Otázka 04 - Y01MA1

Zadání

Primitivní funkce, určitý integrál. Metody výpočtu: substituce a per partes. Užití a význam integrálu. (Y01MA1)

Slovníček pojmů

- Integrand je funkce, která je integrována - to, co je mezi $\int$ a dx.
- dx je diferenciál - určuje, podle které proměnné se má integrovat.
- Integrační proměnná je proměnná, podle které se integruje.
- C je integrační konstanta - konstanta, o kterou se mohou lišit jednotlivé primitivní funkce jedné funkce.
- a je dolní mez - od které hodnoty určitý integrál počítáme ($\int_a^b$).
- b je horní mez - do které hodnoty určitý integrál počítáme ($\int_a^b$).

Newtonův integrál (primitivní funkce)

Více o Newtonovu integrálu [http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/1/txc3da1c.htm]

Primitivní funkce

Definujeme funkci f na intervalu I. Řekneme, že funkce F na I je primitivní funkcí k f na I, jestliže F je spojitá na I a platí $F'(x)=f(x)$ pro všechna x z otevřeného intervalu I. Jestliže taková funkce na I existuje, pak říkáme, že f je (Newtonovsky) integrovatelná na I.

Hledání primitivní funkce

V prvním příkladu si jednoduše ukážeme ověření primitivní funkce.

Příklad: Funkce $F(x)=3x-1$ je primitivní funkce k $f(x)=3$ na intervalu $(0,13)$

F je zjevně spojitá na celé reálné ose, takže je určitě spojitá na intervalu $(0,13)$ a pro $\forall x\in(0,13)$ platí $F'(x)=[3x-1]'=3=f(x)$

V dalším příkladu zkusíme najít další primitivní funkce k $f(x)=3$.

Příklad: Podle zkušeností s derivováním by nás nemělo překvapit, že pro libovolnou konstantu C je funkce $3x+C$ primitivní funkcí k $f(x)=3$ na libovolném daném intervalu. Následující věta říká, že přičtení konstanty k již známé primitivní funkci je jediný způsob, jak získat jiné primitivní funkce.

Věta. Nechť F je primitivní funkce k f na nějakém intervalu I.
(i) Pro libovolnou konstantu C je funkce $G(x)=F(x)+C$ rovněž primitivní funkcí k f na I.
(ii) Jestliže je H jiná primitivní funkce k f na I, pak existuje konstanta C taková, že $H(x)=F(x)+C$ pro všechna x z I.

Příklad: Najděte primitivní funkci F k funkci $f: y=3x^2-2x$ v $\mathbb{R}$.
Lze celkem snadno usoudit, že člen $3x^2$ vznikl derivací x^3 a člen $2x$ derivací x^2.
Primitivní funkcí tedy bude: $F(x)=x^3-x^2$.
Snadno se vždy přesvědčíme o správnosti nalezené primitivní funkce derivováním. Derivací primitivní funkce musí být funkce daná. To samozřejmě platí: $F'(x)=[x^3-x^2]'=3x^2-2x$.

Ale co kdyby někdo prohlásil, že primitivní funkcí k naší funkci f je také funkce $G(x)=x^3-x^2+1$, protože: $G'(x)=[x^3-x^2+1]'=3x^2-2x=f(x)$.

Samozřejmě má pravdu. Navíc to platí nejen pro jedničku, ale pro jakoukoliv konstantu C, protože po zderivování „zmizí“.
Množinou všech primitivních funkcí k funkci $f: y=3x^2-2x$ je funkce $F: y=x^3-x^2+C$

Newtonův integrál

Definujeme množinu všech primitivních funkcí na dané množině, tuto množinu zapíšeme takto $\int f(x)dx$. Říká se tomu Newtonův integrál funkce f na I.
Použijeme poslední větu z hledání primitivních funkcí, která nám přesně říká, jak množina primitivních funkcí vypadá. Obvykle tuto množinu - Newtonův integrál - zapisujeme takto: $\int f(x)dx=F(x)+C, x\in I, C\in\mathbb{R}$

Proces nalezení primitivní funkce se nazývá integrování.

