Otázka 02 - Y01ALG

Zadání

Matice, základní operace s maticemi. Hodnost matice a Frobeniova věta o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic. Inverzní matice, determinant. Lineární zobrazení, jeho reprezentující matice v dané bázi. (Y01ALG)

Pár slov autora

Otázka je přepracovanou verzí z loňska. Tento materiál by rozhodně neměl být jediným studijním zdrojem, ale spíše shrnutím definic a několika málo příkladů. Rozhodně doporučuji otevřít skripta ze kterých jsem taktéž čerpal, jsou velice kvalitní. Nějaké hlubší vypracování této otázky je myslím zbytečné, kvalitu skript lze jen těžko překonat. Zde tedy jen výcuc.

Matice a operace s nimy

Definice matice.

Matice tvaru *m x n* je soubor mn čísel a_{ij}, kde i = 1,2...m a j = 1,2,...,n. Matici zapisujeme ve tvaru

M = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Stručný zápis $M=\left(a_{ij}\right)$**, jeli m = n, říkáme, že matice je čtvercová řádu n.**

Je dána soustava m lineárních rovnic o n neznámých s reálnými koeficienty:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1$
$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2$
.
.
.
$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m$

potom následující matici nazveme maticí soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a následující matici nazveme rozšířenou maticí této soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \| & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \| & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \| & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \| & b_m \end{pmatrix}$$

Transponovaná matice

Nechť A = (a $_{i,j}$) je matice typu (m, n). Matici A^T = ($a_{j,i}$), která je typu (n, m), nazýváme transponovanou maticí k matici A. Matice A^T tedy vznikne z matice A přepsáním řádků matice matice A do sloupců matice A^T , respektive přepsáním sloupců matice A do řádků matice A^T

Inverzní matice

Inverzní matice k dané matici je taková matice, která po vynásobení s původní maticí dá jednotkovou matici, tj. matici která má prvky na hlavní diagonále rovny 1 a zbylé prvky rovny 0. Inverzní matici lze sestrojit pouze pro regulární matici, tj. matici jejíž determinant není roven 0

Výpočet inverzní matice

Základní metodou výpočtu inverzní matice je Gaussova eliminace podle následujícího postupu:

```
1. Vedle sebe napíšeme matici, kterou chceme invertovat a jednotkovou matici.
2. Matici upravujeme na jednotkovou matici standardními způsoby:
       * záměna řádků
       * vynásobení řádku skalárem (nejčastěji přirozeným číslem)
       * přičtení násobku jednoho řádku k jinému
3. Každý úkon prováděný na upravované matici musíme provést i na jednotkové matici.
4. Zkoušku provedeme vynásobením matice s její inverzí.
```

Metoda využívající determinant matice

Matice A^{-1} má prvky $a_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j} |A_{j,i}|}{|A|}$ **, kde** $|A_{j,i}|$ **je subdeterminant získaný z matice A vynecháním j-tého řádku a i-tého sloupce, | A | je determinant matice A.**

Operace

Platí.

- **$(A + B)^T = A^T + B^T$**

- $(kA)^T = kA^T$
- $(A^T)^T = A$

Součet matic Jsou-li $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ dvě matice stejného tvaru $m \times n$, pak definujeme jejich součet jako matici $A + B = (c_{ij})$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pro libovolne indexy i = 1,2,...m a j = 1,2,...n.

Součin matice a čísla Součin matice A a cisla *k* definujeme jako matici $kA = (d_{ij})$ tvaru $m \times n$, kde $d_{ij} = ka_{ij}$ pro libovolne indexy i,j.

Součin dvou matic Je-li $A = (a_{ij})$ matice tvaru $m \times n$ a $B = (b_{jk})$ matice tvaru $n \times p$, pak definujeme součin matic $AB = (c_{ik})$ jako matici tvaru $m \times p$, kde :

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

tj. sčítáme násobky prvků v řádcích první matice s prvky v sloupcích druhé matice.

Příklad.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 10 & 4 & 11 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 73 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Užitečná tvrzení. Jsou li $A = (a_{ij})$, $B = (b_{kl})$ a $C = (c_{uv})$ matice, pak plati:

- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $(AB)C = A(BC)$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Hodnost matice

Hodnost matice je maximální počet lineárně nezávislých řádků matice. Přesněji řečeno, hodnost udává počet prvků takové množiny řádků, která je nejpočetnější, a přitom lineárně nezávislá.

Frobeniova věta

Soustava $Ax = b$ má rešení práve tehdy, když hod A = hod(A|b), tj. když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy

Determinant

Permutace

Permutace prvků množiny M je uspořádaná Permutace n-tice prvků množiny M taková, že žádný prvek z množiny M se v ní neopakuje. Počet různých permutací n prvků je roven číslu n!.

Inverze premutace

Nechť $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ je permutace n prvků. Inverze této permutace je taková dvojice (i_k, i_l), pro které platí $i_k > i_l$, a přitom $k < l$

Znaménko premutace

Pro každou permutaci definujeme znaménko permutace $sgn(p)$ tak, že má-li permutace:

sudý počet inverzí je znaménko +1
lichý počet inverzí je znaménko -1

Definice determinantu

Nechť A je čtvercová matice řádu n nad tělesem T. Potom determinant matice A je dán výrazem:

det(A) = $$\sum_{p \in S_n} sgn(p) \times \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(n)}$$

Vlastnosti determinantu.

