Různé algoritmy mají různou složitost

Algoritmus a program není totéž

Datové struktury a algoritmy

Petr Felkel

felkel@fel.cvut.cz

DSA

Marko Genyk-Berezovskyj

berezovs@fel.cvut.cz

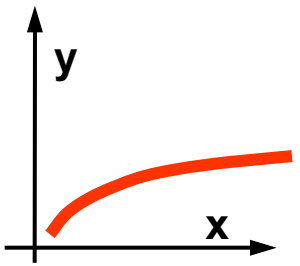
http://service.felk.cvut.cz/courses/X36DSA

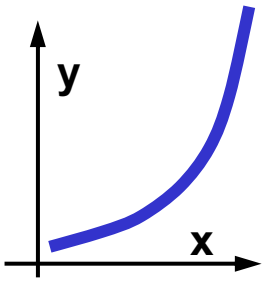
Rychlost...

**Jeden algoritmus (program, postup, metoda…)
je rychlejší než druhý.**

Co ta věta znamená ??

Asymptotická složitost





Každému algoritmu lze jednoznačně přiřadit

rostoucí funkci

zvanou

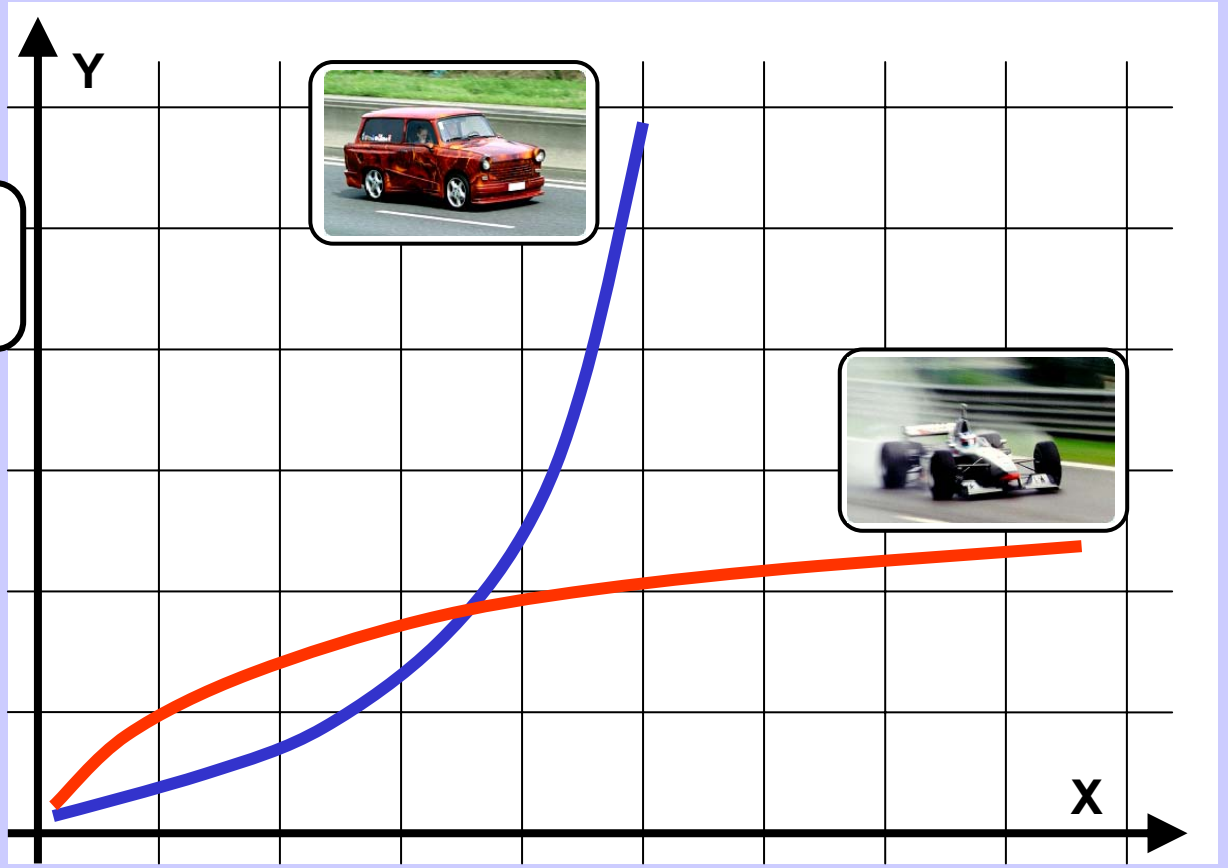
asymptotická složitost,

která charakterizuje počet operací algoritmu v závislosti na rostoucím rozsahu vstupních dat.

