Otázka č. 3

Funkce jedné proměnné, limita a spojitost. Derivace, její vlastnosti a význam. Souvislost derivace s průběhem funkce. Lokální a globální extrémy. Asymptotické chování funkcí.

Funkce jedné proměnné

Zobrazení fmnožiny $A \subset R$ do množiny R (zapisujeme $f : A \to R$) se nazývá *reálná funkce jedné reálné proměnné* (zkráceně budeme říkat jen funkce).
Číslo $x \in A$ se nazývá argument funkce f nebo nezávisle proměnná.
Číslo $y \in R$ se nazývá závisle proměnná.
Skutečnost, že $(x, y) \in f$, $x \in A$, zapisujeme jako $y = f(x)$, $x \in A$; číslo $f(x)$ se nazývá hodnota funkce f v bodě $x \in A$ (funkční hodnota v bodě x).
Množina $A \subset R$ se nazývá definiční obor funkce f a značíme ho $D(f)$ nebo D_f. Množina $\{y \in R;\ y = f(x),\ x \in A\}$ (tj. množina všech funkčních hodnot funkce f) se nazývá obor hodnot funkce f a značíme ho $H(f)$ nebo H_f .

Stručnejší definice (Habala - přednášky) :

Nechť f je funkce.
Definičný obor f je množina $D(f) = \{x \in IR;\ f(x) \text{ má smysl}\}$.
Obor hodnot f je množina $R(f) = \{f(x);\ x \in D(f)\}$.
Graf f je množina $G(f) = \{(x, f(x)),\ x \in D(f)\}$.

Operace :

Nechť f, g jsou funkce takové že $M = D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$.
Definujeme jejich
- součet $\boldsymbol{f + g}$ vzorcem $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pro $x \in M$.
- rozdíl $\boldsymbol{f - g}$ vzorcem $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ pro $x \in M$.
- součin $\boldsymbol{f\,.\,g}$ vzorcem $(f\,.\,g)(x) = f(x)\,.\,g(x)$ pro $x \in M$.
- podíl **f/g** vzorcem $(f/g)(x) = f(x) / g(x)$ pro $x \in M$, $g(x) \neq 0$.
- obecnou mocninu f^g vzorcem $(f^g)(x) = e^{\ln[f(x)]g(x)}$ pro x $\in D(f^g)$, kde $D(f^g) = D(g) \cap \{x \in D(f);\ f(x) > 0\}$.
- absolutní hodnota $|f|(x) = |f(x)|$ pro $x \in M$.

Definice - složená funkce
Nechť f, g jsou funkce takové že $R(f) \cap D(g) \neq \emptyset$.
Definujeme jejich složení či kompozici $g(f) = g \circ f$ jako

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{pro } x \in D(g \circ f), \text{ kde } D(g \circ f) = \{x \in D(f);\ f(x) \in D(g)\}.$$

Nechť funkce $y = f(u)$ má definiční obor $D(f)$ a nechť funkce $u = g(x)$ má definiční obor $D(g)$.
Jestliže $H(g) \subset D(f)$, můžeme proměnnou y považovat za závislou na proměnné x, tj. za funkci $y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ s definičním oborem $D(g)$. Funkce $f \circ g$ se nazývá funkce složená z funkcí f a g (v tomto pořadí!). Funkce f se nazývá vnější funkce a g se nazývá vnitřní funkce složené funkce $f \circ g$.

Definice - srovnání

Nechť f, g jsou funkce.

Řekneme, že $f = g$, jestliže $D(f) = D(g) = D$ a $\forall x \in D: f(x) = g(x)$.

Nechť $M \neq \emptyset$ je podmnožina $D(f) \cap D(g)$.

Řekneme, že $f = g$ na M, jestliže $\forall x \in M: f(x) = g(x)$.

Řekneme, že $f \leq g$ na M, jestliže $\forall x \in M: f(x) \leq g(x)$.

Řekneme, že $f < g$ na M, jestliže $\forall x \in M: f(x) < g(x)$.

Řekneme, že $f \geq g$ na M, jestliže $\forall x \in M: f(x) \geq g(x)$.

Řekneme, že $f > g$ na M, jestliže $\forall x \in M: f(x) > g(x)$.

Definice – prostá funkce

Nechť f je funkce. Řekneme, že f je prostá, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Jestliže je f prostá na množině M, potom každá rovnoběžka s osou x protína graf funkce f nejvýše v jednom bodě.

