislá jen na y. Můžeme ji integrovat v mezích b_1, b_2:

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Tento výraz je funkcí x. Označme jej

$$\varphi(x) = \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Příklad 2.1. Nechť $f(x,y) = x^2y + x\sin y$ a $T = \langle 1,2\rangle \times \langle 0,2\rangle$. Pak

$$\varphi(x) = \int_0^2 \big(x^2y + x\sin y\big)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 x^2y\,\mathrm{d}y + \int_0^2 x\sin y\,\mathrm{d}y =$$
$$= x^2\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^2 + x\Big[-\cos y\Big]_0^2 = 2x^2 + x\big(1-\cos 2\big).$$

Stejně tak můžeme volit pevně y. Tím $f(x,y)$ bude spojitou funkcí v x. Jejím integrováním dostaneme funkci v proměnné y, kterou označíme

$$\psi(y) = \int_{a_1}^{a_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 2.2. Nechť f i T jsou stejné jako v Příkladu 2.1. Pak

$$\psi(y) = \int_1^2 \big(x^2 y + x \sin y\big)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 x^2 y\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x \sin y\,\mathrm{d}x$$
$$= y\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + \sin y \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{7}{3}\,y + \frac{3}{2}\sin y.$$

V obou příkladech vyšly funkce $\varphi(x)$ a $\psi(y)$ spojité. Ukážeme, že to nebylo náhodou: vyjdeme-li od spojité funkce $f(x,y)$, tak integrováním podle jedné či druhé proměnné dostaneme vždy spojitou funkci.

Věta 2.3. *Nechť funkce f je spojitá na obdélníku $T = \langle a_1, a_2\rangle \times \langle b_1, b_2\rangle$. Pak funkce $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ dané integrály*

$$\varphi(x) = \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \text{a} \quad \psi(y) = \int_{a_1}^{a_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

jsou spojité.

Důkaz. Ukážeme pouze první část tvrzení, tj. že funkce $\varphi(x)$ je spojitá. Druhá část má důkaz zcela analogický (proměnné x a y si vymění role).

Nechť $x_0 \in \langle a_1, a_2\rangle$. Dokážeme, že φ je spojitá v x_0. Mějme $\varepsilon > 0$. Hledáme $\delta > 0$ takové, aby kdykoli se x od x_0 liší o méně než δ, $|x - x_0| < \delta$, tak hodnoty $\varphi(x)$ a $\varphi(x_0)$ se liší nejvýše o ε, $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \le \varepsilon$. Upravíme si nejprve zadané ε tím, že zavedeme

$$\widetilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{b_2 - b_1}.$$

Nyní použijeme Větu 1.11. Ta nám poskytne k $\widetilde{\varepsilon}$ takové δ, že

$$|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})| \le \widetilde{\varepsilon}, \tag{2.1}$$

kdykoli body $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou od sebe vzdáleny nejvýše o δ. A toto δ je už ono hledané. Ověřme si to. Nechť x je takové, že $|x - x_0| < \delta$ a zkusme odhadnou rozdíl funkčních hodnot φ:

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \left|\int_{b_1}^{b_2} \big(f(x,y) - f(x_0,y)\big)\,\mathrm{d}y\right| \le \int_{b_1}^{b_2} |f(x,y) - f(x_0,y)|\,\mathrm{d}y. \tag{2.2}$$

Vzdálenost bodů (x,y) a (x_0,y) je

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y)^2} = |x - x_0| < \delta.$$

Podle (2.1) je tak

$$|f(x,y) - f(x_0,y)| \le \widetilde{\varepsilon}.$$

Můžeme tedy poslední člen v (2.2) dále odhadnout

$$\int_{b_1}^{b_2} |f(x,y) - f(x_0,y)| \,\mathrm{d}y \le \int_{b_1}^{b_2} \widetilde{\varepsilon} \,\mathrm{d}y = \widetilde{\varepsilon}(b_2 - b_1) = \varepsilon.$$

Zjistili jsme, že $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \le \varepsilon$ a spojitost funkce φ je dokázána. □

Když nyní už víme, že funkce

$$\varphi(x) = \int_{b_1}^{b_2} f(x,y) \,\mathrm{d}y$$

je spojitá, nic nám nemůže zabránit v tom, abychom ji neintegrovali podle x v mezích od a_1 do a_2:

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi(x) \,\mathrm{d}x = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

Podobně pro funkci ψ:

$$\int_{b_1}^{b_2} \psi(y) \,\mathrm{d}y = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Integrály na pravé straně budeme nazývat *dvojnásobné integrály* funkce f přes obdélník T. Někdy, bude-li to třeba, můžeme pro přesnost naznačit závorkami pořadí integrace

$$\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{a_1}^{a_2} \Big(\int_{b_1}^{b_2} f(x,y) \,\mathrm{d}y \Big) \,\mathrm{d}x.$$

Příklad 2.4. Spočteme oba dvojnásobné integrály (tj. v obou pořadích) funkce

$$f(x,y) = x^2 y + x \sin y$$

přes obdélník $T = \langle 1,2 \rangle \times \langle 0,2 \rangle$. Využijeme samozřejmě toho, že příslušné funkce $\varphi(x)$ a $\psi(y)$ máme již spočteny v Příkladech 2.1 a 2.2.

$$\int_1^2 \int_0^2 x^2 y + x \sin y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_1^2 2x^2 + x(1 - \cos 2) \,\mathrm{d}x = 2\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_1^2 + (1 - \cos 2)\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^2 =$$
$$= \frac{14}{3} + \frac{3}{2}(1 - \cos 2).$$

Nyní při prohozeném pořadí integrace:

$$\int_0^2 \int_1^2 x^2 y + x \sin y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^2 \Big(\frac{7}{3} y + \frac{3}{2} \sin y\Big) \,\mathrm{d}y = \frac{7}{3}\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^2 + \frac{3}{2}\Big[-\cos y\Big]_0^2$$
$$= \frac{14}{3} + \frac{3}{2}(1 - \cos 2).$$

Jen těžko může uniknout naší pozornosti fakt, že oba integrály v předchozím příkladě vyšly stejně. Jestliže jsme se pročetli první kapitolou a částí druhé kapitoly až sem, získali jsme — sice malou — ale přece jenom jistou matematickou zkušenost. Ta nám už nedovolí, abychom přijali laciné vysvětlení, že je to náhoda. Tušíme, že se za rovností skrývá hlubší důvod.

Věta 2.5. *Zobrazení, které uzavřenému obdélníku T a nezáporné spojité funkci f na T přiřadí dvojnásobný integrál funkce f přes T vyhovuje axiomům* (A) *a* (M). *Tím hodnota násobných integrálů nezávisí na pořadí integrace.*

Poznámka 2.6. Typ tvrzení, že hodnota násobného integrálu nezávisí na pořadí integrace, se v matematické literatuře nazývá *Fubiniova věta.* V našem výkladu je to právě Věta 2.5. Fubini dokázal toto tvrzení pro mnohem obecnější integrály, tzv. Lebesgueův integrál a měřitelné funkce.