- **$\det(A^T) = \det(A)$**
- **má-li matice A dva sloupce nebo řádky shodne pak det(A) = 0**

Tvrzeni. Determinant je linearni funkci kazdeho radku i kazdeho sloupce matice.
Dusledek. Pricteni *i*-teho radku k *j*-temu nezmeni determinat. Lze pricitat i k-nasobek *i*-teho radku.

Věta. Necht A a B jsou čtvercové matice řádu n nad tělesem T. Potom plati det(AB) = det(A)det(B).

Věta. Čtvercová matice A je regulární ⇔ det(A) != 0

Výpočet determinantu

Výpočet pomocí Gausovy elmininační metody

Determinant lze vypočítat pomocí Gausovy eliminační metody tak, že determinant matice A je roven násobku prvků na hlavní diagonále upravené matice v horním trojuhelníkovém tvaru. Toto vyplívá z definice determinantu neboť všechny násobky prvků, vyjma těch co jsou na hlavní diagonále, jsou nulové.

Doplňek prvku matice

Doplněk prvku $a_{i,j}$ adj($a_{i,j}$) v matici A definujeme jako $\left(adj(a)\right)_{ji} = (-1)^{i+j} \det\left(A_{ij}\right)$**, kde**

$\det\left(A_{ij}\right)$ **je determinant matice A s vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce, tedy determinant matice o jeden řád menší.**

Rozvoj determinantu

je další ze způsobu výpočtu, tento způsob je univerzální, využívá rekurze. Ovšem jeho výpočetní složitost je vysoká a roste s počtem prvků.

det(A) = $$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\left(adj\left(A\right)\right)_{ij}\right)j=1n\left(a_{ij}\left(adj\left(A\right)\right)_{ij}\right)$$

tedy determinant matice A je součet násobků prvků a $_{i,j}$ matice A s doplňky těchto prvků.

Věta. Pro kazdou regularni matici A plati A^{-1} = adj(A)/det(A)

Cramerovo pravidlo.

Necht A je regularni matice potom, kazde reseni soustavy Ax = b lze psat jako $x_i = \frac{\left(\det\left(A_{i->b}\right)\right)}{\left(\det\left(A\right)\right)}$ **, kde** $A_{i->b}$ **je matice, ktera vznikne z matice A nahrazenim *i*-teho sloupce vektorem b.**

Lineární zobrazení

Definice

Zobrazení

Nechť L_1 a L_2 jsou libovolné množiny. Zobrazením A z množiny L_1 do množiny L_2 rozumíme jakýkoli předpis, který každému prvku z množiny L_1 přiřadí jednoznačným způsobem nějaký prvek z množiny L_2 . Skutečnost, že A je zobrazení z množiny L_1 do množiny L_2 zapisujeme $A : L_1 \to L_2$.

Zobrazení "na"

Nechť L_1 a L_2 jsou libovolné množiny a uvažujme $A : L_1 \to L_2$ .Pokud platí $A(L_1) = L_2$, říkáme, že A je zobrazení z množiny L_1 na množinu L_2 (nebo říkáme, že zobrazení je surjektivní).

(Pozn. zobrazení $A : L_1 \to L_2$ je zobrazením L_1 na množinu L_2, jestliže se na každý prvek z L_2 zobrazí alepsoň jeden prvek z L_1.)

Zobrazení "prosté"

Nechť L_1 a L_2 jsou libovolné množiny a uvažujme $A : L_1 \to L_2$. Zobrazení A je prosté (injektivní), pokud pro každé dva prvky $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_1$, $x_1 \neq x_2$ platí $A(x_1) \neq A(x_2)$.

Lineární zobrazení

Nechť L_1 a L_2 jsou lineární prostory, $A : L_1 \to L_2$ je zobrazení z L_1 do L_2 . Zobrazení A nazýváme lineárním zobrazením, pokud pro všechna $x \in L_1$, $y \in L_1$, $\alpha \in R$ platí:

- **$A(x + y) = A(x) + A(y)$**
- **$A(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot A(x)$**

Jádro zobrazení

Nechť L_1 , L_2 jsou lineární prostory, o_2 je nulový vektor v lineárním prostoru L_2 a $A : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Množinu $\mathrm{Ker}\, A = \{x \in L_1 ; A(x) = o_2\}$ nazýváme jádrem lineárního zobrazení A.

Izomorfní zobrazení

Zobrazení $A : L_1 \to L_2$ nazýváme izomorfismus, pokud je lineární, prosté a „na L_2 . Lineární prostor L_1 nazýváme izomorfní s L_2 , pokud existuje izomorfismus $A : L_1 \to L_2$

Matice lineárního zobrazení

Nechť L_1 a L_2 jsou lineární prostory konečné dimenze, $A : L_1 \to L_2$ je lineární. Nechť $(B) = (b_1 , b_2 , ... , b_n)$ je uspořádaná báze L_1 a $(C) = (c_1 , c_2 , ... , c_m)$ je uspořádaná báze L_2 . Matici M typu (m, n), která splňuje maticovou rovnost $(A(b_1), A(b_2), . . . , A(b_n)) = (c_1 , c_2 , . . . , c_m) \cdot M$, nazýváme maticí zobrazení A vzhledem k uspořádaným bázím (B) a (C).

Zdroje

skripta Dr. Olšáka [ftp://math.feld.cvut.cz/pub/olsak/linal/linal.pdf]

Zkouškové písemky STM - WIKI [http://stm-wiki.cz/index.php/Y01ALG]

spolecne/spol2.txt · Poslední úprava: 2010/06/13 08:13 autor: Zajouch