Příklad: První příklad může být také zapsán takto:
$\int 3(dx)=3x+C; x\in(0,13)$

Pokud není interval nějak zadán, snažíme se při integraci pracovat na co největším intervalu, kde je to možné. Říká se tomu definiční obor integrálu. Získá se proniknutím definičního oboru integrované funkce s definičním oborem nalezené primitivní funkce, případně odejmutím bodů, kde tato primitivní funkce existuje, ale jsou nějaké problémy s derivací. U výše zmíněného příkladu bychom jako definiční obor dali celou množinu reálných čísel.

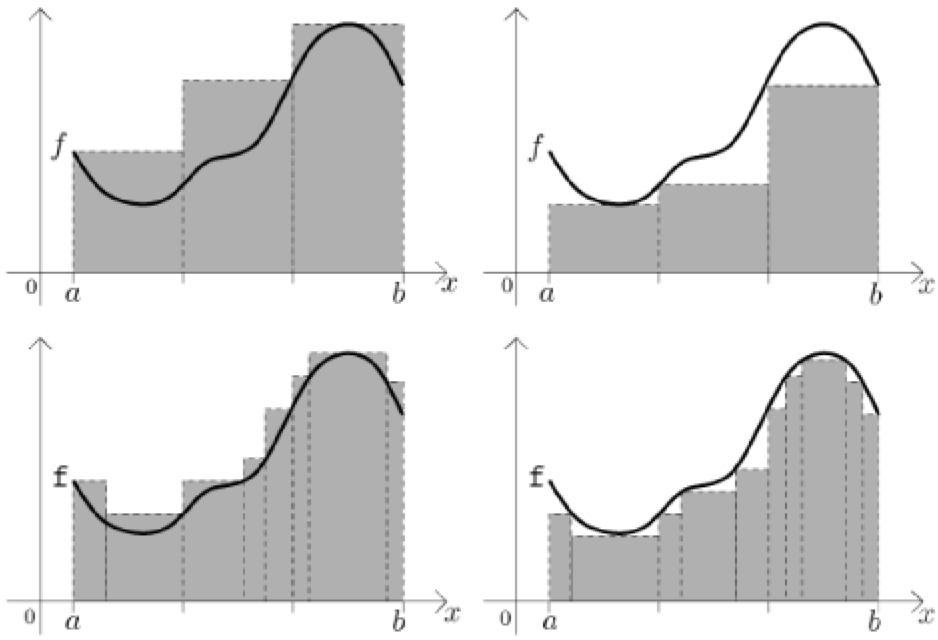
Protože definiční obor je ten největší interval, na kterém můžeme integrovat, daný výsledek lze také použít na libovolném „podintervalu“. Z definice je zřejmé, že pokud je F primitivní funkcí k f na nějakém intervalu I a J je interval, který je podmnožinou I, pak F je také primitivní funkce k f na J.

Z příkladu lze vyvodit, že integrování jako „opak“ derivování.

Riemannův (určitý) integrál

Více o Riemannovu integrálu [http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/1/txc3da1a.htm]

Definice Riemannova integrálu vychází z intuitivní představy měření obsahu plochy pod grafem funkce. Chceme-li přibližně zjistit tento obsah, provedeme to v praxi pravděpodobně tak, že položíme do měřené plochy nějaké geometrické útvary, jejichž obsah dovedeme spočíst, tak, aby nepřesahovaly hranici měřené oblasti a vzájemně se nepřekrývaly. Sečtemi-li nyní obsahy všech vložených útvarů, dostaneme zřejmě číslo, které je menší než obsah měřené plochy — tzv. dolní odhad. Obdobně (pokrytím celé měřené plochy známými útvary) získáme tzv. horní odhad. Obsah měřené plochy pak leží mezi dolním a horním odhadem. Budeme-li používat k vykládání plochy stále menší a menší útvary, dokážeme oba odhady stále zpřesňovat, až teoreticky při vyložení plochy nekonečně mnoha nekonečně malými útvary dosteneme horní i dolní odhad roven stejnému číslu — obsahu měřené plochy. Pro jednoduchost se při zavádění Riemannova integrálu používají za ony útvary, jimiž se plocha vykládá, obdélníky se stranami rovnoběžnými s osami soustavy souřadnic.