Důkaz. Z důvodů symetrie stačí, když důkaz provedeme pro jedno pořadí integrace. Začneme s ověřením monotonie: mějme obdélník $T = \langle a_1, a_2\rangle \times \langle b_1, b_2\rangle$. Pak

$$\begin{aligned}\int_{a_1}^{a_2}\Big(\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x &\le \int_{a_1}^{a_2}\Big(\int_{b_1}^{b_2} \max_T(f)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{a_1}^{a_2} \max_T(f)(b_2-b_1)\,\mathrm{d}x \\ &= \max_T(f)(b_2-b_1)(a_2-a_1) = \max_T(f)\cdot \mathrm{obsah}(T).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Podobně

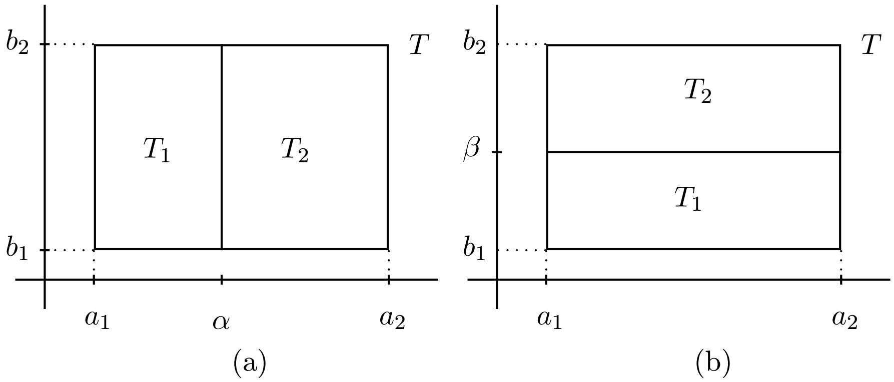
$$\begin{aligned}\int_{a_1}^{a_2}\Big(\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x &\ge \int_{a_1}^{a_2}\Big(\int_{b_1}^{b_2} \min_T(f)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{a_1}^{a_2} \min_T(f)(b_2-b_1)\,\mathrm{d}x \\ &= \min_T(f)(b_2-b_1)(a_2-a_1) = \min_T(f)\cdot \mathrm{obsah}(T).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Nerovnosti (2.3) a (2.4) spolu dávají

$$\min_T(f)\cdot \mathrm{obsah}(T) \le \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \le \max_T(f)\cdot \mathrm{obsah}(T),$$

což je axiom (M).

Aditivita: Nechť obdélník T je sjednocení dvou obdélníků T_1 a T_2, jak je znázorněno na obr. 2.1(a).



Obr. 2.1.

Při známém označení

$$\varphi(x) = \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

bude dvojnásobný integrál I_1 přes obdélník T_1 roven

$$I_1 = \int_{a_1}^{\alpha}\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{a_1}^{\alpha} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Stejně pro obdélník T_2

$$I_2 = \int_{\alpha}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{a_2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

a pro původní obdélník T

$$I = \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zřejmě platí $I = I_1 + I_2$, což je však již axiom aditivity. Ještě je třeba ověřit druhý způsob rozdělení obdélníku T na dva menší, jak je znázorněno na obr. 2.1(b). Zde je situace dokonce jednodušší než v prvním případě. Můžeme rovnou počítat

$$\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{a_1}^{a_2}\Big(\int_{b_1}^{\beta} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\beta}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{\beta} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{a_1}^{a_2}\int_{\beta}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Opět vidíme, že dvojnásobný integrál příslušný T je součet dvojnásobných integrálů pro T_1 a T_2.

Věta 1.9 říkala, že existuje právě jediné zobrazení V vyhovující axiomům (A) a (M). Věta 2.5 ukazuje, že oba násobné integrály vyhovují zmíněným axiomům. Z toho plyne, že

$$\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = V(f,T) = \int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

□

Předchozí věta tvrdí, že dvojnásobné integrály pro nezáporné spojité funkce nezávisí na pořadí integrace. Omezení dané nezáporností integrované funkce však není podstatné. Věta se dá rychle zobecnit na obecný případ. Uvažujme proto spojitou funkci $f(x,y)$ (ne nutně nezápornou) na obdélníku $T =< a_1, a_2 > \times < b_1, b_2 >$. Tato funkce má na T minimum $c = \min_T(f)$. Přičteme-li nyní k funkci $f(x,y)$ konstantu c, dostaneme funkci $g(x,y) = f(x,y) + c$, která je na T nezáporná. Pro funkci g tedy platí Věta 2.5, a proto

$$\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} (f(x,y)+c)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} (f(x,y)+c)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{2.5}$$

Lehce se můžeme přesvědčit, že dvojný integrál z konstantní funkce c přes obdélník T nezávisí na pořadí integrace a je vždy roven $c \cdot plocha(T)$. Odečtením této hodnoty od obou stran rovnosti (2.5) získáme závěrem

$$\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Dvojnásobné integrály tedy vycházejí pro jakékoliv spojité funkce vždy stejně. Jejich společnou hodnotu budeme značit

$$\iint_T f, \quad \text{eventuelně} \quad \iint_T f(x,y).$$

Pro nezápornou funkci f má tato hodnota význam objemu. Násobné integrály mají však smysl i pro obecnou spojitou funkci na T. Pomocí nich tak zavádíme pojem dvojného integrálu pro obecnou spojitou funkci.

Definice 2.7. *Nechť $T \subset \mathbb{R}^2$ je uzavřený obdélník a nechť funkce $f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na obdélníku T.* **Dvojným integrálem** *funkce f přes množinu T nazýváme*

$$\iint_T f = \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Tím jsme završili cestu započatou otázkami „Co je objem?“ a „Jak vypočítat jeho hodnotu?“. Odpověď na první z nich je Definice 1.1 spolu s Větou 1.9 a na druhou můžeme nyní odpovědět, že hodnota $V(f,T)$ je dvojný integrál funkce f přes T.

Někdy se vyskytne nutnost integrovat přes neomezený obdélník, např.

$$T = \langle -1, +\infty) \times (-\infty, 0\rangle.$$

Takový obdélník je vlastně nekonečným sjednocením postupně rostoucích omezených obdélníků $T_n = T \cap \big(\langle -n, n\rangle \times \langle -n, n\rangle\big)$, viz obr 2.2:

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n.$$

Integrály přes T_n již máme definovány a je intuitivně jasné, že jejich hodnota by se měla blížit k hodnotě integrálu přes T. To nás vede k přirozené volbě, že položíme

$$\iint\limits_T f = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{T_n} f.$$

Obecně můžeme definovat integrál přes neomezený obdélník následovně.

