

Checklist: Jak na limity

Typ: Dosadím a vyjde to. **Trik:** Dosadit limitní bod.

Používá se při tom často následujících faktů: (používáme L pro limitu, která konverguje, tj. existuje a je konečná):

- $\infty + \infty = \infty$, $\infty \pm L = \infty$,
- $\infty \cdot L = \infty$ pro $L > 0$, $\infty \cdot L = -\infty$ pro $L < 0$, $\infty \cdot \infty = \infty$,
- $\infty^L = \infty$ pro $L > 0$, $L^\infty = \infty$ pro $L > 1$, $L^\infty = 0$ pro $L \in (-1, 1)$, L^∞ neexistuje pro $L < -1$,
- $\frac{L}{\infty} = 0$, $\frac{L}{0^+} = \infty$, $\frac{L}{0^-} = -\infty$,
- $0^L = 0$ pro $L > 0$, $1^L = 1$, $L^0 = 1$ pro $L > 0$
- $e^\infty = \infty$, $\ln(\infty) = \infty$, $\ln(0^+) = -\infty$.

Záporné exponenty jsou zrádné a nejlépe se řeší pomocí $A^{-b} = \frac{1}{A^b}$.

Příklad: $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^n}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x) \ln(2e^x - 1)}{x^3 + 1}\right) = \frac{0}{1} = 0$.

Pozor: $\frac{1}{0}$ není hned vidět, jak ostatně plyne z $\frac{1}{0^\pm} = \pm\infty$. Pokud máme $\frac{1}{0}$, musíme se podívat na jednostranné limity. Pokud obě vyjdou shodně, je to ta limita. Pokud vyjdou různě, limita neexistuje.

Neurčitě výrazy: Hodí se vědět, kdy dosazení zklame:

- $0 \cdot \infty$: např. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n\right) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot n\right) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n^2\right) = \infty$,
- $\frac{\infty}{\infty}$: např. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n}\right) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2}\right) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n}\right) = \infty$,
- $\frac{0}{0}$: např. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{\sin(x)}\right) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}\right) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(x)}{\sin(x^2)}\right) = \infty$,
- $\infty - \infty$: např. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n + 13) - n) = 13$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - n^2) = -\infty$,
- $\infty^0, 1^\infty, 0^0$: např. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{c}{n}\right)^n\right] = e^c$ pro libovolné c .

Triky pro tyto výrazy přijdou níže.

Typ: Geometrická posloupnost. **Trik:** Pamatuji $a^n \rightarrow 0$ pro $|a| < 1$, $\{a^n\}$ diverguje pro $|a| > 1$, konkrétně $a^n \rightarrow \infty$ pro $a > 1$.

Příklad: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{n+1}}{2^{2n}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 \cdot 3^n}{(2^2)^n}\right) = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n}{4^n}\right) = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = 0$.

Typ: Limity v nekonečnu s polynomy, exponenciálami a podobně. **Trik:** Vytknou nejvyšší mocninu.

A tak zjistím, že polynom se chová v nekonečnu jako jeho vedoucí (největší) mocnina, což se hodí např. u zlomku.

Příklad: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}}\right) = \infty \frac{1 - 0}{1 + 0} = \infty \cdot 1 = \infty$.

Občas lze přímo pokrátit: $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}\right) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{(x+1)(x+2)}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow -1} (x + 2) = 1$.

Příklad: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(-3)^n + 2^{2n+1}}{e^n - 2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(-3)^n + 2 \cdot 4^n}{e^n - 2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4^n \left(\left(\frac{-3}{4}\right)^n + 2\right)}{e^n \left(1 - \left(\frac{2}{e}\right)^n\right)}\right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{4}{e}\right)^n \frac{\left(\frac{-3}{4}\right)^n + 2}{1 - \left(\frac{2}{e}\right)^n}\right) = \infty \frac{0+2}{1-0} = \infty$.

Zde jsme použili znalosti geometrické posloupnosti a faktu, že $\left|\frac{2}{e}\right| < 1$, $\left|-\frac{3}{4}\right| < 1$ a $\frac{4}{e} > 1$.

Vytýkání se také často používá u odmocnin, jako v

$$\sqrt{x^2 + x} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = x \sqrt{1 + \frac{1}{x}};$$

pozor, poslední rovnost platí jen pro $x > 0$!