Čím pomaleji tato funkce roste, tím je algoritmus rychlejší.

Asymptotická složitost

Y ~ zatížení systému (trvání výpočtu)



X ~ naše požadavky (rozsah vstupních dat)

Příklady

Najdi min and max hodnotu v poli — STANDARD

min	max	a								
3	3	3	2	7	10	0	5	–10	4	6

min	max	a								
3	3	3	2	7	10	0	5	–10	4	6

```
if (a[i] < min) min = a[i];
if (a[i] > max) max = a[i];
```

min	max	a								
2	3	3	2	7	10	0	5	–10	4	6

Příklady

Najdi min and max hodnotu v poli — STANDARD

min	max	a								
2	7	3	2	7	10	0	5	–10	4	6

atd...

hotovo

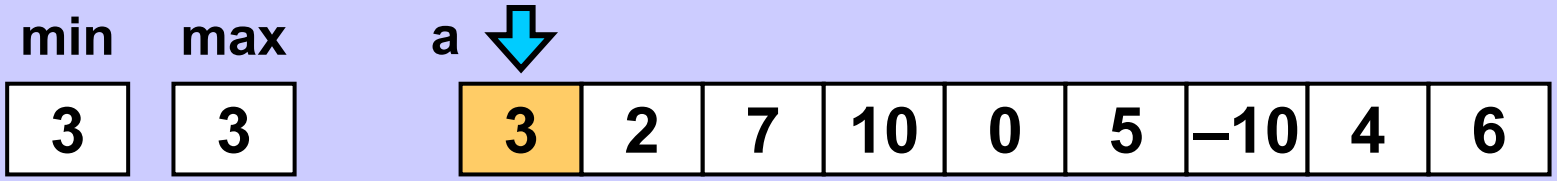
min	max	a								
–10	10	3	2	7	10	0	5	–10	4	6

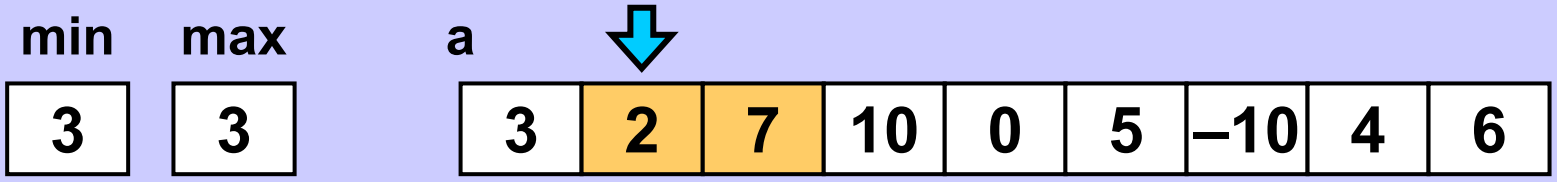
kód

```
min = a[0]; max = a[0];
for ( i = 1; i < a.length; i++) {
  if (a[i] < min) min = a[i];
  if (a[i] > max) max = a[i]; }
```

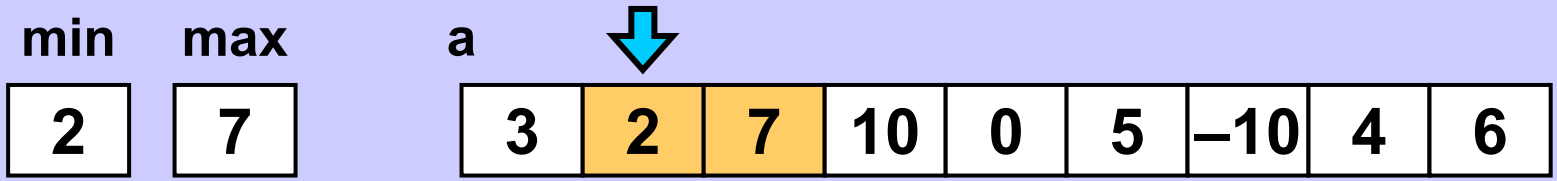
Příklady

Najdi min and max hodnotu v poli — RYCHLEJI!