Definice 2.8. *Nechť T je uzavřený neomezený obdélník a nechť $f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná. Položíme*

$$T_n = T \cap (\langle -n, n\rangle \times \langle -n, n\rangle).$$

Existuje-li vlastní $\lim_{n\to\infty} \iint_{T_n} f$, řekneme, že existuje integrál $\iint_T f$ a jeho hodnota je rovna této limitě,

$$\iint\limits_T f = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{T_n} f. \tag{2.6}$$

Nezápornost funkce f zaručuje existenci výše uvedené limity neboť posloupnost $\iint_{T_n} f$ je nezáporná. V případě obecné funkce f definujeme dvojný integrál tak, že si f rozložíme na kladnou a zápornou část následovně:

$$f_+(x,y) = \max\{f(x,y), 0\} \quad \text{a} \quad f_(x,y)- = \max\{-f(x,y), 0\}.$$

Obě funkce f_+ a f_- jsou nezáporné a platí, že $f = f_+ - f_-$. Existují-li vlastní integrály $\iint_T f_+$ a $\iint_T f_-$ přes neomezený obdélník T, pak položíme

$$\iint\limits_T f = \iint\limits_T f_+ - \iint\limits_T f_-.$$

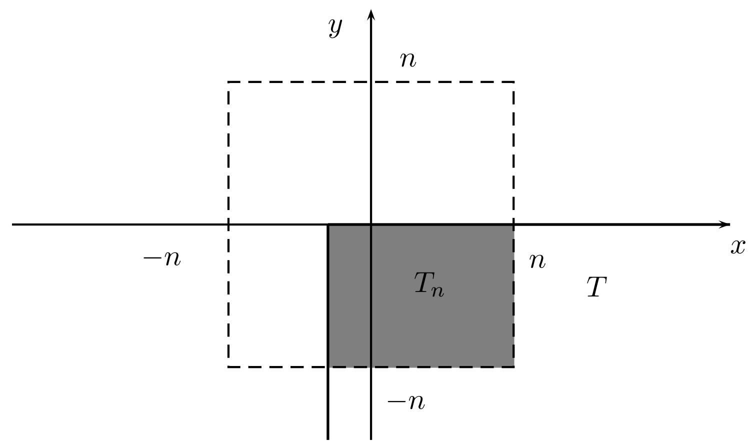
V opačném případě říkáme, že integrál neexistuje.

2 Cvičení.

Úloha. Zjistěte, zda existuje

$$\iint\limits_T e^{-x+y}\ , \quad T = \langle -1, +\infty) \times (-\infty, 0\rangle.$$

Řešení. Položíme $T_n = T \cap \big(\langle -n, n\rangle \times \langle -n, n\rangle\big)$. Obdélník T_n je znázorněn na obr. 2.2.



Obr. 2.2.

Počítejme,

$$\iint\limits_{T_n} e^{-x+y} = \int_{-1}^{n}\int_{-n}^{0} e^{-x+y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{n} \left[e^{-x+y}\right]_{-n}^{0}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{n} e^{-x} - e^{-x-n}\,\mathrm{d}x = (1-e^{-n})\int_{-1}^{n} e^{-x}\,\mathrm{d}x = (1-e^{-n})\,\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{n} =$$

$$= (1-e^{-n})(-e^{-n}+e) = e - e^{-n+1} - e^{-n} + e^{-2n}.$$

Protože $\lim_{n\to\infty}(e - e^{-n+1} - e^{-n} + e^{-2n}) = e$, dostáváme

$$\iint\limits_T e^{-x+y} = e.$$

Vypočtěte následující dvojné integrály přes zadané obdélníky T.

1. $\displaystyle\iint\limits_T xy, \qquad\qquad T = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle$

2. $\iint\limits_T e^{x+y}, \qquad T = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$

3. $\iint\limits_T \frac{x^2}{1+y^2}, \qquad T = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$

4. $\iint\limits_T \frac{1}{(1+x+y)^2}, \qquad T = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$

5. $\iint\limits_T \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad T = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$

6. $\iint x\,\sin(x+y), \qquad T = \langle 0,\pi\rangle \times \langle 0,\pi/2\rangle$

7. $\iint\limits_T x^2 y\, e^{xy}, \qquad T = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$

8. $\iint x^2 y\,\cos(xy), \qquad T = \langle 0,\pi/2\rangle \times \langle 0,2\rangle$

Spočtěte dvojné integrály přes neomezený obdélník T.

9. $\iint\limits_T \frac{1}{1+x^2+y^2+x^2y^2}, \qquad T = (-\infty,\infty) \times (-\infty,\infty)$

10. $\iint\limits_T xy\, e^{-x^2-y^2}, \qquad T = \langle 0,\infty) \times \langle 0,\infty)$

11. $\iint\limits_T e^{-|x|-|y|}, \qquad T = (-\infty,\infty) \times (-\infty,\infty)$

12.* $\iint\limits_T \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad T = (-\infty,\infty) \times (-\infty,\infty)$

13.* $\iint \frac{1}{(a^2+x^2+y^2)^2}, \qquad T = \langle 0,\infty) \times \langle 0,\infty)$

Výsledky.

1. 1; 2. $(e-1)^2$; 3. $\frac{\pi}{12}$; 4. $\ln\frac{4}{3}$; 5. $\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$; 6. $\pi-2$; 7. 2; 8. 0; 9. π^2; 10. $\frac{1}{4}$; 11. 4; 12. 2π, ve vnitřním integrálu použijte substituci $y = \sqrt{1+x^2}\sinh t$; 13. $\frac{\pi}{4a^2}$.

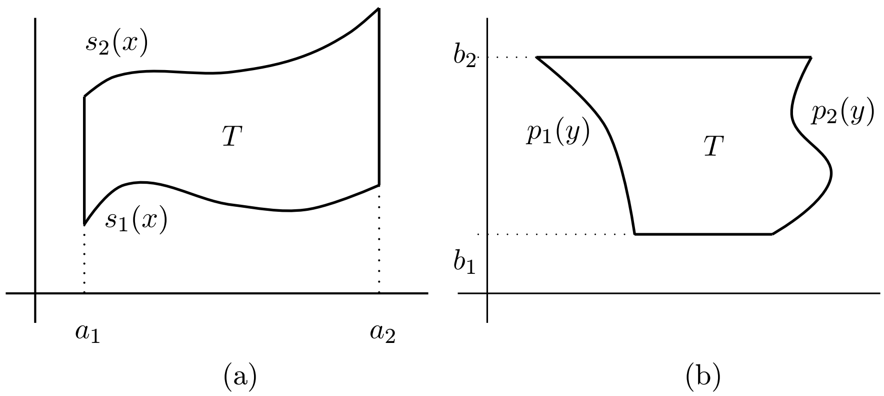
3 Integrály přes základní oblasti.

To, že umíme určit objem tělesa s obdélníkovou podstavou omezeného shora grafem spojité funkce, nás nemůže nadlouho uspokojit. Vadí nám tu příliš jednoduchý typ podstavy.

V aplikacích se vyskytují tělesa s mnohem obecnější podstavou než obdélník. Budeme proto nyní uvažovat množiny následujícího tvaru.

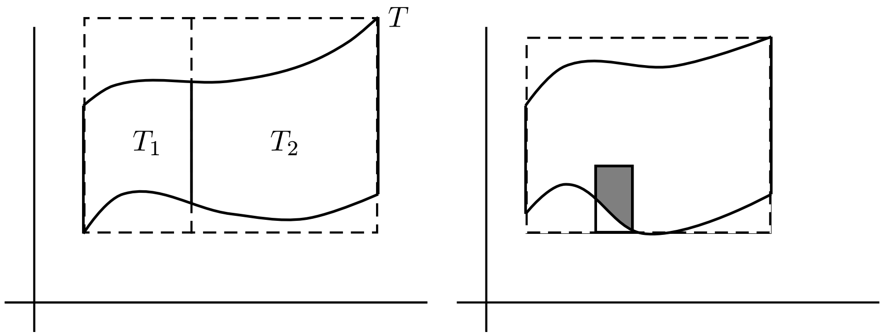
- Mějme dvě spojité funkce $y = s_1(x)$ a $y = s_2(x)$ na intervalu $I = \langle a_1, a_2 \rangle$ takové, že platí $s_1(x) \leq s_2(x)$. Prvním typem podstavy je množina
$$T = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I,\ s_1(x) \leq y \leq s_2(x)\Big\},$$
viz obr. 2.3(a).

