Zpracoval: hypspave@fel.cvut.cz

1. Maticový počet. Hodnost matice, součin matic, inverzní matice, determinant, vlastní číslo a vektor. Řešení lineárních soustav, Gaussova eliminace, Cramerovo pravidlo pro regulární matice soustavy. (A7B01LAG)

pozn: vlastní číslo a vlastní vektor zpracuji v otázce 2, protože se týkají lineárního zobrazení

I. Matice

Matice typu (m, n) je uspořádaná m-tice prvku z Rn. Jednotlivé složky této m-tice nazýváme řádky matice. Nechť ar = (ar,1, ar,2, . . . , ar, n) je r-tý řádek matice typu (m, n). s-tá složka tohoto řádku ar,s 2 R se nazývá (r, s)-tý prvek matice. Řádky matice A zapisujeme jako skutečné řádky pod sebe takto:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \dots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \dots, & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1}, & a_{m,2}, & \dots, & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

II. Lineární závislost, nezávislost

Skupinu vektoru x1, x2, . . . , xn nazýváme lineárně závislou, pokud existuje netriviální lineární kombinace vektoru x1, x2, . . . , xn, která je rovna nulovému vektoru. Stručně říkáme, že vektory x1, x2, . . . , xn jsou lineárně závislé.
př.: skupina vektorů (1,2,3),(2,4,6),(2,2,2) je lineárně závislá, protože:

2*(1,2,3) - 1* (2,4,6)+0*(2,2,2) = (0,0,0) -existuje netriviální kombinace, která je rovna nulovému vektoru

pokud odeberu druhý vektor a nechám jen skupinu (1,2,3),(2,2,2) tak je lineárně nezávislá:
a (1,2,3) + b (2,2,2) -neexistují celá čísla (a, b) aby byl součet roven nulovému vektoru

III. Gaussova eliminační metoda

Gaussova eliminační metoda je metoda usnadňující řešení soustav lineárních rovnic.
Při eliminační metodě převedeme matici soustavy na jinou matici odpovídající jiné soustavě, ale se stejnou množinou řešení, protože při úpravách jsme použili jen tyto elementární kroky:

1. Prohození řádku matice.
2. Pro násobení řádku nenulovou konstantou.
3. Přičtení násobku řádku k jinému.
4. Odstranění nulového řádku.

př. Gaussovou eliminační metodou budeme řešit následující soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých α,β,γ,δ.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \alpha & + & 2\beta & + & 3\gamma & + & \delta & = & 1 \\ 2\alpha & + & 4\beta & + & 7\gamma & + & 7\delta & = & 4 \\ \alpha & & & + & 2\gamma & & & = & -2 \\ 3\alpha & + & 7\beta & + & 10\gamma & + & 6\delta & = & 7 \end{array}$$

Symbolem **A ~ B** označujeme skutečnost, že matice **B** vznikla z matice **A** konečným počtem kroku podle Gaussovy eliminační metody. Zapíšeme koeficienty soustavy a hodnoty pravých stran do matice a začneme tuto matici eliminovat způsobem popsaným výše. Nad ~ jsou čísla použitých kroků.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 7 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & 10 & 6 & 7 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \overset{(3)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \overset{(4)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

IV. Hodnost matice

Hodnost matice je maximální počet lineárně nezávislých řádků matice. Přesněji řečeno, hodnost udává počet prvku takové množiny řádků, která je nejpočetnější, a přitom lineárně nezávislá.

Hodnost matice určíme Gaussovou eliminační metodou.
Gaussova eliminační metoda nemění hodnost matice.
Př.: od druhého řádku odečtu dvojnásobek prvního, vynechám nulový řádek, hodnost je tedy 2.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathrm{hod}(\mathbf{A}) = \mathrm{hod} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{hod} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{hod} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

V: Hodnost matice se nezmění:

1. řádky napíšeme v jiném pořadí
2. sloupce napíšeme v jiném pořadí
3. některý řádek vynásobíme nenulovým číslem
4. k jednomu řádku přičteme skalární násobek jiného řádku
5. v matici vynecháme nulový řádek

V: Horní trojúhelníková matice má vždy lineárně nezávislé řádky.
V: Každou matici lze převést konečným počtem kroku Gaussovy eliminační metody na horní trojúhelníkovou matici.
V: Čtvercová matice A typu (n, n) se nazývá regulární, pokud hod(A) = n. Čtvercová matice A se nazývá singulární, pokud není regulární, tj. hod(A) < n.