Funkce f je prostá ↔ existuje inverzní funkce f^{-1}.Pak jednoznačne platí $D(f_{-1}) = R(f)$ a $R(f_{-1}) = D(f)$.

Například : $f: y=2x-1$ *tak pak je její inverzní funkce* $f^{-1}: y=(x-1)/2$ *a* $D(f)=D(f_{-1})=R$

Definice – inverzní funkce

Nechť f, g jsou funkce. Řekneme, že g je inverzní funkce k f, značeno $g = f^{-1}$, jestliže $\forall x \in D(f) : g(f(x))= x$ a $\forall y \in R(f) : f(g(y)) = y$.

Definice - omezení

Nechť f je funkce, $M \subseteq D(f)$.

Řekneme, že f je omezená shora na M, jestliže $\exists K \in IR \ \forall x \in M: f(x) \leq K$. Pr. f=-x², D(f) = R

Řekneme, že f je omezená zdola na M, jestliže $\exists k \in IR \ \forall x \in M: f(x) \geq k$. Pr. f=x², D(f) = R

Řekneme, že f je omezená na M, jestliže je omezená *shora i zdola na M*. Pr. f=sin(x), D(f) =R

Řekneme, že f je omezená (shora/zdola), jestliže je *omezená (shora/zdola) na D(f)*. Pr. f=x, D(f) =<0,1>

Poznáka: Pokud číslo K existuje, říká se mu horní mez. Podobně se číslu k říká dolní mez.

Definice - symetrie

Řekneme, že podmnožina M reálných čísel je symetrická jestliže $\forall x \in M: (-x) \in M$.

Nechť f je funkce.

Řekneme, že f je sudá, jestliže *D(f) je symetrická množina* a $\forall x \in D(f): f(-x) = f(x)$.

Řekneme, že f je lichá, jestliže *D(f) je symetrická množina* a $\forall x \in D(f): f(-x) = -f(x)$.

Definice - periodicita

Nechť f je funkce, $T > 0$. Řekneme, že T je perioda f, nebo že f je T-periodick,á jestliže $\forall x \in D(f)$ taková že $x + T \in D(f)$, platí $f(x + T) = f(x)$. Pr. Jedná sa o sin, cos, tg, cotg,...

Čerpáno z /pro pípadné doplnění/:

http://kma.me.sweb.cz/funkce.pdf

http://math.feld.cvut.cz/habala/teaching/ma/map01.pdf

Limita a spojitost

Definice limity :
Uvažujme funkci *f* definovanou na nějakém prstencovém okolí určitého bodu *a*. Řekneme, že reálné číslo *L* je limita funkce *f* pro *x* jdoucí k *a*, nebo že funkce konverguje k tomuto *L* pro *x* jdoucí k *a*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nějaké $\delta > 0$ tak, aby pro všechna $x \in D(f)$ splňující $0<|x-a|<\delta$ platilo $|f(x)-L|<\varepsilon$.
Značení je

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right) = L.$$

Můžeme také psát " $f \to L$ pro $x \to a$ ".

Pokud takové *L* existuje, řekneme, že *f* ***konverguje*** v *a*, jinak řekneme, že *f* ***diverguje*** v *a*.

Hovorové názvy: "*f* jde k *L* pro *x* jdoucí k *a*", "*f* jde k *L* v *a*", "*f* má limitu *L* v *a*".

Definice specifikuje slovo "limita" coby výsledek limitní otázky (to číslo *L*), pokud existuje. Lidé ale také toto slovo používají k označení samotné otázky, obzvláště je-li vyjádřena značením "lim(*f*)". Je tedy například možné se zeptat, "jakého typu je limita $\lim_{x\to a}(f)$", i když ani nemusí být zřejmé, jestli má tato otázka rozumnou odpověď (tj. zda existuje příslušné *L* podle definice). Pokud takové *L* existuje, pak se mu dle definice říká limita. Může to znít směšně, že "limita" (číslo) je výsledkem "limity" (příkladu), ale tahle neopatrnost zřídkakdy působí problémy. Teď když tomu rozumíme, se můžeme vrátit k definici.