- Mějme dvě spojité funkce $x = p_1(y)$ a $x = p_2(y)$ na intervalu $J = \langle b_1, b_2 \rangle$, takové, že platí $p_1(y) \leq p_2(y)$. Druhý typ podstavy je množina
$$T = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in J,\ p_1(y) \leq x \leq p_2(y)\Big\},$$
viz obr. 2.3(b).



Obr. 2.3.

Není žádný standardní název pro takovéto typy množin, proto jim budeme pro naší potřebu říkat *základní oblasti.* Tělesa, kterými se budeme zabývat, mají formálně stejný zápis $M(f, T)$ jako v Kapitole 1, jen symbol T nyní značí základní oblast:
$$M(f, T) = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\Big\}.$$
Proto se zdá, že i definice objemu takového tělesa bude stejná jako Definice 1.1. Na axiomu monotonie (M) není třeba měnit vůbec nic, neboť jak $\min_T(f)$ a $\max_T(f)$, tak i obsah(T) mají jasný smysl i pro základní oblasti T. (Z integrálního počtu jedné proměnné víme, jak spočítat obsah(T)). U aditivity je však nutné si ujasnit, co znamená rozdělění základní oblasti na dvě menší. Nejjednodušší způsob je ten, že opíšeme oblasti T obdélník a ten rozdělíme na dva menší. Jejich průniky s oblastí T jsou opět základní oblasti a tvoří rozdělění T, viz obr. 2.4(a). Aditivitu lze pak formulovat tak, že
$$V(f, T) = V(f, T_1) + V(f, T_2),$$
kde T_1 a T_2 jsou základní oblasti dělící T ve výše uvedeném smyslu. Toto rozdělění na dvě části můžeme přirozeným způsobem zobecnit na pojem *dělení* základní oblasti: každý prvek dělení opsaného obdélníku pronikneme s oblastí T, viz obr. 2.4(b).



(a) (b)

Obr. 2.4.

Náš cíl je teď dokázat větu o existenci a jednoznačnosti zobrazení V i pro základní oblasti. Vzpomeňme si, co bylo třeba k důkazu v případě obdélníku: za prvé pojem dělení a za druhé stejnoměrná spojitost funkce (viz Větu 1.11). Dělení jsme již zobecnili z obdélníků na základní oblasti a Věta 1.11 platí i pro základní oblasti. Nyní bychom mohli slovo od slova opisovat důkazy Tvrzení 1.8 a 1.12, a tím i důkaz hlavní Věty 1.9, s jedinou změnou, že všude bychom považovali T za základní oblast. To samozřejmě dělat nebudeme, pouze si na základě této skutečnosti uvědomíme, že platí

Věta 2.9. *Pro každou spojitou funkci f a každou základní oblast T, na které je f definována, existuje právě jedna hodnota $V(f,T)$, která splňuje axiomy axiomy* (A) *a* (M)*.*

Poznámka 2.10. Už v Poznámce 1.2 jsme si uvědomili, že axiom aditivity můžeme aplikovat na rozklad obdélníku na více než dvě části. V případě základních oblastí je situace zcela stejná:

$$V(f,T) = V(f,T_1) + \cdots + V(f,T_n), \tag{2.7}$$

kdykoli základní oblast $T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$ je sjednocením základních oblastí $T_1, \ldots, T_n$ takových, že žádné dvě nemají společný vnitřní bod. Tato obecnější formulace se nám bude hodit v dalších kapitolách.

Přistoupíme nyní k násobným integrálům přes základní oblasti. Ty jsou formálně podobné integrálům přes obdélníky. Je tu jen jedna odlišnost, na kterou si musíme dávat pozor. K ní se dostaneme až po důkazu následující věty, která zobecňuje Větu 2.3

Věta 2.11. *Nechť f je spojitá funkce na základní oblasti T typu (a) z obr.* 2.3. *Pak funkce*

$$\varphi(x) = \int_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

je spojitá na intervalu $\langle a_1, a_2\rangle$. Podobně pro oblast typu (b) z obr. 2.3 *je funkce*

$$\psi(y) = \int_{p_1(y)}^{p_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

spojitá na intervalu $\langle b_1, b_2\rangle$.

Důkaz. Ukážeme opět jen první část tvrzení, neboť druhá je zcela analogická. Nechť $x_0 \in \langle a_1, a_2 \rangle$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Budeme dokazovat, že existuje tak malé okolí bodu x_0, že se na něm liší hodnota $\varphi(x)$ od $\varphi(x_0)$ nejvýše o ε. Označme si

$$M = \max_T |f|, \quad M_1 = \max_{x \in \langle a_1, a_2 \rangle} |s_1(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in \langle a_1, a_2 \rangle} |s_2(x)|\,.$$

K upravenému $\widetilde{\varepsilon}$,

$$\widetilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2\,M + M_1 + M_2},$$

existuje z Věty 1.11 takové $\delta_1 > 0$, že kdykoli jsou dva body $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in T$ vzdáleny o nejvýše δ_1, tak

$$|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})| \le \widetilde{\varepsilon}. \tag{2.8}$$

Protože i funkce $s_2(x)$ a $s_1(x)$ jsou spojité v x_0, existuje jisté $\delta_2 > 0$, že

$$|s_2(x) - s_2(x_0)| \le \widetilde{\varepsilon}, \qquad |s_1(x) - s_1(x_0)| \le \widetilde{\varepsilon}, \tag{2.9}$$

kdykoli je x v δ_2-okolí bodu x_0, tj. $|x - x_0| < \delta_2$. Položíme hledané δ rovné $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Odhadněme nyní rozdíl $|\varphi(x) - \varphi(x_0)|$ pro x z δ-okolí bodu x_0.

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \left| \int\limits_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_{s_1(x_0)}^{s_2(x_0)} f(x_0, y)\,\mathrm{d}y \right|. \tag{2.10}$$

K rozdílu přičteme a odečteme dva integrály $\int_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$ a $\int_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} f(x_0, y)\,\mathrm{d}y$. Tím dostaneme

$$\begin{aligned}\left| \int\limits_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_{s_1(x_0)}^{s_2(x_0)} f(x_0, y)\,\mathrm{d}y \right| &= \left| \left(\int\limits_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) + \right.\\ &\left. + \left(\int\limits_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} f(x_0, y)\,\mathrm{d}y \right) + \left(\int\limits_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} f(x_0, y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_{s_1(x_0)}^{s_2(x_0)} f(x_0, y)\,\mathrm{d}y \right) \right|.\end{aligned}$$

Podívejme se na první a poslední rozdíly. V prvním mají integrály stejnou horní mez, a proto

$$\int\limits_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{s_1(x)}^{s_1(x_0)} f(x, y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.11}$$

Podobně v posledním rozdílu mají integrály stejnou dolní mez, a tak

$$\int\limits_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} f(x_0, y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_{s_1(x_0)}^{s_2(x_0)} f(x_0, y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{s_2(x_0)}^{s_2(x)} f(x_0, y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.12}$$