Příklad:

$$\int_1^4 x^2 - 4\sqrt{x} + \frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \ln|x|\right]_1^4 = \left(\frac{4^3}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{4^3} + \ln 4\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{8}{3} + \ln 1\right) = \frac{7}{3} + \ln 4$$

Metody výpočtu

Tabulkové integrály

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\; x > 0;\; a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,\; x \neq 0$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

$$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C$$

$$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + C,\; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\cot(x) + C,\; x \neq k\pi$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx = \tanh(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2(x)}\,dx = -\coth(x) + C,\; x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C,\ x \in (-1, 1)$$

Substituce

Více o substituci [http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/3/txc3da3c.htm]

Přímá substituce

Věta (o přímé substituci)

Nechť f je funkce definovaná na intervalu I, která tam má primitivní funkci F. Nechť g je funkce z intervalu J do intervalu I, která je diferencovatelná na J. Pak F(g) je primitivní funkce k f(g)g' na J:

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x)\,dx = \left.\left(\int f(y)\,dy\right)\right|_{y=g(x)}$$

Poznámka: Tato věta nám vlastně říká, co se stane, když se pokusíme o transformaci proměnné (tj. o přechod od jedné proměnné k jiné) vztahem y=g(x). Ukazuje se, že diferenciál nové proměnné dy je dán rovnicí dy=g'(x)dx. Je to vlastně docela přirozené, protože pokud zderivujeme obě strany rovnice y=g(x) za použití Leibnizova značení, dostaneme (pouze symbolicky!) rovnost:

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) \text{->} dy = g'(x)\,dx$$

Postup:

Přímá substituce se dá ve zkratce vyjádřit tímto postupem:

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x)\,dx = \left|\begin{matrix} y=g(x) \\ dy=g'(x)\,dx \end{matrix}\right| = \int f(y)\,dy = F(y) + C = F\left(g(x)\right) + C$$

Všimněte si, že opravdu doslovně nahrazujeme všechny výskyty funkce g(x) symbolem y a g'(x)dx nahrazujeme symbolem dy. Pokud nám po těchto nahrazeních zbyly v integrálu nějaké x, zvolená substituce se na příklad (doslovně podle věty) nehodí. V praxi je ovšem příkladů, které se takto ideálně hodí, málo. Můžeme si často pomoci tím, že ze základního vztahu y=g(x) algebraickými úpravami získáme další vztahy, které potřebujeme při převodu integrálu do proměnné y. Ukážeme si to na následujících příkladech. Je ovšem nutno mít na paměti, že pak už nepoužíváme přesně matematickou větu o přímé substituci, takže výsledek nemusí být vždy správně. Je tedy opravdu nutno udělat zkoušku derivací výsledku (což se ostatně u integrálů doporučuje vždy).

1. V integrálu se vybere vhodný matematický výraz g(x) a označí nějakým písmenem, například y.
2. Ze vzniklé rovnice y=g(x) se získají další vztahy potřebné pro převod integrálu. Obzvláště důležitý je převod diferenciálu dx, který získáme diferencováním základní rovnice; obdržíme dy=g'(x)dx.
3. Původní integrál převedeme z formulí obsahujících x do tvaru obsahujícího pouze y. Ten pak dále řešíme.
4. Vyřešený integrál je nějaká funkce s proměnnou y. Musíme proto dosadit zpět y=g(x), neboť výsledek integrálu s proměnnou x musí rovněž používat proměnnou x.