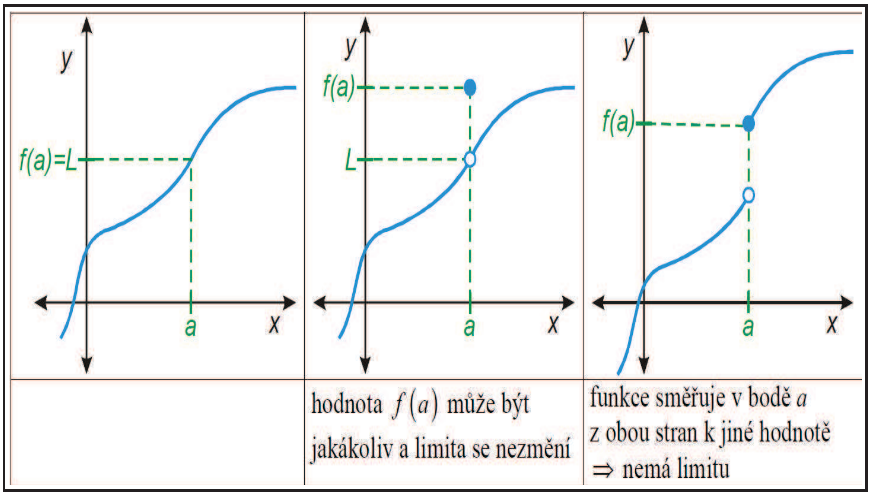
> Jestliže má funkce takovou limitu (číslo jako v definici) v daném bodě, pak limita $\lim_{x\to a}(f)$ se nazývá ***konvergentní***, nebo také řekneme, že tato limita ***konverguje***. Jinak se nazývá ***divergentní***, nebo řekneme, že ta limita ***diverguje***.

Příklady na obrázku :

a) funkce spojitá v bodě *a*

b) funkce nespojitá v bodě *a*, s limitou v bodě *a*

c) funkce je v bodě *a* nespojitá, bez limity v bodě *a*



Definice – nekonečné limity
Uvažujme funkci *f* definovanou na nějakém prstencovém okolí bodu *a*. Řekneme, že ∞ je limita funkce *f* pro *x* jdoucí k *a*, nebo že funkce jde do nekonečna pro *x* jdoucí k *a*, jestliže pro každé reálné číslo *K* existuje nějaké $\delta>0$ tak, aby pro všechna $x \in D(f)$ splňující $0<|x-a|<\delta$ platilo $f(x)>K$.

Řekneme, že $-\infty$ je ***limita*** funkce *f* pro *x* jdoucí k *a*, nebo že funkce ***jde do mínus nekonečna*** pro *x* jdoucí k *a*, jestliže pro každé reálné číslo *k* existuje nějaké $\delta>0$ tak, aby pro všechna $x \in D(f)$ splňující $0<|x-a|<\delta$ platilo $f(x)<k$.
Značení pro limitu rovnou nekonečnu je

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right) = \infty.$$

Značení pro limitu rovnou mínus nekonečnu je

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\big) = -\infty.$$

Píšeme také "$f\to\infty$ pro $x\to a$" v prvním a "$f\to-\infty$ pro $x\to a$" v druhém případě.

Definice – vlastní/nevlastní limity

Jestliže máme limitu podle první definice, reálné číslo, nazývá se vlastní limita a máme konvergenci. Jinak je to divergence. Existují dva druhy divergence. Ten pěknější je, že máme pořád ještě limitu, buď nekonečno nebo mínus nekonečno. Tyto se jmenují nevlastní limity. Pokud máme limitu, ať už vlastní nebo nevlastní, řekneme, že limita existuje. Ten "špatný" druh divergence je, že neexistuje ani nevlastní limita, což se stává, když se do toho zamíchá nějaká oscilace. Pak prostě řekneme, že limita neexistuje, a píšeme

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\big)\ \text{neex.}$$

Definice (limita - obecná definice).
Nechť f je funkce, nechť a je reálné číslo, ∞ nebo $-\infty$. Předpokládejme, že f je definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu a. Nechť L je reálné číslo, ∞ nebo $-\infty$. Řekneme, že L je limita funkce f pro x jdoucí k a, jestliže pro každé $\varepsilon>0$ existuje nějaké $\delta>0$ tak, aby pro všechna $x \in D(f)$ splňující $x \in U_\delta(a) - \{a\}$ platilo $f(x) \in U_\varepsilon(L)$.

Pokud najdeme limitu L, která je reálné číslo, řekneme, že je to vlastní limita a že limita (ten příklad) konverguje. Jinak řekneme, že limita (ten příklad) diverguje.
Limita nekonečno nebo mínus nekonečno se nazývá nevlastní limita. Pokud najdeme nějakou limitu (vlastní či nevlastní), řekneme, že limita existuje. Jinak řekneme, že limita neexistuje (neex).