Protože obecně platí následující odhad

$$\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}y\right| \le \int_a^b |f|\,\mathrm{d}y \le \max|f|\cdot(b-a)\,,$$

máme tak částečně odhadnut výraz (2.11) hodnotou $M\,|s_1(x_0)-s_1(x)|$ a výraz (2.12) hodnotou $M\,|s_2(x)-s_2(x_0)|$. Tím jsme dostali částečný odhad rozdílu

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)| \le M\,|s_1(x_0)-s_1(x)| + \left|\int_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y - \int_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y\right| + \\ + M\,|s_2(x)-s_2(x_0)|$$

Vzdálenost bodů (x,y) a (x_0,y) je $|x-x_0|$, a ta je menší než δ, speciálně menší něž δ_1. Z (2.8) pak plyne, že

$$|f(x,y)-f(x_0,y)| \le \widetilde{\varepsilon}.$$

Můžeme tak pokračovat v předchozím odhadu:

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)| \le M\,|s_1(x_0)-s_1(x)| + \int_{s_1(x_0)}^{s_2(x)} \widetilde{\varepsilon}\,\mathrm{d}y + M\,|s_2(x_0)-s_2(x)| = \\ = M\,|s_1(x_0)-s_1(x)| + \widetilde{\varepsilon}\,|s_2(x)-s_1(x_0)| + M\,|s_2(x_0)-s_2(x)|\,.$$

S využitím (2.9) a volby $\widetilde{\varepsilon}$ dostaneme

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)| \le M\,\widetilde{\varepsilon} + \widetilde{\varepsilon}\,(M_1+M_2) + M\,\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}\,(2\,M+M_1+M_2) = \varepsilon.$$

A tím je důkaz hotov. □

Teď, když víme, že integrály

$$\int_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y, \qquad \int_{p_1(y)}^{p_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

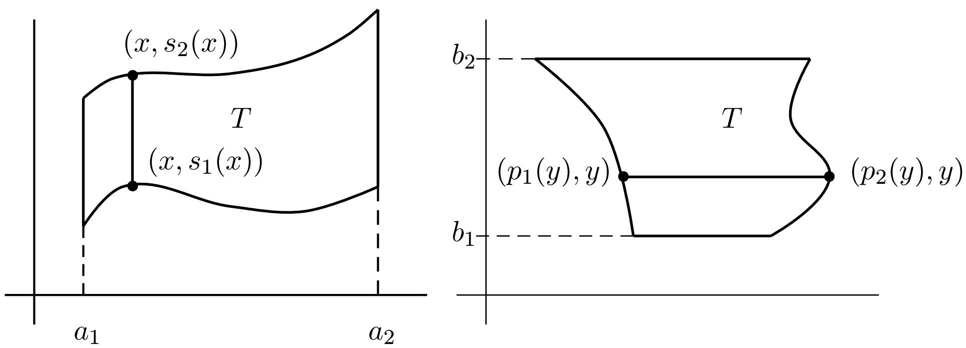
jsou spojité funkce postupně v x a v y, můžeme je integrovat podle zbývajících proměnných

$$\int_{a_1}^{a_2}\int_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{b_1}^{b_2}\int_{p_1(y)}^{p_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Rozdíl oproti integraci přes obdélník je ten, že zde nemůžeme volně prohazovat pořadí integrálů. Vnější integrály musí být vždy ty, které neobsahují ve svých mezích proměnnou. Při konkrétních výpočtech je důležité mít na paměti následující interpretaci dvojnásobné integrace. Pro každé $x \in \langle a_1, a_2 \rangle$ nejprve zintegrujeme funkci $f(x,y)$ podél svislé úsečky mezi body $(x, s_1(x))$ a $(x, s_2(x))$, viz obr. 2.6(a). Dostaneme hodnotu

$$\int\limits_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Pak tuto hodnotu integrujeme přes všechny svislé úsečky, které tak vyplní celou množinu.



(a) (b)

Obr. 2.6.

Podobně druhý typ základní oblasti vyplňujeme vodorovnými úsečkami, přes které je počítán vnitřní integrál, obr. 2.6(b).

Příklad 2.12. Nalezněte objem tělesa shora omezeného grafem funkce $f(x,y) = x + y$ a s podstavou ohraničenou křivkami

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{x}, \quad \text{a} \quad y = \frac{1}{2}x^3.$$

Podstavu P tvoří základní oblast

$$P = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \langle 0, 1 \rangle,\ \frac{1}{2}x^3 \leq y \leq \frac{1}{2}\sqrt{x} \right\}.$$

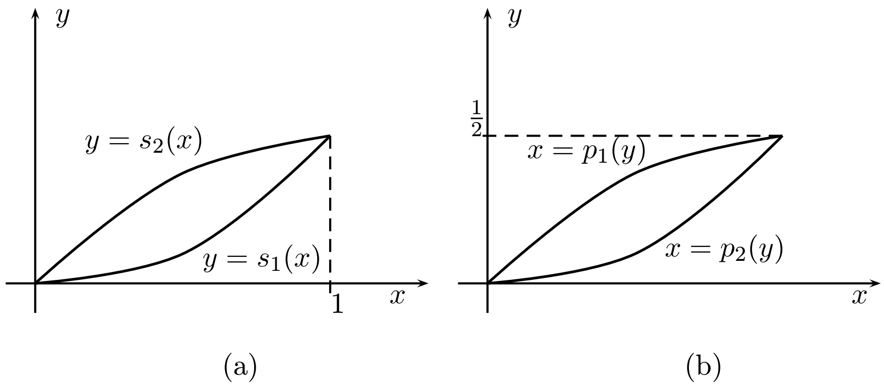
Ta je znázorněna na obr. 2.7. Vidíme, že je poněkud výjimečná. Může být totiž považována za oblast obou typů. Jednak je omezena funkcemi

$$s_1(x) = \frac{1}{2}x^3 \quad \text{a} \quad s_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x},$$

viz obr. 2.7(a), nebo ji můžeme považovat za omezenou funkcemi

$$p_1(y) = (2y)^2 \quad \text{a} \quad p_2(y) = (2y)^{\frac{1}{3}},$$

viz obr. 2.7(b).



Obr. 2.7.

Každý si určitě všiml, že funkce $y = s_1(x)$ a $x = p_2(y)$ jsou navzájem inverzní. Stejně tak $s_2(x)$ a $p_1(y)$. První typ násobného integrálu je

$$\int_0^1 \int_{\frac{1}{2}x^3}^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}x^3}^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x}{8} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{8}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{5} + \frac{1}{16} - \frac{1}{10} - \frac{1}{56} = \frac{81}{560}.$$

Druhý typ je

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{(2y)^2}^{(2y)^{\frac{1}{3}}} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_{(2y)^2}^{(2y)^{\frac{1}{3}}} \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} + 2^{\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{3}} - 8y^4 - 4y^3\right) \mathrm{d}y = \frac{3}{20} + \frac{3}{28} - \frac{1}{20} - \frac{1}{16} = \frac{81}{560}.$$

Souvislost násobných integrálů přes základní oblasti s objemem je stejná jako u obdélníků. Ověříme, že oba násobné integrály vyhovují axiomům aditivity a monotonie. To je úkol nevyžadující žádnou zvláštní invenci. Jednoduše kopírujeme důkaz obdobného tvrzení pro obdélníky (Věta 2.5). Co je však důležité, je z tohoto pohledu Věta 2.9. Podle ní zobrazení $V(f,T)$ existuje pouze jediné a tudíž se musí rovnat našim násobným integrálům:

$$V(f,T) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \qquad \Big(\text{eventuelně} \int_{b_1}^{b_2} \int_{p_1(y)}^{p_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big),$$

v závislosti na typu základní oblasti. Obě pořadí integrace dají stejnou hodnotu. Je to opět Fubiniova věta pro tuto situaci. Výše uvedené násobné integrály se nemusí omezovat pouze na nezáporné funkce. Definujeme proto *dvojný integrál* obecné spojité funkce jako

Definice 2.13. *Nechť T je základní oblast a nechť $f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce.* **Dvojný integrál** *funkce f přes množinu T je*

$$\iint\limits_T f = \int\limits_{a_1}^{a_2} \int\limits_{s_1(x)}^{s_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \qquad \Big(\textit{event.} \int\limits_{b_1}^{b_2} \int\limits_{p_1(y)}^{p_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big)$$

pro oblast typu (a), (eventuelně pro oblast typu (b)).