Příklad:

$$\int \cot(x)\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \int \frac{1}{\sin(x)} \cos(x)\,dx = \left|\begin{matrix} y=\sin(x) \\ dy=\cos(x)\,dx \end{matrix}\right| = \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + C = \ln|\sin x| + C,\ x \neq k\pi$$

Příklad:

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \left|\begin{matrix} y=\ln(x) \\ dy=\frac{dx}{x} \end{matrix}\right| = \int y\,dy = \frac{1}{2} y^2 + C = \frac{1}{2} \ln^2(x) + C,\ x > 0$$

Per partes

Více o per partes [http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/3/txc3da3d.htm]

Metoda je založena na této větě:
Nechť f a g jsou funkce diferencovatelné na intervalu I. Pak fg' je integrovatelná na I právě tehdy, je-li f'g integrovatelná na I, a platí:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Metoda vypadá následovně:

1. Vyjádříme si integrand jako součin dvou funkcí, jeden činitel označíme jako f(x), druhý jako g'(x).
2. Dopočítáme si ostatní výrazy z formule. Jmenovitě, f'(x) obdržíme derivováním funkce f(x); g(x) získáme z funkce g'(x) integrováním.
3. Dosadíme do formule. Per partes je hotovo a můžeme se pokusit o vyřešení integrálu na pravé straně rovnosti.

Příklad:

$$\int x\cos(x)dx = \left| \begin{matrix} f(x)=x & g'(x)=\cos(x) \\ f'(x)=1 & g(x)=\int\cos(x)dx=\sin(x) \end{matrix} \right| = x\sin(x) - \int 1\times\sin(x)dx = x\sin(x) - \int\sin(x)dx = x\sin(x)+\cos(x)+$$

, $x \in \mathbf{R}$

Případně je možné použít vzorec v diferenciálním tvaru:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Příklad:

$$\int x e^x dx = \left| \begin{matrix} u=x & v'=e^x \\ u'=1 & v=e^x \end{matrix} \right| = x e^x - \int 1e^x dx = x e^x - e^x + C\text{ , } x \in \mathbf{R}$$

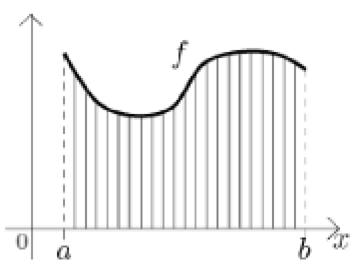
Užití

- **Průměr funkce [http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/5/txc3da5a.htm]**
- **Obsah rovinného útvaru [http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/5/txc3da5b.htm]**
- **Délka křivky [http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/5/txc3da5c.htm]**
- **Objem rotačního tělesa [http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/5/txc3da5d.htm]**
- **Povrch rotačního tělesa [http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/5/txc3da5e.htm]**
- **Hmotnost a těžiště rovinných útvarů a rotačních těles [http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/5/txc3da5f.htm]**

Průměr funkce

Nechť f je funkce na intervalu a,b. Chceme spočítat její průměr. Umíme najít průměr konečného počtu čísel - sečteme je a vydělíme jejich počtem. Teď se pokusíme aplikovat tuto myšlenku na funkci na intervalu.

Rozdělme interval <a,b> na disjunktní podintervaly velikosti dx (viz zde [http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/1/txc4da1a.htm] pro vysvětlení dx) a pak rozdělme oblast pod grafem f na odpovídající svislé pruhy.



Protože tyto podintervaly jsou tak malé, změnu f uvnitř každého z nich můžeme ignorovat. Průměr f lze tedy zjistit spočítáním průměru výšek všech pruhů. Kolik těchto pruhů máme? To je jednoduché, každý pruh má šířku dx a dohromady musí dát velikost intervalu <a,b>. Průměr f by tedy měl být

$$\frac{\sum\limits_{x=a}^{x=b} f(x)}{\frac{|b-a|}{dx}} = \frac{\sum\limits_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx}{b-a} \sim \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

Tato úvaha vede k následující definici průměru dané funkce, zvaného také střední hodnota:

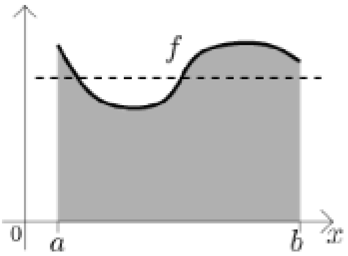
Definice.
Nechť f je Riemannovsky integrovatelná funkce na <a,b>. Definujeme průměr f na tomto intervalu vzorcem

$$\operatorname*{Ave}_{\langle a,b\rangle}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