V. Transponovaná matice.

Def.: Nechť A = (ai,j) je matice typu (m, n). Matici A^T = (aj, i), která je typu (n, m), nazýváme transponovanou maticí k matici A. Matice A^T tedy vznikne z matice A přepsáním řádku matice A do sloupců matice A^T, respektive přepsáním sloupců matice A do řádku matice A^T.

Je-li třeba $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, pak je $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

V: Pro každou matici A platí: $(A^T)^T = A$.
V:Pro každou matici A platí: $\mathrm{hod}(A^T) = \mathrm{hod}(A)$.

VI. Součet matic.

Sčítáme prvky na stejných pozicích. Matice musí být stejného tvaru (m, n).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

VII. Součin matic

Nechť A = (ai, j) je matice typu (m, n) a B = (bj, k) je matice typu (n, p). Pak je definován součin matic A · B (v tomto pořadí) jako matice typu (m, p) takto: každý prvek ci, k matice A · B je dán vzorcem

$$c_{i,k} = a_{i,1}\,b_{1,k} + a_{i,2}\,b_{2,k} + \cdots + a_{i,n}\,b_{n,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,b_{j,k}, \quad i \in \{1,\dots,m\}, \quad k \in \{1,\dots,p\}.$$

Všimneme si, že násobení je definováno jen tehdy, pokud počet sloupců první matice je roven počtu řádků druhé matice. Výsledná matice má stejný počet řádků, jako první matice a stejný počet sloupců, jako druhá matice. Názorně:

$$m\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \circ & \cdots & \circ \\ & & \cdots & \\ \circ & \circ & \cdots & \circ \end{pmatrix}}_{n}\right. \cdot \; n\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \cdots & \circ \\ & \cdots & \\ \circ & \cdots & \circ \end{pmatrix}}_{p}\right. = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \cdots & \circ \\ & \cdots & \\ \circ & \cdots & \circ \end{pmatrix}}_{p}\right\} m$$

Př.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+4\cdot2 & 1\cdot2+2\cdot4+3\cdot6+4\cdot7 \\ 5\cdot1+6\cdot3+7\cdot5+8\cdot2 & 5\cdot2+6\cdot4+7\cdot6+8\cdot7 \\ 0\cdot1+2\cdot3+1\cdot5+0\cdot2 & 0\cdot2+2\cdot4+1\cdot6+0\cdot7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 56 \\ 74 & 132 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

Př:

$$(1\ 2\ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = (1*2 + 2*5 + 2*1) = (14)$$

V: Nechť α je prvkem **Z** a matice A, B, C jsou odpovídajících typů tak, aby níže uvedené součiny a součty byly definovány. Pak platí:

1. (A · B) · C = A · (B · C) (asociativní zákon),
2. (A + B) · C = A · C + B · C (distributivní zákon),
3. C · (A + B) = C · A + C · B (distributivní zákon),
4. (A · B) = (A) · B = A · (B),
5. (A · B)T = BT · AT .

VIII. Determinant.

Determinant je číslo, které jistým způsobem charakterizuje čtvercovou matici. Toto číslo má mnoho důležitých významu, se kterými se setkáme nejen v lineární algebře, ale i v jiných matematických disciplínách.

Def.: Nechť M je konečná množina o n prvcích. Permutace prvku množiny M je uspořádaná Permutace n-tice prvků množiny M taková, že žádný prvek z množiny M se v ní neopakuje. Permutaci prvku množiny M = {1, 2, . . . , n} nazýváme stručné permutací n prvků.

Uvedeme některé permutace pěti prvků: (1, 2, 4, 5, 3), (5, 4, 3, 2, 1), (3, 5, 4, 1, 2).

V: Počet různých permutací n prvku je roven číslu n! .

V: Nechť $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ je permutace n prvků. Inverze této permutace je taková dvojice (i_k, i_l), pro které platí $i_k > i_l$, a přitom $k < l$.