V praktických výpočtech je důležité mít představu o tvaru oblasti T a na základě toho zvolit vhodné pořadí pro násobný integrál. Podle toho, co jsme dosud uvedli, by mohl vzniknout mylný dojem, že pro daný typ oblasti je možné použít jen jediné pořadí integrace. Opak je pravdou. Pořadí integrálů si můžeme zvolit zcela libovolně. Jiná věc je ale složitost výpočtu. Obecně platí, že vnější integrace podle proměnné x je výhodnější pro oblasti typu (a) a podle proměnné y pro oblasti typu (b).

Zatím jsme integrovali funkce spojité na základní oblasti T. V mnoha případech však funkce, které potřebujeme integrovat jsou spojité pouze ve vnitřku T a na hranici nemusí být vůbec definovány. Např. funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

je spojitá ve vnitřku jednotkového čtverce $T = \langle 0,1\rangle^2$. V některých hraničních bodech není definována (úsečky $\{0\} \times \langle 0,1\rangle$ a $\langle 0,1\rangle \times \{0\}$). Pro takovou funkci f jsme – přísně vzato – dvojný integrál nedefinovali. Abychom odstranili tuto potíž zavedeme integrál přes přes základní oblast i pro funkce spojité pouze na vnitřku T. (Vnitřek množiny T je $T \setminus \partial T$, kde ∂T je hranice, viz [1], Kapitola 1 nebo v těchto skriptech Definice 11.1).

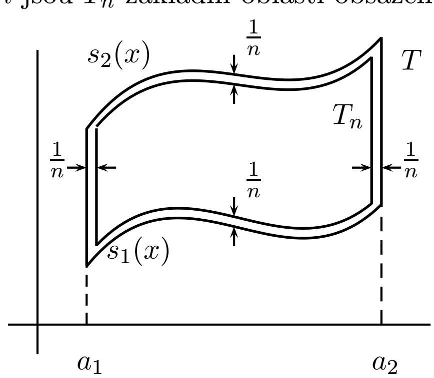
Nechť T je základní oblast např. typu (a) z obr.2.3

$$T = \Big\{(x,y) \mid x \in \langle a_1, a_2\rangle,\ s_1(x) \le y \le s_2(x)\Big\}$$

a nechť $s_1(x) < s_2(x)$ na (a_1, a_2). Nechť dále f je nezáporná funkce spojitá na vnitřku T. Označíme

$$T_n = \Big\{(x,y) \;\Big|\; x \in \Big\langle a_1 + \frac{1}{n}, a_2 - \frac{1}{n}\Big\rangle,\ s_1(x) + \frac{1}{n} \le y \le s_2(x) - \frac{1}{n}\Big\}.$$

Pak pro dostatečně velká n jsou T_n základní oblasti obsažené ve vnitřku T, viz obr. 2.8.



Obr. 2.8.

Oblasti T_n se zvětšují s rostoucím n, $T_n \subset T_{n+1}$, a sjednocení všech $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ dá celý vnitřek T. Funkce f je spojitá na každém T_n. Pro ni máme integrál definován, $\iint_{T_n} f$. Definujeme nyní

$$\iint_T f = \lim_{n\to\infty} \iint_{T_n} f. \tag{2.13}$$

Integrál $\iint_T f$ může být nyní i nekonečný, což se v případě funkce spojité na celém T stát nemohlo.

Je-li nyní f obecná spojitá funkce na vnitřku T (tj. už nikoli jen nezáporná), rozložíme ji už známým způsobem na kladnou a zápornou část

$$f = f_+ - f_-, \quad f_+ = \max\{f, 0\},\ f_- = \max\{-f, 0\}.$$

Existují-li konečné oba integrály $\iint_T f_+$ a $\iint_T f_-$, pak položíme

$$\iint_T f = \iint_T f_+ - \iint_T f_-.$$

V opačném případě říkáme, že integrál $\iint_T f$ neexistuje.

Závěrem této kapitoly uvedeme jednoduché základní vlastnosti dvojného integrálu, které snad ani nepotřebují důkaz. Všechny vyplývají bezprostředně z definice.

Věta 2.14. *Nechť f a g jsou spojité funkce na vnitřku základní oblasti T a nechť existují $\iint_T f$ a $\iint_T g$. Pak platí*

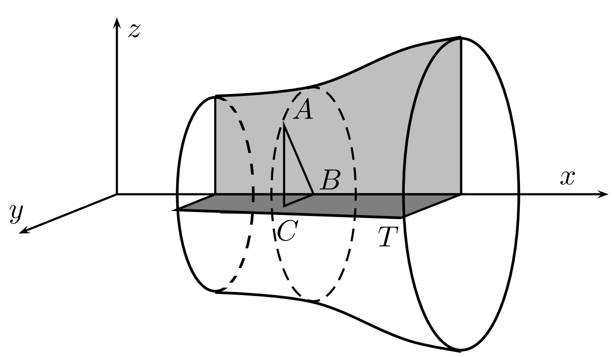
(i) $$\iint_T (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_T f + \beta \iint_T g \quad \textit{pro každé } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

(ii) *Je-li $f \geq g$ na T, pak* $$\iint_T f \geq \iint_T g.$$

Příklad 2.15. V integrálním počtu jedné proměnné jsme odvodili vzorec pro objem rotačního tělesa. Jestliže množina omezená shora grafem funkce h na intervalu $\langle a_1, a_2 \rangle$ rotuje kolem osy x, tak objem vzniklého tělesa je

$$V = \pi \int_{a_1}^{a_2} h^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

K témuž vzorci je možné dospět i tak, že budeme počítat objem pomocí dvojného integrálu. Situaci máme zachycenou na obr. 2.9.



Obr. 2.9.