Definice - jednostranné limity
Nechť f je funkce, nechť a je reálné číslo takové, že f existuje na $(a,a+b)$ pro nějaké $b>0$. Nechť L je reálné číslo, ∞ nebo $-\infty$. Řekneme, že L je limita funkce f pro x jdoucí k a zprava, jestliže pro každé $\varepsilon>0$ existuje nějaké $\delta>0$, $\delta<b$ tak, aby pro všechna $x \in (a,a+\delta)$ platilo $f(x) \in U_\varepsilon(L)$.

Nechť f je funkce, nechť a je reálné číslo takové, že f existuje na $(a-b,a)$ pro nějaké $b>0$. Nechť L je reálné číslo, ∞ nebo $-\infty$. Řekneme, že L je limita funkce f pro x jdoucí k a zleva, jestliže pro každé $\varepsilon>0$ existuje nějaké $\delta>0$, $\delta<b$ tak, aby pro všechna $x \in (a-\delta,a)$ platilo $f(x) \in U_\varepsilon(L)$.

Poznámka: Podmínka $\delta<b$ ve hře zaručuje, že $(a,a+\delta)$ je podmnožinou $(a,a+b)$, popř. že $(a-\delta,a)$ je podmnožinou $(a-b,a)$, takže funkce existuje na takových pravých a levých prstencových delta-okolích.

Značení pro limitu zprava:

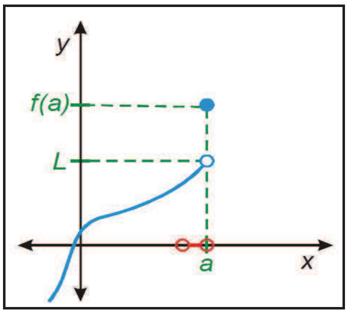
$$\lim_{x\to a^+}\big(f(x)\big) = L.$$

Můžeme také psát "$f\to L$ pro $x\to a^+$", v krátkosti dokonce píšeme "$f(a^+)=L$".

Značení pro limitu zleva:

$$\lim_{x\to a^-}\big(f(x)\big) = L.$$

Můžeme také psát "$f\to L$ pro $x\to a^-$", v krátkosti dokonce píšeme "$f(a^-)=L$".



Na obrázku je jednostranná limita zleva ve vlastním bode.

Důležitá poznámka: Všimněte si, že pojem limity je lokální pojem. To znamená, že výsledek závisí pouze na tom, co se stane hned vedle limitního bodu, chování f dále od a je zcela irelevantní.

Následující tvrzení by vám měla být jasná, pokud chápete, co je to limita. Ve všech tvrzeních je a reálné číslo nebo (mínus) nekonečno.

Fakt.
Nechť je funkce f definována na nějakém prstencovém okolí bodu a. Pak f konverguje k L v a právě tehdy když $(f\text{-}L)$ konverguje k 0 v a.

Fakt.
Nechť je funkce f definována na nějakém prstencovém okolí bodu a. Jestliže f jde k L v a, pak $|f|$ jde k $|L|$ v a.

Fakt.
Nechť je funkce f definována na nějakém prstencovém okolí bodu a. Pak f jde k 0 v a právě tehdy když $|f|$ jde k 0 v a.

Fakt.
Nechť jsou funkce f a g definovány na nějakém prstencovém okolí bodu a. a. Předpokládejme, že obě konvergují v a. Jejich limity v a jsou stejné právě tehdy když $f\text{-}g$ jde k 0 v a.

Poznamenejme, že poslední tvrzení neplatí, jestliže vypustíme předpoklad o konvergenci. Jako obvykle platí všechna tato tvrzení i pro jednostranné limity. Pro ty platí i tato věta:

Fakt.
Jestliže f má nenulovou limitu v a, pak existuje prstencové okolí U bodu a a konstanta $k>0$ taková, že $|f|>k$ na U.

Vlastnosti definice - limita a spojitost
Nechť f je funkce definovaná na okolí nějakého reálného čísla a. Jestliže je f spojitá v a, pak

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\big) = f(a).$$

Totéž platí pro jednostranné limity a jednostrannou spojitost, pak stačí mít existenci f na jednostranném okolí. Tato věta je velmi užitečná, protože víme, že všechny elementární funkce jsou spojité na svých definičních oborech, stejně tak jsou spojité funkce, které z těch elementárních dostaneme algebraickými operacemi.