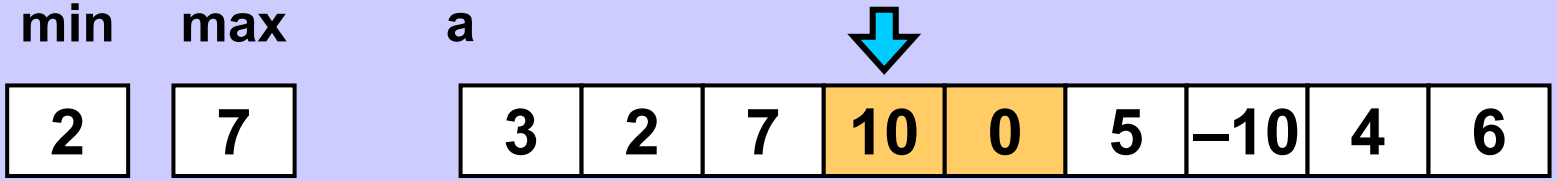



```
if (a[i] < a[i+1]) {
   if (  a[i] < min) min = a[i];
   if (a[i+1] > max) max = a[i+1];}
```

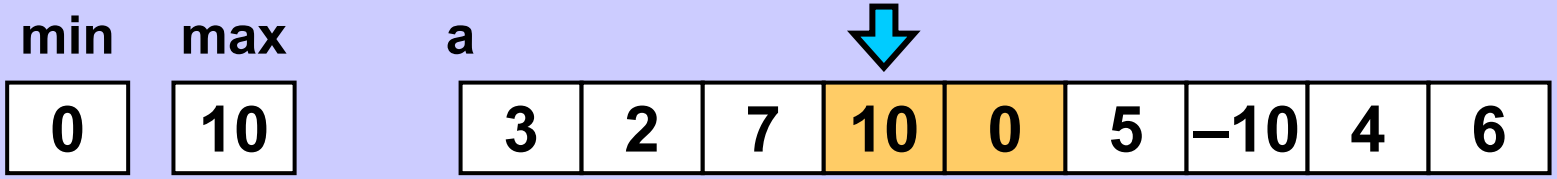


Příklady

Najdi min and max hodnotu v poli — RYCHLEJI!




```
if (a[i] < a[i+1]) {
   if (  a[i] < min) min = a[i];
   if (a[i+1] > max) max = a[i+1];}
else {
   if (  a[i] > max) max = a[i];
   if (a[i+1] < min) min = a[i+1];}
```



Příklady

Najdi min and max hodnotu v poli — RYCHLEJI!

hotovo

min	max	a							
–10	10	3	2	7	10	0	5	–10	4	6

kód

```
min = a[0]; max = a[0];
for (i=1; i < a.length-1; i=i+2 ) {
  if (a[i] < a[i+1]) {
    if (  a[i] < min) min = a[i];
    if (a[i+1] > max) max = a[i+1];}
  else {
    if (  a[i] > max) max = a[i];
    if (a[i+1] < min) min = a[i+1];}}
```

Počítání složitosti

Elementární operace

- aritmetická operace
- porovnání dvou čísel
- přesun čísla v paměti

Složitost A

celkový počet elementárních operací

zjednodušení

Složitost B

celkový počet elementárních operací nad daty

Počítání složitosti

Složitost B — celkový počet elementárních operací nad daty

další zjednodušení

Složitost C — celkový počet porovnání čísel (znaků) v datech

Takto složitost mnohdy počítáme

Počítání složitosti

Najdi min and max hodnotu v poli — STANDARD

A

Složitost

Všechny operace

a.length = N

```
1                1
min = a[0]; max = a[0];
        1          N                N–1
for ( i = 1; i < a.length; i++){
              N–1
  if (a[i] < min) min = a[i];
              N–1          0...N–1
  if (a[i] > max) max = a[i]; }
```

exkluzive!