Příklad (všimněte si, že $x \rightarrow \infty$ znamená $x > 0$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 1}{\sqrt[3]{x^3 + x + 1} + x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x^3 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + x}}}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + 1}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + 1}}\right) = \frac{1 - 0}{\sqrt[3]{1 + 0 + 0 + 1}} = \frac{1}{2}.$$

Typ: Výraz schovaný v pěkné funkci. **Trik:** Pustit limitu dovnitř.

Příklad: $\lim(\sin \sqrt{\frac{e^x - \ln(x)}{1+x^2}}) = \sin \sqrt{\lim(\frac{e^x - \ln(x)}{1+x^2})}$, tu limitu uvnitř udělám jednodušeji než limitu celé původní funkce.

Typ: Limita s výrazem, který bych rád zjednodušil (pravděpodobně je tam vícekrát). **Trik:** Substitute. Pozn: Je třeba zcela změnit limitu, tj. při substituci $y = g(x)$ musí všechna x z limity zmizet (včetně dole pod lim); toto nahrazení se dělá pomocí substituční rovnice $y = g(x)$.

Příklad:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x \frac{(1 + \frac{1}{x}) \ln(1 + \frac{1}{x})}{\cos(\pi + \frac{\pi}{x})} \right) = \left| \begin{array}{l} y = 1 + \frac{1}{x} \implies x = \frac{1}{y-1} \\ x \rightarrow 1^+ \implies y \rightarrow 2^- \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{y-1} \frac{y \ln(y)}{\cos(\pi y)} \right) = \frac{1}{1} \frac{2 \ln(2)}{1} = 2 \ln(2).$$

Častý trik: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x))$, nechci mínus nekonečno, použiji $y = -x$, tj. $x = -y$, dostanu $\lim_{y \rightarrow \infty} (f(-y))$.

Typ: Limita, kterou si pamatuji. **Trik:** Prohledám paměť, občas upravím.

Za zapamatování stojí například: $\lim_{n \rightarrow \infty} [(1 + \frac{c}{n})^n] = e^c$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin(x)}{x}) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x)) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{\ln(x)}{x}) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x}{e^x}) = 0, \text{ popř. } \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{e^x - 1}{x}) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\ln(x+1)}{x}) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\cos(x) - 1}{x}) = 0.$$

Funguje to jen tak, jak je psáno, takže např. u $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin(2x)}{x})$ musím použít substituci $y = 2x$, dostanu

$$\lim_{y \rightarrow 0} (2 \frac{\sin(y)}{y}) = 2.$$

Příklad: $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\tan(x^2)}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{x}{\cos(x)} \frac{\sin(x^2)}{x^2})$, část $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{x}{\cos(x)})$ dělám přímo, na část $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin(x^2)}{x^2})$ použiji $y = x^2$ a výsledky vynásobím.

Typ: $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ a vadí mi to. **Trik:** Násobím a dělím výrazem $\sqrt{A} + \sqrt{B}$, použiji

$$(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B.$$

Podobný trik se použije pro $\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$, násobím a dělím výrazem $(\sqrt[3]{A})^2 + \sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} + (\sqrt[3]{B})^2$.

Příklad:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right) = 1.$$

Typ: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$. **Trik:** L'Hôpital.

Pamatuji si $\lim_{x \rightarrow A} (\frac{f}{g}) = \lim_{x \rightarrow A} (\frac{f'}{g'})$, ale pouze pro typy $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$, obecněji $\frac{*}{*}$, a jen tehdy, jestli pravá strana existuje.

$$\textbf{Příklad: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{e^{3x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{3e^{3x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{9e^{3x}} \right) = \frac{2}{\infty} = 0.$$

Dá se také někdy pokrátit (a bývá to kratší), viz Typ: polynomy, u typu $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ bývá uvedený trik výrazně kratší než l'Hôpital.

Typ: $0 \cdot \infty$. **Trik:** L'Hôpital, nejprve musíme udělat ze součinu podíl.