Limity a operace

Věta (limita a algebraické operace).
Nechť a je reálné číslo, ∞ nebo $-\infty$. Nechť f,g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí a. Předpokládejme, že f má v a limitu A a g má v a limitu B. Pak platí následující:
(i) Pro libovolné reálné číslo c má funkce $(c\cdot f)$ v a limitu $c\cdot A$, jestliže to má smysl.
(ii) Funkce $(f + g)$ má v a limitu $A+B$, jestliže to má smysl.
(iii) Funkce $(f - g)$ má v a limitu $A-B$, jestliže to má smysl.
(iv) Funkce $(f\cdot g)$ má v a limitu $A\cdot B$, jestliže to má smysl.
(v) Funkce (f/g) má v a limitu A/B, jestliže to má smysl.
(vi) Funkce f^g má v a limitu A^B, jestliže to má smysl.

3. Příklady na limity
Zde si autor dovoluje přiložit skvěle vypracovaný materiál od doc. Habaly, který je přehledný a srozumitelný. Popisuje všechny typy limit, které je možné potkat s jednoduchým popisem, jak je řešit. Dovolujeme si pouze jednu poznámku pro l´Hospitalovo pravidlo u limit (bude vysvětleno níže u derivací). Funguje tak, že pokud limita vychází $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$ nebo $\left(\frac{0}{0}\right)$ (POZOR, POUZE TYTO DVA PŘÍPADY), zderivujeme zvlášť čitatel a zvlášť jmenovatel a pokračujeme v počítání limit.

4 Derivace 1. Definice

Definice. Derivace (definovaná limitou):

$$f'(a) = \lim_{x\ \to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

Co to znamená? Derivace je rychlost změny funkční hodnoty vzhledem ke změně x. Derivace má spoustu praktických využití ve fyzice, ale i statistice. Také s její pomocí určujeme extrémy a inflexní body funkcí.
Pojem **druhá derivace** neznamená nic jiného než opětovné zderivování již derivovaného. Značí se $f''(x)$.

2. Počítání s derivacemi
   - Derivace součtu $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
   - Derivace součinu $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
   - Derivace podílu $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}\right)$
   - Derivace složené funkce $(g(f(x)))' = g'(f(x))\cdot f'(x)$ Příklad: $\sin(\ln x)' = \sin'(\ln x)\cdot(\ln x)' = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$
   - Derivace je lineární zobrazení (souvisí s lineární algebrou)
3. Tabulka derivací

Funkce	**Derivace**
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^c$	$f'(x) = c\cdot x^{c-1}$
$f(x) = c^x$ c je konstanta > 0	$f'(x) = c^x \ln c$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$ a je konstanta > 0	$f'(x) = \frac{1}{x\cdot\ln a}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -\frac{1}{(\sin x)^2}$

4. Souvislost derivace s průběhem funkce. Máme nástroj, jak určit průběh funkce.
   - V bodech $f'(x) = 0$ dostáváme body **podezřelé z minima a maxima.** Jsou to body, ve kterých se nám mění průběh funkce – rostoucí → klesající nebo naopak. Funkci tedy zderivujeme, položíme rovno nule a kořeny jsou tyto body. Pak rozdělíme celý definiční obor na intervaly, kde krajní body budou kořeny, které nám vyšly. O těchto intervalech můžeme prohlásit, že v nich je funkce rostoucí $f'(x) > 0$, nebo klesající $f'(x) < 0$.
     Příklad:$f(x) = x^2 - 4x + 3 \to f'(x) = 2x - 4$. Definiční obor je $\mathbb{R}$, kořen derivace nám vyšel 2, čili rozdělíme na intervaly $(-\infty, 2)$ a $(2, \infty)$. V intervalu $(-\infty, 2)$ je $f'(0) < 0$ a funkce je tedy

klesanící a v druhém $f'(x) > 0$ a funkce je rostoucí. Tím jsme dostali bod podezřelý z minima. Nejlepší je podruhé zderivovat a bod dosadit. Pokud vyjde kladná hodnota, vyšlo nám minimum, pokud záporná, maximum. (Je to přesně obráceně, než by student čekal.) Je vhodné se na to podívat i jako na polynom 2. stupně. Jeho kořeny jsou $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$(zároveň průsečíky s osou x) a vrchol grafu (paraboly) leží přesně uprostřed mezi těmito kořeny.

- V bodech $f''(x) = 0$ dostáváme tzv. **inflexní body**. Jsou to body, ve kterých se tentokrát mění "kulatost" funkce. Funkce může být **konvexní** (x^2), což znamená, že tečna je pod grafem - laicky řečeno graf vypadá jako úsměv - lehce se zapamatuje, že úsměv – pozitivní – plus – interval, na kterém je $f''(x) > 0$.