Případ

nejlepší 1 + 1 + 1 + N + N–1 + N–1 + 0 + N–1 + 0 = 4N

nejhorší 1 + 1 + 1 + N + N–1 + N–1 + N–1 + N–1 = 5N–1

Počítání složitosti

Najdi min and max hodnotu v poli — STANDARD

složitost **B**

Operace nad daty

a.length = N

```
min = a[0];   max = a[0];                          // 1, 1
for ( i = 1; i < a.length; i++){                   //  ,  ,  
  if (a[i] < min) min = a[i];                      // N–1, 0...N–1
  if (a[i] > max) max = a[i]; }                    // N–1, 0...N–1
```

Případ

nejlepší	1 + 1 + N–1 +0 + N–1 + 0 = 2N
nejhorší	1 + 1 + N–1 + N–1 + N–1 + N–1 = 4N–2

Počítání složitosti

Najdi min and max hodnotu v poli — STANDARD

C

složitost

pouze testy v datech

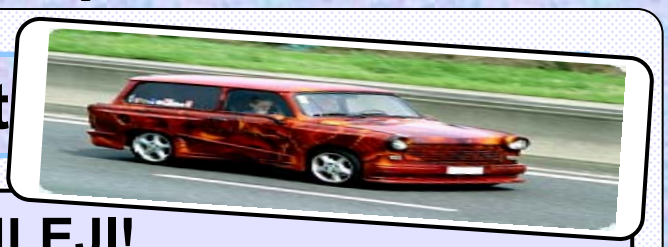
a.length = N

```
min = a[0]; max = a[0];

for ( i = 1; i < a.length; i++){
                                  N–1
  if (a[i] < min) min = a[i];
                                  N–1
  if (a[i] > max) max = a[i]; }
```

vždy N–1 + N–1 = 2N–2 testů

Počítání složitost



Najdi min and max hodnotu v poli — RYCHLEJI!

složitost **C**

pouze testy v datech

a.length = N

N

a

3	2	7	10	0	5	–10	4	6

Jedna dvojice — 3 testy

(N–1)/2 dvojic

vždy 3(N–1)/2 = (3N – 3)/2 testů

Počítání složitosti

Velikost pole **N**	Počet testů STANDARDNÍ **2 (N – 1)**	Počet testů RYCHLEJŠÍ **(3N – 3)/2**	poměr STD./RYCHL.
11	20	15	1.33
21	40	30	1.33
51	100	75	1.33
101	200	150	1.33
201	400	300	1.33
501	1 000	750	1.33
1 001	2 000	1 500	1.33
2 001	4 000	3 000	1.33
5 001	10 000	7 500	1.33
1 000 001	2 000 000	1 500 000	1.33

Tab. 1

Příklady

data

pole a:

1	–1	0	–2	5	1	0

pole b:

4	2	4	3	4	2	7

úloha

Kolik prvků pole b je rovno součtu prvků pole a?

řešení

pole a:

1	–1	0	–2	5	1	0

součet = 4

pole b:

4	2	4	3	4	2	7

výsledek = 3

Příklady

funkce

```
int sumArr(int[] a) { /*snadné*/ }
```

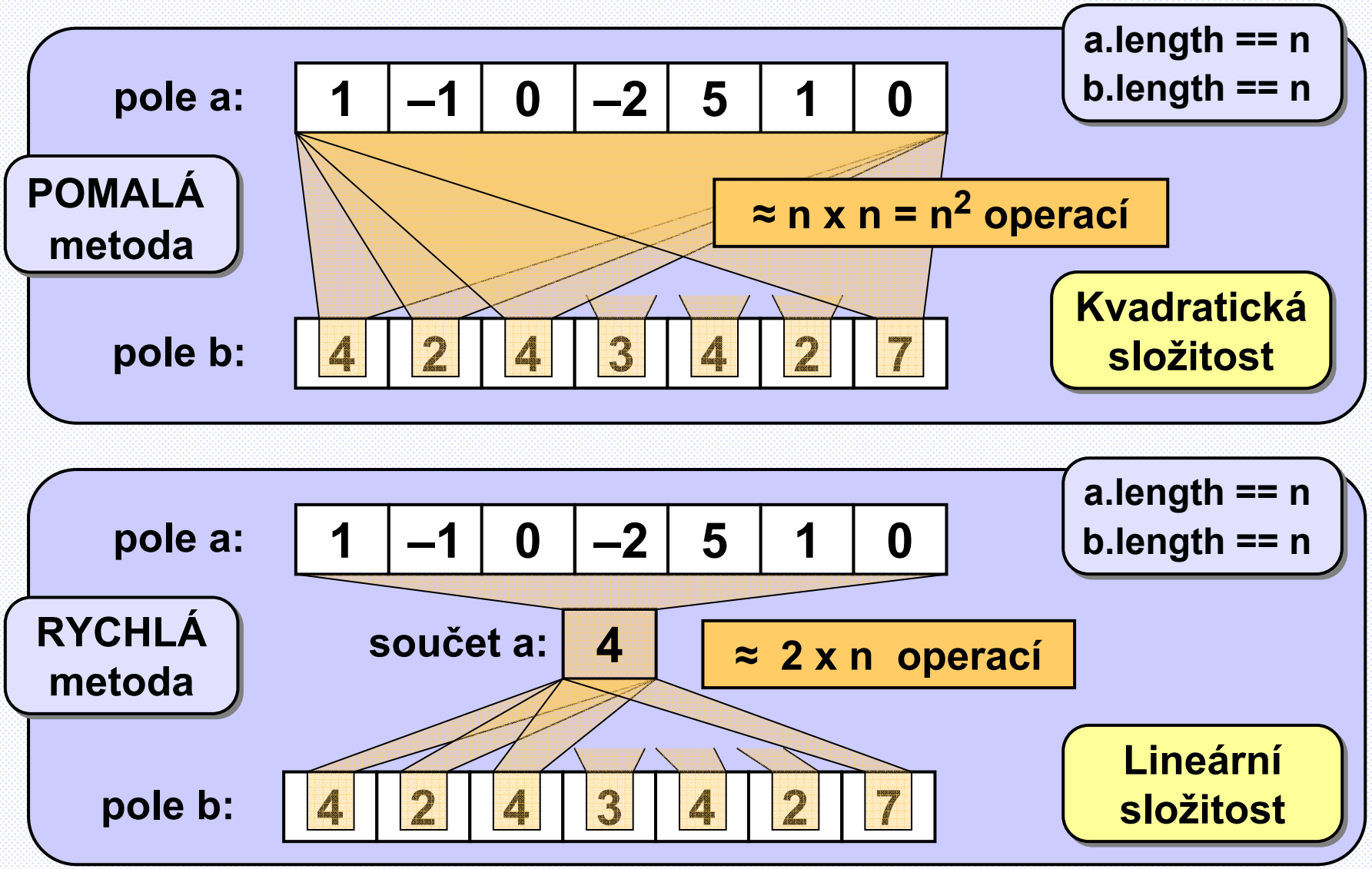
POMALÁ metoda

```
count = 0;
for (int i = 0; i < b.length; i++)
  if (b[i]==sumArr(a)) count++;
return count;
```

RYCHLÁ metoda

```
count = 0;
sumOf_b = sumArr(a);
for (int i = 0; i < b.length; i++)
  if (b[i]==sumOf_b) count++;
return count;
```

Počítání složitosti



Počítání složitosti

Velikost pole **N**	POMALÁ metoda operací N^2	RYCHLÁ metoda operací **2N**	poměr POMALÁ/RYCHLÁ
11	121	22	5.5
21	441	42	10 .5
51	2 601	102	25 .5
101	10 201	202	50 .5
201	40 401	402	100 .5
501	251 001	1 002	250 .5
1 001	1 002 001	2 002	500 .5
2 001	4 004 001	4 002	1 000 .5
5 001	25 010 001	10 002	2 500 .5
1 000 001	1 000 002 000 001	2 000 002	500 000 .5

Tab. 2

Počítání složitosti

Velikost pole **N**	Poměr rychlostí řešení 1. úlohy	Poměr rychlostí řešení 2. úlohy
11	1.33	5.5
21	1.33	10 .5
51	1.33	25 .5
101	1.33	50 .5
201	1.33	100 .5
501	1.33	250 .5
1 001	1.33	500 .5
2 001	1.33	1 000 .5
5 001	1.33	2 500 .5
1 000 001	1.33	500 000 .5

Tab. 3

Příklady

Hledání v seřazeném poli — lineární, POMALÉ

dané pole Seřazené pole: → **velikost = N**

363	369	388	603	638	693	803	833	836	839	860	863	938	939	966	968	983	993

najdi 993 ! **testů: N**

363	369	388	603	638	693	803	833	836	839	860	863	938	939	966	968	983	993

najdi 363 !