Permutace (1, 2, 3) nemá žádnou inverzi. Permutace (1, 3, 2) má jednu inverzi, totiž dvojici (3, 2), pro kterou platí 3 > 2. Jednotlivé inverze jsou na následujících permutacích vyznačeny obloučkem.

$$(1,2,3),\quad (1,\overparen{3,2}),\quad (\overparen{2,1},3),\quad (\overparen{2,\overparen{3,1}}),\quad (\overparen{\overparen{3,1},2}),\quad (\overparen{\overparen{3,2},1}).$$

Def: Pro každou permutaci π = (i1, . . . , in) definujeme znaménko permutace sgn π takto:

$$\operatorname{sgn}\pi = \begin{cases} +1 & \text{má-li } \pi \text{ sudý počet inverzí} \\ -1 & \text{má-li } \pi \text{ lichý počet inverzí} \end{cases}$$

Př.:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn}(1,2,3) = +1, \quad \operatorname{sgn}(1,3,2) = -1, \quad \operatorname{sgn}(2,1,3) = -1, \\ &\operatorname{sgn}(2,3,1) = +1, \quad \operatorname{sgn}(3,1,2) = +1, \quad \operatorname{sgn}(3,2,1) = -1. \end{aligned}$$

V:Prohození jediné dvojice prvku v permutaci způsobí změnu jejího znaménka.

V: Nechť A = (ai,j) je čtvercová matice typu (n, n). Číslo:

$$\sum_{\pi=(i_1,i_2,\dots,i_n)} \operatorname{sgn}\pi \cdot a_{1,i_1}\, a_{2,i_2} \cdots a_{n,i_n}$$

V literatuře se pro det A často používá značení |A|. Níže tedy zapisujeme prvky jednotlivých matic mezi svislé čáry a tím dáváme najevo, že počítáme determinant.

Př: Hledejme determinant matice typu (3, 3) tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

$$\pi = (1,2,3), \quad \operatorname{sgn}\pi = +1, \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \text{sčítanec:} \quad + a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3}.$$

$$\pi = (2,3,1), \quad \operatorname{sgn}\pi = +1, \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \text{sčítanec:} \quad + a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1}.$$

$$\pi = (3,1,2), \quad \operatorname{sgn}\pi = +1, \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \text{sčítanec:} \quad + a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2}.$$

$$\pi = (3,2,1), \quad \operatorname{sgn}\pi = -1, \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \text{sčítanec:} \quad - a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1}.$$

$$\pi = (2,1,3), \quad \operatorname{sgn}\pi = -1, \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \text{sčítanec:} \quad - a_{1,2} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,3}.$$

$$\pi = (1,3,2), \quad \operatorname{sgn}\pi = -1, \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \text{sčítanec:} \quad - a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2}.$$

$$\det \mathbf{A} = a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} + a_{1,2}\, a_{2,3}\, a_{3,1} + a_{1,3}\, a_{2,1}\, a_{3,2} - a_{1,3}\, a_{2,2}\, a_{3,1} - a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{3,3} - a_{1,1}\, a_{2,3}\, a_{3,2}.$$

Determinant se dá nalézt také Sarrusovým pravidlem (do matice (3,3), pak je to již složité):

$$det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

+ **-**

$$det\, A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

Základní vlastnosti determinantu:

(V1)Jestliže se matice B liší od matice A jen prohozením jedné dvojice řádků, pak detB = −detA.

(V2) Jestliže matice A má dva stejné řádky, pak detA = 0.

$$\text{(V3)} \quad \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha\, a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

$$\text{(V4)} \quad \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ b_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + b_i \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

$$\text{(V5)} \quad \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + \alpha\, a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \text{kde } a_j \text{ je nějaký jiný řádek téže matice.}$$

V: Čtvercová matice A je regulární právě tehdy, když detA = 0.

V: Nechť A je čtvercová matice. Pak $\det A = \det A^T$.

V: Nechť A, B jsou čtvercové matice. Pak detA detB = det(A · B).