  Naopak **konkávní** funkce je obrácená ($-x^2$), tečna je nad grafem, je o "zamračený graf" – interval, kde $f''(x) < 0$.

  Čili stejně jako v předchozím případě položíme druhou derivaci rovnu nule, a kořeny jsou inflexní body. Opět rozdělíme definiční obor na intervaly, a zjistíme, ve kterých intervalech je druhá derivace kladná (zde graf původní funkce vypadá kulatě tak, že tečna je pod grafem) a kde je záporná. Pozor, otázka může znít i obráceně: zjistěte, ve kterých intervalech je funkce konkávní. Pak dvakrát zderivujeme funkci, položíme rovno nule, kořeny jsou inflexní body. Rozdělíme definiční obor na intervaly, dosadíme z nich hodnoty a zjistíme (konkávní), kde interval je záporný.

- Asymptota (asymptotická přímka) křivky je taková přímka, jejíž vzdálenost od křivky se s rostoucí souřadnicí x zmenšuje a v nekonečnu se protínají.
  - svislá asymptota - pokud v nějakém bodě a, se funkce limitně blíží k $\pm\infty$, tak ji lze aproximovat přímkou $x = a$
  - vodorovná asymptota pokud se funkce v $\pm\infty$ limitně blíží k nějakému číslu a, tak ji lze aproximovat přímkou $y = a$
  - asymptota je přímka $y = kx + q$, pokud

    $$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x)) = \pm\infty, \text{ a kde } k = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right), \; q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$$

    . Z těchto rovnic získáme potřebné k a q.

5. Vyšetření průběhu funkce
   (a) Určit **definiční obor**, sudost, lichost, periodicitu funkce a obor hodnot.
   (b) spočítat **limity** v $\pm\infty$ a v bodech, kde není funkce definována - limita zprava, zleva (např u $\frac{1}{x}$ v 0)
   (c) **průsečíky s osami** - s osou x - to jsou kořeny funkce (y=0), s osou y - dosadíme x=0.
   (d) Najdeme x, pro která platí $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$:

"Co"?	**K čemu to je?**	**"Co"** > 0	**"Co"** < 0	**"Co"** $= 0$
$f(x)$	kořeny funkce	graf je nad nulou	graf je pod nulou	graf protíná osu x
$f'(x)$	změny průběhu	funkce je rostoucí graf stoupá	funkce je klesající graf klesá	graf je "vodorovný" podezření na extrém nebo inflexní bod
$f''(x)$	inflexní body	funkce je konvexní	funkce je konkávní	podezření na inflexní body

   Toto nejsou definice, je to manuál pro určení průběhu funkce.

   (e) rovnice asymptot

(f) bývá slušností dopočítat funkční hodnoty všech důležitých bodů (kořeny, maxima, inflexní body...).

6. **Příklad** Popište průběh funkce $f(x) = x^3 + 6x^2$

(a) $D = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{R}$. Sudost: $f(2) = 32$,$f(-2) = 16$. Vidíme, že funkce není ani sudá, ani lichá. (viz definice).

(b) $\lim_{x \to \infty}(f(x)) = \infty$ a $\lim_{x \to -\infty}(f(x)) = -\infty$

(c) průsečík s osou y ($x = 0$): $[0, 0]$. Průsečík s osou x - kořeny - Tedy $x_{1,2} = 0$, ten je dvojnásobný, dále $x_3 = -6$.

(d) $f(x) = 0,\ f'(x) = 0,\ f''(x) = 0$, což je $f(x) = x^3 + 6x^2,\ f'(x) = 3x^2 + 12x,\ f''(x) = 6x + 12$

f(x)=0	kořeny	$-6,\ 0,\ 0$
$(-\infty, -6)$	$-$	graf pod osou x
$(-6, 0)$	$+$	graf nad osou x
$(0, \infty)$	$+$	graf nad osou x
f'(x)=0	kořeny	$-4, 0$
$(-\infty, -4)$	$+$	funkce roste
$(-4, 0)$	$-$	funkce klesá
$(0, \infty)$	$+$	funkce roste
f"(x)=0	kořeny	-2
$(-\infty, -2)$	$-$	funkce je konkávní
$(-2, \infty)$	$+$	funkce je konvexní

Protože $f''(-4) = -12$, vidíme, že bod -4 je lokální maximum a protože $f''(0) = 12$, je bod 0 lokální minimum. Bod -2 je inflexní bod.