Budeme počítat čtvrtinu celkového objemu. Ta je reprezentována částí tělesa ležícího nad množinou T. Podstava T má zápis

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \langle a_1, a_2 \rangle, \quad 0 \le y \le h(x) \right\}.$$

Ještě je třeba určit funkci $f(x, y)$, jejíž graf omezuje těleso nad množinou T. V obrázku máme vyznačen pravoúhlý trojúhelník ABC. Nechť bod $C \in T$ má souřadnice $C = (x, y)$. Pak velikost odvěsny BC je y a velikost přepony AB je $h(x)$. Naše hledaná hodnota $f(x, y)$ je pak velikost AC. Z Pythagorovy věty plyne

$$f^2(x, y) + y^2 = h^2(x), \text{ tj. } \quad f(x, y) = \sqrt{h^2(x) - y^2}.$$

Nyní můžeme psát, že celkový objem V je roven

$$V = 4 \iint_T f = 4 \int_{a_1}^{a_2} \int_0^{h(x)} \sqrt{h^2(x) - y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

Pro výpočet vnitřního integrálu užijeme substituci $y = h(x) \sin t$. Takže

$$\int_0^{h(x)} \sqrt{h^2(x) - y^2} \, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{h^2(x) - h^2(x) \sin^2 t} \; h(x) \cos t \, \mathrm{d}t = h^2(x) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, \mathrm{d}t =$$

$$= h^2(x) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} h^2(x).$$

Dosazením do původního integrálu tak máme

$$V = 4 \int_{a_1}^{a_2} \frac{\pi}{4} h^2(x) \, \mathrm{d}x = \pi \int_{a_1}^{a_2} h^2(x) \, \mathrm{d}x.$$

Poznámka 2.16. Povšimněme si jednoduché, ale velmi důležité interpretace dvojného integrálu z konstantní funkce rovné 1. Víme, že $\iint_T 1$ je objem tělesa s podstavou T shora omezeného rovinou $z = 1$. Tento objem je však číselně roven obsahu T. Budeme si proto pamatovat, že

$$\text{obsah}(T) = \iint_T 1.$$

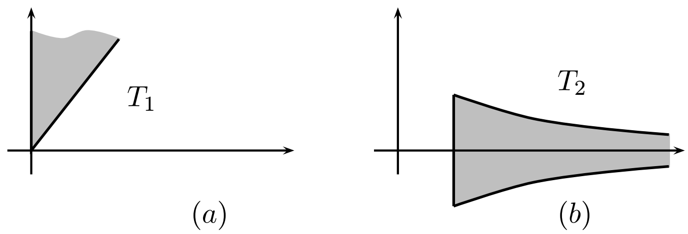
Závěrem se zastavme u otázky, jak počítat integrály přes neomezené základní oblasti. Příklady takových oblastí je např. množina

$$T_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y \right\}$$

nebo

$$T_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1,\ |y| \leq \frac{1}{x} \right\},$$

viz obr. 2.10.



Obr. 2.10.

S touto úlohou si poradíme stejně, jako v případě neomezených obdélníků.

Definice 2.17. *Nechť $T \subset \mathbb{R}^2$ je neomezená základní oblast a nechť $f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná na vnitřku T. Položíme $T_n = T \cap \big(\langle -n, n\rangle \times \langle -n, n\rangle\big)$. Existuje-li vlastní $\lim_{n\to\infty} \iint_{T_n} f$, řekneme, že integrál $\iint_T f$ existuje a jeho hodnota je rovna limitě*

$$\iint\limits_{T} f = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{T_n} f.$$

V případě obecné spojité funkce postupujeme analogicky jako v při definici integrálu přes neomezené obdélníky. Funkci f rozložíme na kladnou a zápornou část $f = f_+ - f_-$, kde $f_+ = \max\{f, 0\}$ a $f_- = \max\{-f, 0\}$. Existují-li vlastní integrály $\iint_T f_+$ a $\iint_T f_-$, pak položíme

$$\iint\limits_{T} f = \iint\limits_{T} f_+ - \iint\limits_{T} f_-.$$

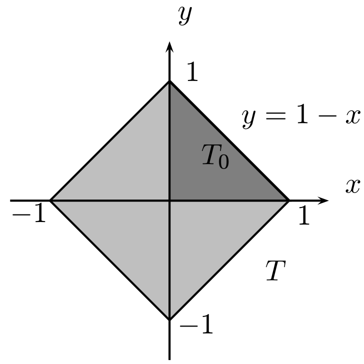
V opačném případě říkáme, že $\iint_T f$ neexistuje.

4 Cvičení.

Úloha. Vypočtěte

$$\iint\limits_{T} x^2 + y^2,$$

kde T je množina omezená křivkou $|x| + |y| = 1$.



Obr. 2.11.

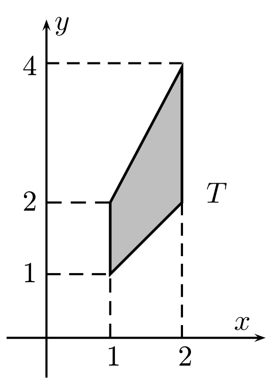
Řešení. V prvním kroku si musíme množinu T alespoň v hrubých rysech nakreslit. V našem případě si uvědomíme, že změna znaménka u souřadnice x nebo y nemá vliv na tvar množiny. Jinými slovy to znamená, že T je symetrická jak podle osy x, tak podle osy y. Stačí tedy zjistit její tvar v 1. kvadrantu, kde $x \geq 0$ a $y \geq 0$. Zde je T omezena přímkou $x + y = 1$. Označme symbolem T_0 množinu bodů v 1. kvadrantu ležící pod přímkou $x + y = 1$. Celá množina T je pak na obr. 2.11. Rovněž hodnota integrované funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ se nezmění při záměně $x \to -x$ a $y \to -y$. Stačí tedy integrovat přes T_0 a výsledek vynásobit čtyřmi. T_0 je základní oblast omezená shora grafem funkce $y = 1 - x$ a zdola $y = 0$. Tím

$$\iint_T x^2 + y^2 = 4 \iint_{T_0} x^2 + y^2 = 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= 4 \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) \mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

Úloha. Změňte pořadí integrace v integrálu

$$\int_1^2 \int_x^{2x} f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$



Obr. 2.12.

Řešení. Zjistíme nejprve, přes jakou množinu se vlastně integruje. Z vnějšího integrálu vidíme, že

$$1 \leq x \leq 2.$$

Z vnitřního pak

$$x \leq y \leq 2x.$$

Tyto dvě podmínky určují základní oblast T zobrazenou na obr. 2.12.

Při změně pořadí bude vnější integrace podle proměnné y. Průmět T do osy y je interval $\langle 1, 4 \rangle$. Proto bude první integrál v mezích od 1 do 4. Ale pozor!Je-li $y \in \langle 1, 2 \rangle$, pak T je omezeno zleva přímkou $x = 1$ a zprava přímkou $x = y$. V našem označení to jsou funkce $p_1(y) = 1$ a $p_2(y) = y$. Pro $y \in \langle 2, 4\rangle$ je T omezeno grafy jiných funkcí: $x = y/2$ a $x = 2$, tj.

$$p_1(y) = \frac{y}{2} \quad \text{a} \quad p_2(y) = 2.$$

Musíme tak integraci přes y rozdělit do dvou integrálů; první pro $y \in \langle 1, 2\rangle$ a druhý pro $y \in \langle 2, 4\rangle$. Výsledek je pak

$$\int_1^2 \int_x^{2x} f \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_1^2 \int_1^y f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + \int_2^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Úloha. Vypočtěte hmotnost čtverce se stranou $2a$, je-li jeho plošná hustota úměrná druhé mocnině vzdálenosti od středu a její maximum je 1.