V: Věta (o rozvoji determinantu podle r-tého řádku). Nechť $A = (a_{r,s})$ je čtvercová matice typu (n, n) a $A_{i,j}$ jsou matice typu (n − 1, n − 1), které vzniknou z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak pro každé r prvkem {1, . . . , n} platí:

$$a_{r,1}(-1)^{r+1}\det \mathbf{A}_{r,1} + a_{r,2}(-1)^{r+2}\det \mathbf{A}_{r,2} + \cdots + a_{r,n}(-1)^{r+n}\det \mathbf{A}_{r,n} = \det \mathbf{A}.$$

Je-li dále $t \in \{1, \ldots, n\}$, $t \neq r$, pak platí

$$a_{r,1}(-1)^{t+1}\det \mathbf{A}_{t,1} + a_{r,2}(-1)^{t+2}\det \mathbf{A}_{t,2} + \cdots + a_{r,n}(-1)^{t+n}\det \mathbf{A}_{t,n} = 0.$$

Př:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Subdeterminant $A_{1,1}$

$$\det \mathbf{A} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 5 + 2\cdot 0 + 4\cdot(-5) - 1\cdot 0 = -15.$$

Prvek $a_{1,1}$. Doplněk $D_{1,1}$

V: Subdeterminantem $\mathbf{A_{i,k}}$ matice **A** budeme rozumět determinant matice vzniklé vynecháním i-tého řádku a k-tého sloupce.

V: Doplňkem $\mathbf{D_{i,k}}$ matice **A** je pak číslo $\mathbf{D_{i,k} = (-1)^{i+k}\ A_{i,k}}$

Věta o rozvoji determinantu se dá také napsat:

$\det A = a_{i,1} D_{i,1} + a_{i,2} D_{i,2} + \ldots\ a_{i,n} D_{i,n}$

V: Nechť A je regulární matice. Pak $\det A^{-1} = 1/\det A$.

IX. Inversní matice.

Def: Nechť A je čtvercová matice typu (n, n) a E je jednotková matice stejného typu. Matici B typu (n, n), která splňuje vlastnost A·B = E = B·A nazýváme inverzní maticí k matici A. Inverzní matici k matici A označujeme symbolem A^{-1}.

Př: Najdi A^{-1}

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vedle prvku matice A napíšeme prvky jednotkové matice stejného typu (oddělíme od sebe pro přehlednost svislou čarou) a dále použijeme řádkové úpravy Gaussovy eliminační metody na matici (A|E) jako celek. To znamená, že pracujeme s řádky délky 2n, v našem konkrétním případě s řádky o šesti prvcích. Při eliminaci se snažíme vlevo od svislé čáry dostat postupně jednotkovou matici.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right), \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

V: Nechť A ~ B jsou dvě matice, přičemž v eliminaci označené zde symbolem ~ nebyl použit krok vynechání nebo přidání nulového řádku. Pak existuje regulární čtvercová matice P taková, že B = P · A.

V: Nechť A je regulární a (A|E) ~ (E|B), kde ~ označuje konečný počet řádkových úprav podle eliminační metody a E jednotkovou matici. Pak B = A^{-1}.

X. Řešení lineárních soustav.

Řešením soustavy Ax = b je takový vektor a = (1, 2, . . . , n) je prvkem R^n, pro který platí: dosadíme-li hodnoty i za symboly xi, pak je splněna požadovaná maticová rovnost, tj.

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Řešit soustavu Ax = b znamená nalézt všechna její řešení, tj. nalézt podmnožinu R^n všech řešení této soustavy.
V: Soustava Ax = b má řešení právě tehdy, když hodA = hod(A|b), tj. když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy.
V: Ke každé soustavě Ax = b lze nalézt ekvivalentní soustavu Cx = d, jejíž matice C je horní trojúhelníková.
Homogenní soustava lineárních rovnic je soustava s nulovou pravou stranou.
Soustavu řešíme Gaussovou eliminační metodou, matici převedeme na horní trojúhelníkovou matici.