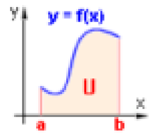
Všimněte si, že dostáváme

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\operatorname*{Ave}_{\langle a,b\rangle}(f).$$

Toto je zajímavé ze dvou důvodů. Za prvé, podle Věty o střední hodnotě pro integrály [http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/1/txc3da1e.htm#mvti], pokud je f spojitá, pak musí nabývat svého průměru v nějakém bodě z <a,b>. Všimněte si, že spojitost je naprosto nutná. Stačí si vzpomenout na příklad skokové funkce [http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/1/txc4da1b.htm]. Její průměr na <0,2> je 3/2, ale tato funkce není nikdy rovna 3/2.



Výpočet plochy pod křivkou grafu

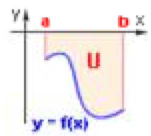


Mějme dánu spojitou a nezápornou funkci f v intervalu <a,b>.

Potom učitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ **udává obsah útvaru U (na obrázku) ohraničeného grafem funkce** f **, osou** x **a přímkami** $x=a$ **,** $x=b$ **. Příklad:**

$$\int_0^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2 - 0 = \underline{\underline{2}}$$

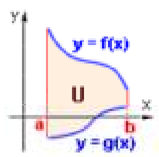
Pokud funkce $y=f(x)$ **v intervalu** $\langle a,b\rangle$ **nabývá nekladných hodnot, pak vypočteme absolutní hodnotu příslušného určitého integrálu:**



$$S(U) = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Jestliže funkce $y=f(x)$ **nabývá v intervalu** $\langle a,b\rangle$ **jak kladných, tak i záporných hodnot, potom tento interval rozdělíme na dílčí intervaly, ve kterých funkce nabývá pouze nekladných hodnot resp. nezáporných hodnot a vypočteme obsahy podle předcházejících úvah.**

Výpočet plochy ohraničené dvěma a více grafy



Je-li rovinný útvar ohraničený dvěma křivkami $y=f(x)$ **shora a** $y=g(x)$ **zdola (**f **,** g **jsou spojité funkce a platí** $g(x) \leq f(x); \forall x \in \langle a,b\rangle$ **- viz obrázek), potom pro jeho obsah platí:**

$$S(U) = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

Vztah platí i v případě, že některá z funkcí nabývá záporných hodnot (jako je tomu na obrázku u funkce g).

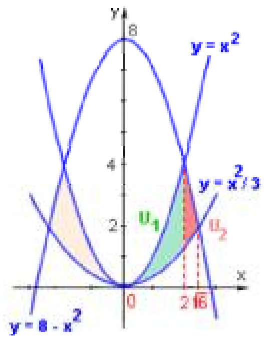
Jestliže víme, že křivky y = f(x) , y = g(x) se v intervalu (a,b) neprotínají, nemusíme zjišťovat, zda f(x) > g(x) nebo f(x) < g(x). Vypočteme absolutní hodnotu z integrálu rozdílu funkcí:

$$S(U)=\left|\int_a^b f(x)-g(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b g(x)-f(x)\,dx\right|$$

Plocha ohraničená křivkami musí vždy vyjít jako kladné číslo, pokud ne, někde je chyba.