Řešení. Čtverec označený T si umístíme tak, aby jeho střed byl v počátku souřadnic a strany rovnoběžné s osami. Pak

$$T = \langle -a, a\rangle \times \langle -a, a\rangle.$$

Protože hustota $\rho(x, y)$ je úměrná druhé mocnině vzdálenosti od středu, musí mít tvar $\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$, kde k je konstanta úměrnosti. Navíc víme, že maximální hodnota ρ je 1. Ta se zřejmě nabývá v nejvzdálenějších bodech, což jsou právě vrcholy $(\pm a, \pm a)$. Tím

$$1 = \rho(\pm a, \pm a) = k(a^2 + a^2) = 2ka^2, \quad \text{tj. } k = \frac{1}{2a^2}.$$

Hmotnost m je tak možno vyjádřit

$$m = \iint_T \rho = \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a^2}(x^2 + y^2) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \frac{4}{2a^2} \int_0^a \int_0^a x^2 + y^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}a^2.$$

Úloha. Zjistěte těžiště základní oblasti M omezené shora parabolou $y = \sqrt{2px}$, $x \in \langle 0, 2p\rangle$ a osou x. Plošná hustota je $\rho = 1$.

Řešení. Základní oblast M je popsána

$$M = \Big\{(x, y) \mid x \in \langle 0, 2p\rangle,\ 0 \le y \le \sqrt{2px}\Big\}.$$

Pro souřadnice těžiště (x_t, y_t) platí

$$x_t = \frac{\iint_M x\rho}{\iint_M \rho}, \qquad y_t = \frac{\iint_M y\rho}{\iint_M \rho}.$$

Musíme tak vypočítat všechny tři dvojné integrály.

$$\iint_M x\rho = \int_0^{2p}\int_0^{\sqrt{2px}} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{2p} \sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{16}{5}p^3,$$

$$\iint_M y\rho = \int_0^{2p}\int_0^{\sqrt{2px}} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{2p} \frac{1}{2}\,2px\,\mathrm{d}x = 2p^3$$

$$\iint_M 1 = \int_0^{2p}\int_0^{\sqrt{2px}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{2p} \sqrt{2px}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}p^2.$$

Nyní můžeme dosadit do vztahů pro souřadnice těžiště a dostáváme, že těžiště množiny M je bod $(\frac{6}{5}p, \frac{3}{4}p)$.

V následujících příkladech vypočtěte dvojné integrály přes zadané základní oblasti.

1. $\iint_T 1$ — T je omezena křivkami $y = 2 - x,\ y^2 = 4x + 4$,
2. $\iint_T \left(\frac{x}{y}\right)^2$ — T je omezena křivkami $x = 2,\ y = x,\ xy = 1$,
3. $\iint_T x^2 + y$ — T je omezena křivkami $y = x^2,\ x = y^2$,
4. $\iint_T 2x + y$ — T je omezena křivkami $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 3$,
5. $\iint_T \cos(x + y)$ — T je omezena křivkami $x = 0,\ y = \pi,\ y = x$,
6. $\iint_T x^2 + y^2$ — T je omezena křivkami $y = 0,\ y = 1 - x,\ y = 1 + x$,
7. $\iint_T e^{\frac{x}{y}}$ — T je omezena křivkami $x = y^2,\ x = 0,\ y = 1$,
8. $\iint_T \sqrt{4x^2 - y^2}$ — T je omezena křivkami $y = 0,\ x = 1,\ y = x$,
9. $\iint_T x$ — T je omezena křivkami $y = 2x - 1,\ y = 4 - (1 - x)^2$,
10. $\iint_T \frac{1}{\sqrt{ax - x^2}}$ — T je omezena křivkami $x = 0,\ y^2 = a^2 - ax$.

V následujících integrálech změňte pořadí integrace:

11. $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

12. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

13. $\displaystyle\int_0^a \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

14. $\displaystyle\int_0^2 \int_{2x}^{6-x} f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

15. $\displaystyle\int_{-6}^2 \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

16. $\displaystyle\int_0^\pi \int_0^{\sin x} f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

17. $\displaystyle\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

18. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_0^{2-x} f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

19. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^3 \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

20. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

21. $\displaystyle\int_{-3}^0 \int_{-x}^3 f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_0^3 \int_x^3 f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

22. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{2x^2} f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_2^4 \int_0^{10-x} f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_4^7 \int_{x-4}^{10-x} f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Vypočtěte následující integrály přes neomezené oblasti:

23. $\displaystyle\iint_T \frac{1}{x^p y^q},\qquad T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1,\ xy \geq 1\}$

24. $\displaystyle\iint_T e^{-(x+y)},\qquad T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$

25. $\displaystyle\iint_T \frac{1-\ln x}{y^3},\qquad T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq y\}$

26. $\displaystyle\iint_T e^{-y^2},\qquad T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$

27. $\displaystyle\iint_T x\, e^{-y} \frac{\sin y}{y},\qquad T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{y}{2}\right\}$

28. $\displaystyle\iint_T \frac{y}{1+x^2}, \qquad T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right\}$

V následujících příkladech vypočtěte souřadnice těžiště daných homogenních množin, tj. hustota $\rho = 1$:

29. Množina T omezená křivkami $y = 2x^3$ a $y^2 = 4x$.

30. Množina T omezená parabolou $y = 2x - 3x^2$ a osou x.

31. Nechť K je polovina kruhu s poloměrem R, $K = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ y \geq 0\}$. Označme $A = (R,0)$ a $B = (-R,0)$. Zavěsíme-li volně půlkruh v bodě A, vypočtěte, jaký úhel α bude svírat úsečka AB se svislým směrem. Plošná hustota je $\rho = 1$.

32. Nechť množina A je omezena parabolou $y = 1 - ax^2$, $a > 0$ a osou x. Určete hodnotu parametru b tak, aby parabola $y = bx^2$ rozdělila množinu A na dvě části stejného obsahu.

Výsledky.

1. $\frac{64}{3}$; 2. $\frac{9}{4}$; 3. $\frac{33}{140}$; 4. $\frac{27}{2}$; 5. -2; 6. $\frac{1}{3}$; 7. $\frac{1}{2}$; 8. $\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{9}$; 9. 0; 10. $4a$;

11. $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$; 12. $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; 13. $\displaystyle\int_0^a \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{y} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; 14. $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{y/2} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_4^6 \int_0^{6-y} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; 15. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \int_{-2\sqrt{x+1}}^{2\sqrt{x+1}} + \int_0^8 \int_{-2\sqrt{x+1}}^{2-x} f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$; 16. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

17. $\displaystyle\int_a^{2a} \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_0^a \left(\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} + \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} \right) f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; 18. $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{2-y} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

19. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; 20. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{-x}^{x} + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ 21. $\displaystyle\int_0^3 \int_{-y}^{y} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

22. $\displaystyle\int_0^3 \int_{\sqrt{y/2}}^{y+4} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_3^8 \int_{\sqrt{y/2}}^{10-y} f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; 23. $\frac{1}{(p-q)(q-1)}$, $p > q$, $q > 1$; 24. $\frac{1}{2}$; 25. $-\frac{\ln 2}{4}$;

26. $\frac{1}{2}$; 27. $\frac{1}{16}$; 28. $\frac{\pi}{8}$; 29. $(\frac{12}{15}, \frac{6}{7})$; 30. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{15})$; 31. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3\pi}$, $\alpha \approx 23°$; 32. $b = 3a$.