Př.: Řešte:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 8x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Eliminujeme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Z poslední rovnice budeme počítat x6, z předposlední rovnice x3 a z první rovnice x1. Hodnoty neznámých x2, x4, x5 mohou být libovolné. Zaveďme pro ně parametry x2 = t, x4 = u, x5 = v. Z poslední rovnice vychází jediné x6 = 0, z předposlední rovnice máme x3 = −2v a konečně z první rovnice dostáváme x1 = −t + 4v − 3u − 3v = −t + v − 3u. Výsledek sumarizujeme takto:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (-t + v - 3u,\ t,\ -2v,\ u,\ v,\ 0) =$$
$$= t\,(-1, 1, 0, 0, 0, 0) + u\,(-3, 0, 0, 1, 0, 0) + v\,(1, 0, -2, 0, 1, 0).$$

Z tohoto zápisu vyplývá, že množina všech řešení dané homogenní soustavy je množinou všech lineárních kombinací uvedených tří vektoru, což můžeme zapsat pomocí lineárního obalu takto:

$$M_0 = \langle (-1, 1, 0, 0, 0, 0), (-3, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, -2, 0, 1, 0) \rangle.$$

V: 1. Nechť v je partikulární řešení nehomogenní soustavy Ax = b a u je libovolné řešení přidružené homogenní soustavy Ax = o. Pak v + u je také řešením soustavy Ax = b.

2. Nechť v a w jsou dvě partikulární řešení nehomogenní soustavy Ax = b. Pak v −w je řešením přidružené homogenní soustavy Ax = o.

V: Nechť v je partikulární řešení soustavy Ax = b a M_0 je lineární prostor všech řešení přidružené homogenní soustavy Ax = o. Pak pro množinu M všech řešení soustavy Ax = b platí

M = {v + u; u prvkem M_0}

Tzn., že řešení nehomogenní soustavy je součet řešení homogenní a nehomogenní soustavy.

Př.:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 8x_6 &= 10 \end{aligned}$$

Eliminujeme rozšířenou matici soustavy.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&2&3&3&3&1 \\ 1&1&1&3&1&1&-1 \\ 2&2&2&6&2&8&10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&2&3&3&3&1 \\ 0&0&-1&0&-2&-2&-2 \\ 0&0&-2&0&-4&2&8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&2&3&3&3&1 \\ 0&0&1&0&2&2&2 \\ 0&0&0&0&0&6&12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&1&2&3&3&3&1 \\ 0&0&1&0&2&2&2 \\ 0&0&0&0&0&1&2 \end{array}\right).$$

Z poslední rovnice budeme počítat x_6, z předposlední rovnice x_3 a z první rovnice x_1. Hodnoty neznámých x_2, x_4, x_5 mohou být libovolné. Zaveďme pro ne parametry $x_2 = t$, $x_4 = u$, $x_5 = v$. Z poslední rovnice máme $x_6 = 2$, z předposlední rovnice $x_3 = 2 - 2v - 2 \cdot 2 = -2 - 2v$ a konečně z první rovnice dostáváme $x_1 = 1 - t - 2(-2 - 2v) - 3u - 3v - 3 \cdot 2 = -1 - t + v - 3u$. Výsledek sumarizujeme takto:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (-1 - t + v - 3u, t, -2 - 2v, u, v, 2) =$$
$$= (-1, 0, -2, 0, 0, 2) + t\,(-1, 1, 0, 0, 0, 0) + u\,(-3, 0, 0, 1, 0, 0) + v\,(1, 0, -2, 0, 1, 0).$$

$$M = (-1, 0, -2, 0, 0, 2) + \langle (-1, 1, 0, 0, 0, 0), (-3, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, -2, 0, 1, 0) \rangle.$$

Vektor (−1, 0,−2, 0, 0, 2) je partikulárním řešením dané nehomogenní soustavy a vektory (−1, 1, 0, 0, 0, 0), (−3, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0,−2, 0, 1, 0) tvoří bázi prostoru řešení přidružené homogenní soustavy.

XI. Cramerovo pravidlo.

Mějme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \ldots.., x_n$. Jestliže matice soustavy A je regulární, pak má soustava právě jedno řešení, které se dá zapsat ve tvaru

$$x_i = \frac{\det Ai}{\det A} \qquad (i = 1, \ldots.., n),$$

kde Ai je matice, která vznikne z matice soustavy A po náhradě i-tého sloupce sloupcem pravých stran rovnic soustavy.

Př:

$x + 2y = 3$
$x + y = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array}\right)$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3-2 = 1$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-1 = 1$$

$$\mathbf{X = \det A_1 / \det A = 1/1 = 1}$$