(e) Po dosazení do vzorců asymptot zjistíme, že $k = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{x^3+6x^2}{x}\right) = \infty$. Čili nemá asymptotu ve tvaru $y = kx + q$.

(f) Dále dopočteme hodnoty pro body $-6, -4, -2, 0$: $f(-6) = 0,\ f(-4) = 32,\ f(-2) = 16,\ f(0) = 0$.

3. Příklady na limity

Zde si autor dovoluje přiložit skvěle vypracovaný materiál od doc. Habaly, který je přehledný a srozumitelný. Popisuje všechny typy limit, které je možné potkat s jednoduchým popisem, jak je řešit. Dovolujeme si pouze jednu poznámku pro l´Hospitalovo pravidlo u limit (bude vysvětleno níže u derivací). Funguje tak, že pokud limita vychází $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$ nebo $\left(\frac{0}{0}\right)$ (POZOR, POUZE TYTO DVA PŘÍPADY), zderivujeme zvlášť čitatel a zvlášť jmenovatel a pokračujeme v počítání limit.

4 Derivace

1. Definice

Definice. Derivace (definovaná limitou):

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$

Co to znamená? Derivace je rychlost změny funkční hodnoty vzhledem ke změně x. Derivace má spoustu praktických využití ve fyzice, ale i statistice. Také s její pomocí určujeme extrémy a inflexní body funkcí.

Pojem **druhá derivace** neznamená nic jiného než opětovné zderivování již derivovaného. Značí se $f''(x)$.

2. Počítání s derivacemi

- Derivace součtu $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- Derivace součinu $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Derivace podílu $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(\frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}\right)$
- Derivace složené funkce $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ Příklad: $\sin(\ln x)' = \sin'(\ln x) \cdot (\ln x)' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$
- Derivace je lineární zobrazení (souvisí s lineární algebrou)

3. Tabulka derivací

Funkce	**Derivace**
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^c$	$f'(x) = c \cdot x^{c-1}$
$f(x) = c^x$ c je konstanta > 0	$f'(x) = c^x \ln c$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$ a je konstanta > 0	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -\frac{1}{(\sin x)^2}$

4. Souvislost derivace s průběhem funkce. Máme nástroj, jak určit průběh funkce.

- V bodech $f'(x) = 0$ dostáváme body **podezřelé z minima a maxima.** Jsou to body, ve kterých se nám mění průběh funkce – rostoucí → klesající nebo naopak. Funkci tedy zderivujeme, položíme rovno nule a kořeny jsou tyto body. Pak rozdělíme celý definiční obor na intervaly, kde krajní body budou kořeny, které nám vyšly. O těchto intervalech můžeme prohlásit, že v nich je funkce rostoucí $f'(x) > 0$, nebo klesající $f'(x) < 0$.

  Příklad:$f(x) = x^2 - 4x + 3 \rightarrow f'(x) = 2x - 4$. Definiční obor je $\mathbb{R}$, kořen derivace nám vyšel 2, čili rozdělíme na intervaly $(-\infty, 2)$ a $(2, \infty)$. V intervalu $(-\infty, 2)$ je $f'(0) < 0$ a funkce je tedy klesanící a v druhém $f'(x) > 0$ a funkce je rostoucí. Tím jsme dostali bod podezřelý z minima. Nejlepší je podruhé zderivovat a bod dosadit. Pokud vyjde kladná hodnota, vyšlo nám minimum, pokud záporná, maximum. (Je to přesně obráceně, než by student čekal.) Je vhodné se na to podívat i jako na polynom 2. stupně. Jeho kořeny jsou $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$(zároveň průsečíky s osou x) a vrchol grafu (paraboly) leží přesně uprostřed mezi těmito kořeny.

- V bodech $f''(x) = 0$ dostáváme tzv. **inflexní body**. Jsou to body, ve kterých se tentokrát mění "kulatost" funkce. Funkce může být **konvexní** (x^2), což znamená, že tečna je pod grafem - laicky řečeno graf vypadá jako úsměv - lehce se zapamatuje, že úsměv – pozitivní – plus – interval, na kterém je $f''(x) > 0$.

  Naopak **konkávní** funkce je obrácená ($-x^2$), tečna je nad grafem, je o "zamračený graf" – interval, kde $f''(x) < 0$.