Příklad:

$$\text{Možnost } 0 \cdot \infty = \frac{1}{\frac{1}{\infty}} \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{\infty}}: \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-\frac{1}{x}}{-x^{-2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Možnost $0 \cdot \infty = 0 \cdot \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}: \lim_{x \rightarrow \infty} [x \sin(\frac{1}{x})] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \right)$; tohle je $\frac{0}{0}$, ale l'H vede na derivaci

složené funkce, snažší je substitute $y = \frac{1}{x}$, dostanu $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(y)}{y} \right) = 1$ (buď zapamatováním nebo l'Hôpitalem).

Typ: $\infty - \infty$. **Trik:** Doufám, že je to typ $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ (viz příslušný trik) nebo že lze udělat nějak přirozeně společný jmenovatel. Obecně zabere $A - B = A(1 - \frac{B}{A})$, kde $\frac{B}{A}$ je pak typu $\frac{\infty}{\infty}$ a l'Hôpital to jistí.

$$\textbf{Příklad: } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x} \left(1 - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \right) \right) = \infty(1 - 0) = \infty.$$

V nouzi největší použiji triku $A - B = \frac{1}{\frac{1}{A}} - \frac{1}{\frac{1}{B}} = \frac{\frac{1}{B} - \frac{1}{A}}{\frac{1}{AB}}$, což je typ $\frac{0}{0}$ a l'Hôpital to snad udolá.

Typ: Obecné mocniny. **Trik:** $A^B = e^{B \ln(A)}$. Použijí kdykoliv si nejsm jist s mocninou. Pak použijí trik z Typu limita uvnitř pěkné funkce, abych “vytáhl” e ven.

Příklad:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x)$ je neurčitý typ 0^0 . $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x \ln(x)}) = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x))} = e^0 = 1$, pro $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x))$ použijí převod na podíl a l'Hôpitala či si vzpomenu.

Typ: Limita s oscilačním členem typu $(-1)^n$, $\sin(\infty)$, $\cos(\infty)$. **Trik:** Věta o sevření, někdy pomůže Věta: Omezená krát nulová jest nulová.

Příklad: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+(-1)^n}{n} \right)$, sevřeme $\frac{n-1}{n} \leq \frac{n+(-1)^n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$. Protože $\frac{n \pm 1}{n} \rightarrow 1$ (viz polynomy), nutně

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+(-1)^n}{n} \right) = 1.$$

Příklad:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \sin(x) \right)$. Protože $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ a $\sin(x)$ je omezený, dostaneme $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \right) = 0$.

Poznámka k všemocnosti l'Hôpitala: Cha!

L'Hôpital neumí odstranit exponenciály:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) = \text{l'H} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right) = \text{l'H} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right).$$

Zde je nejlepší vykrátit: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \right) = 1$.

L'Hôpital neumí odstranit odmocniny:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^3}} \right) &= \text{l'H} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2}{3x} \right) \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= \text{l'H} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^3}}} \right) = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{3x}{2} \right) \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^3}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^3}} \right). \end{aligned}$$

Zase je nejlepší vykrátit: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^3}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^3}} \right)$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1-x^2}{1-x^3} \right)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x+x^2)} \right)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1+x}{1+x+x^2} \right)} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Bonus: Občas se hodí vědět, jak se skládají neexistující limity. Použijeme N pro limitu, která neexistuje, např. $\lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(n))$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)$ nebo $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(\frac{1}{x}))$.

Pravidla:

$L \cdot N = N$ pro $L \neq 0$, $L + N = N$, $N/L = N$, $N^\alpha = N$ pro $\alpha > 0$.

Neurčité výrazy s N již nejsou tak užitečné jako u nekonečen (příklady jsou většinou založeny na $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)$ nebo $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} \right)$, obojí jsou N):

— $0 \cdot N$: např. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \frac{1}{x}) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} (x \frac{1}{x}) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{x} \frac{1}{x}) = \infty$ (je to $\frac{1}{0^+}$), $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \frac{1}{x^3})$ je N .

— $\frac{N}{N}$: např. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1/x}{1/x} \right) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1/x}{1/x^3} \right) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1/x^3}{1/x} \right) = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(n)}{\cos(n)} \right)$ je N .

— $N \pm N$: např. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \left[c - \frac{1}{x} \right] \right) = c$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} + \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right] \right) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x} \right)$ je N .

— N^α : např. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{x} \right)^3 \right]$ je N , ale $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{x} \right)^2 \right] = \infty$.