Jestliže je útvar omezen třemi a více křivkami, je třeba ho rozložit na několik částí.
Příklad:

Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $f: y=x^2$ **,** $g: y=\frac{x^2}{3}$ **,** $h: y=8-x^2$



Všechny křivky jsou paraboly - viz obrázek. Útvar je souměrný podle osy y. Stačí tedy vypočítat obsah části pro kladné hodnoty x a vynásobit dvěma. Tuto pravou část musíme rozdělit na dvě části U1 a U2. Abychom určili meze integrálu, musíme zjistit průsečíky křivek f **,** h **a** g**,** h**. Řešíme rovnici:** $8-x^2=x^2$

$8=2x^2 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 2$

x-ové souřadnice průsečíků f **,** h **jsou tedy** $x=-2$ **a** $x=2$**.**

$8-x^2=\frac{x^2}{3}$

$x^2=6 \Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{6}$

x-ové souřadnice průsečíků g**,** h **jsou tedy** $x=-\sqrt{6}$ **a** $x=\sqrt{6}$**.**

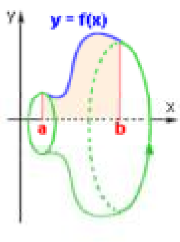
$$S(U)=2\left(S\left(U_1\right)+S\left(U_2\right)\right)=2\left(\int_0^2 x^2-\frac{x^2}{3}\,dx+\int_2^{\sqrt{6}}\left(8-x^2\right)-\frac{x^2}{3}\,dx\right)=2\left(\int_0^2 \frac{2}{3}x^2\,dx+\int_2^{\sqrt{6}} 8-\frac{2}{3}x^2\,dx\right)=\dots$$

$$\dots=2\left(\left[\frac{2}{9}x^3\right]_0^2+\left[8x-\frac{2}{9}x^3\right]_2^{\sqrt{6}}\right)=2\left(\frac{2}{9}2^3-\frac{2}{9}0^3+8\sqrt{6}-\frac{2}{9}\sqrt{6}^3-8.2+\frac{2}{9}2^3\right)=\dots$$

$$\dots=2\left(\frac{16}{9}+8\sqrt{6}-\frac{4}{3}\sqrt{6}-16+\frac{16}{9}\right)=2\left(\frac{28}{3}\sqrt{6}-\frac{112}{9}\right)=56\sqrt{6}-\frac{224}{9}$$

Výpočet objemu rotačního tělesa

Necháme-li rovinný útvar rotovat kolem osy x**, vznikne rotační těleso, jehož objem můžeme vypočítat pomocí určitého integrálu.**



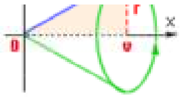
- **Nechť rotační těleso vznikne rotací křivky** $y=f(x)$ **kolem osy** x **(**f **je nezáporná spojitá funkce) v intervalu** $<a,b>$**. Potom jeho objem** V **vypočteme podle vztahu:**

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

- **Pokud rotační těleso vznikne rotací křivky** $x=f(y)$ **kolem osy** y **(**f **je nezáporná spojitá funkce) v intervalu** $<a,b>$**. Potom jeho objem** V **vypočteme podle vztahu:**

$$V=\pi\int_a^b f^2(y)\,dy$$

Příklad:
Odvoďte vzorec pro výpočet objemu rotačního kuželu s poloměrem podstavy r **a výškou** v**.**



Funkce f je přímka určená body $\left[0,0\right]$ a $\left[v,r\right]$. Její směrový vektor má souřadnice $\left(v,r\right)$ a normálový vektor $\left(r,-v\right)$. Rovnice přímky je tedy $rx-vy=0$.

Vyjádříme $y: y=\frac{rx}{v}$

Přímku bereme v intervalu <0,v>, to jsou také meze integrálu.

$$V=\pi\int_0^v \frac{r^2x^2}{v^2}\,dx=\pi\left[\frac{r^2}{v^2}\frac{x^3}{3}\right]_0^v=\pi\frac{r^2}{v^2}\frac{v^3}{3}=\underline{\pi\frac{r^2v}{3}}$$

Zdroje

- **Sbírka úloh [http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/obsah.html]**
- **Math Tutor [http://math.feld.cvut.cz/mt/]**
- **Reimannův integrál na český wikipedii [http://cs.wikipedia.org/wiki/Riemann%C5%AFv_integr%C3%A1l]**
- **Videa z přednášek [http://www.unitedfiles.com/index.php/all/matematika-1/matematika-1-12-11-2009-hodina-4/]**

spolecne/spol4.txt · Poslední úprava: 2010/03/18 01:29 autor: Batykar