  Čili stejně jako v předchozím případě položíme druhou derivaci rovnu nule, a kořeny jsou inflexní body. Opět rozdělíme definiční obor na intervaly, a zjistíme, ve kterých intervalech je druhá derivace kladná (zde graf původní funkce vypadá kulatě tak, že tečna je pod grafem) a kde je záporná. Pozor, otázka může znít i obráceně: zjistěte, ve kterých intervalech je funkce konkávní. Pak dvakrát zderivujeme funkci, položíme rovno nule, kořeny jsou inflexní body. Rozdělíme definiční obor na intervaly, dosadíme z nich hodnoty a zjistíme (konkávní), kde interval je záporný.

- Asymptota (asymptotická přímka) křivky je taková přímka, jejíž vzdálenost od křivky se s rostoucí souřadnicí x zmenšuje a v nekonečnu se protínají.
  - svislá asymptota - pokud v nějakém bodě a, se funkce limitně blíží k $\pm\infty$, tak ji lze aproximovat přímkou $x = a$
  - vodorovná asymptota pokud se funkce v $\pm\infty$ limitně blíží k nějakému číslu a, tak ji lze aproximovat přímkou $y = a$
  - asymptota je přímka $y = kx + q$, pokud

    $$\lim_{x \to \pm\infty}(f(x)) = \pm\infty, \text{ a kde } k = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right), \; q = \lim_{x \to \pm\infty}(f(x) - kx)$$

    . Z těchto rovnic získáme potřebné k a q.

5. Vyšetření průběhu funkce
   (a) Určit **definiční obor**, sudost, lichost, periodicitu funkce a obor hodnot.
   (b) spočítat **limity** v $\pm\infty$ a v bodech, kde není funkce definována - limita zprava, zleva (např u $\frac{1}{x}$ v 0)
   (c) **průsečíky s osami** - s osou x - to jsou kořeny funkce (y=0), s osou y - dosadíme x=0.
   (d) Najdeme x, pro která platí $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$:

"Co"?	**K čemu to je?**	**"Co"** > 0	**"Co"** < 0	**"Co"** $= 0$
$f(x)$	kořeny funkce	graf je nad nulou	graf je pod nulou	graf protíná osu x
$f'(x)$	změny průběhu	funkce je rostoucí graf stoupá	funkce je klesající graf klesá	graf je "vodorovný" podezření na extrém nebo inflexní bod
$f''(x)$	inflexní body	funkce je konvexní	funkce je konkávní	podezření na inflexní body

   Toto nejsou definice, je to manuál pro určení průběhu funkce.

   (e) rovnice asymptot

(f) bývá slušností dopočítat funkční hodnoty všech důležitých bodů (kořeny, maxima, inflexní body...).

6. **Příklad** Popište průběh funkce $f(x) = x^3 + 6x^2$

(a) $D = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{R}$. Sudost: $f(2) = 32$,$f(-2) = 16$. Vidíme, že funkce není ani sudá, ani lichá. (viz definice).

(b) $\lim_{x \to \infty}(f(x)) = \infty$ a $\lim_{x \to -\infty}(f(x)) = -\infty$

(c) průsečík s osou y ($x = 0$): $[0, 0]$. Průsečík s osou x - kořeny - Tedy $x_{1,2} = 0$, ten je dvojnásobný, dále $x_3 = -6$.

(d) $f(x) = 0,\ f'(x) = 0,\ f''(x) = 0$, což je $f(x) = x^3 + 6x^2,\ f'(x) = 3x^2 + 12x,\ f''(x) = 6x + 12$

f(x)=0	kořeny	$-6,\ 0,\ 0$
$(-\infty, -6)$	$-$	graf pod osou x
$(-6, 0)$	$+$	graf nad osou x
$(0, \infty)$	$+$	graf nad osou x
f'(x)=0	kořeny	$-4, 0$
$(-\infty, -4)$	$+$	funkce roste
$(-4, 0)$	$-$	funkce klesá
$(0, \infty)$	$+$	funkce roste
f"(x)=0	kořeny	-2
$(-\infty, -2)$	$-$	funkce je konkávní
$(-2, \infty)$	$+$	funkce je konvexní

Protože $f''(-4) = -12$, vidíme, že bod -4 je lokální maximum a protože $f''(0) = 12$, je bod 0 lokální minimum. Bod -2 je inflexní bod.

(e) Po dosazení do vzorců asymptot zjistíme, že $k = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{x^3+6x^2}{x}\right) = \infty$. Čili nemá asymptotu ve tvaru $y = kx + q$.

(f) Dále dopočteme hodnoty pro body $-6, -4, -2, 0$: $f(-6) = 0,\ f(-4) = 32,\ f(-2) = 16,\ f(0) = 0$.