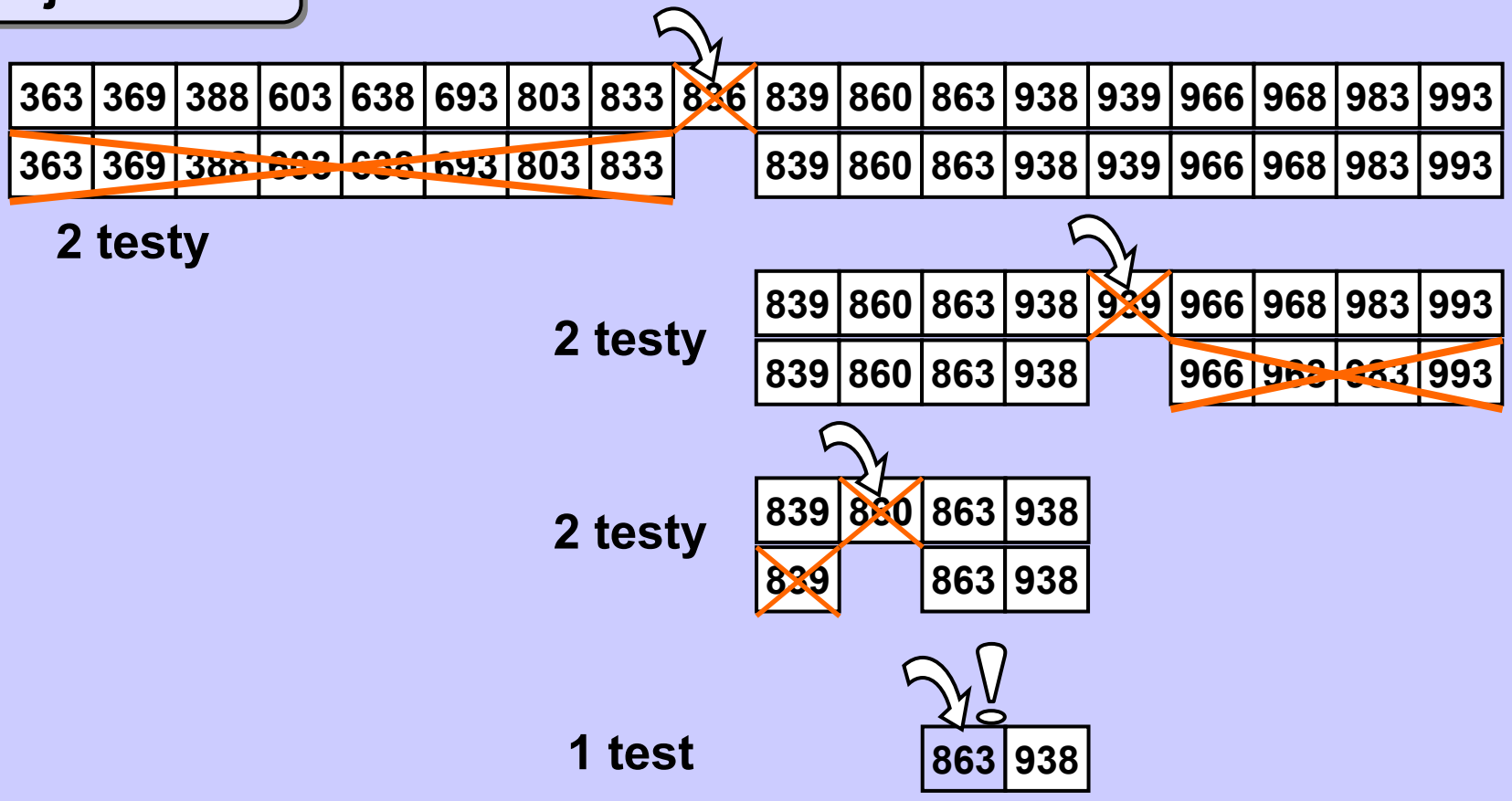
 **testů: 1**

363	369	388	603	638	693	803	833	836	839	860	863	938	939	966	968	983	993

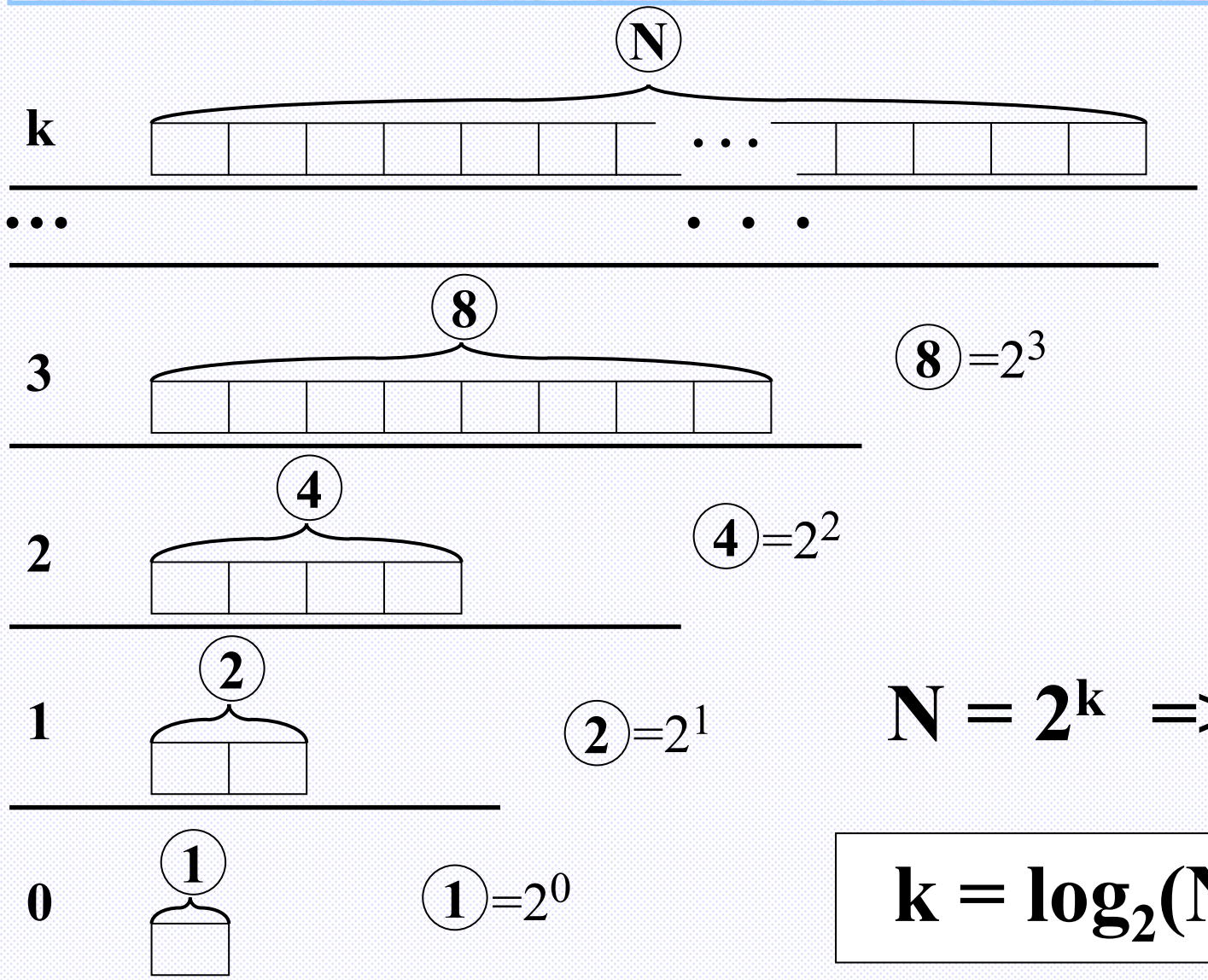
Příklady

Hledání v seřazeném poli — binární, RYCHLÉ

najdi 863 !



Exponent, logarimus a půlení intervalu



$$N = 2^k \Rightarrow$$

$$k = \log_2(N)$$

Počítání složitosti

Velikost pole	Počet testů: lineární hledání — případ nejlepší	lineární hledání — případ nejhorší	lineární hledání — případ průměrný	binární hledání nejhorší případ	poměr
5	1	5	3	5	0.6
10	1	10	5.5	7	0.79
20	1	20	10.5	9	1.17
50	1	50	25.5	11	2.32
100	1	100	50.5	13	3.88
200	1	200	100.5	15	6.70
500	1	500	250.5	17	14.74
1 000	1	1000	500.5	19	26.34
2 000	1	2000	1000.5	21	47.64
5 000	1	5000	2500.5	25	100.02
1 000 000	1	1 000 000	500 000.5	59	8 474.58

Tab. 4

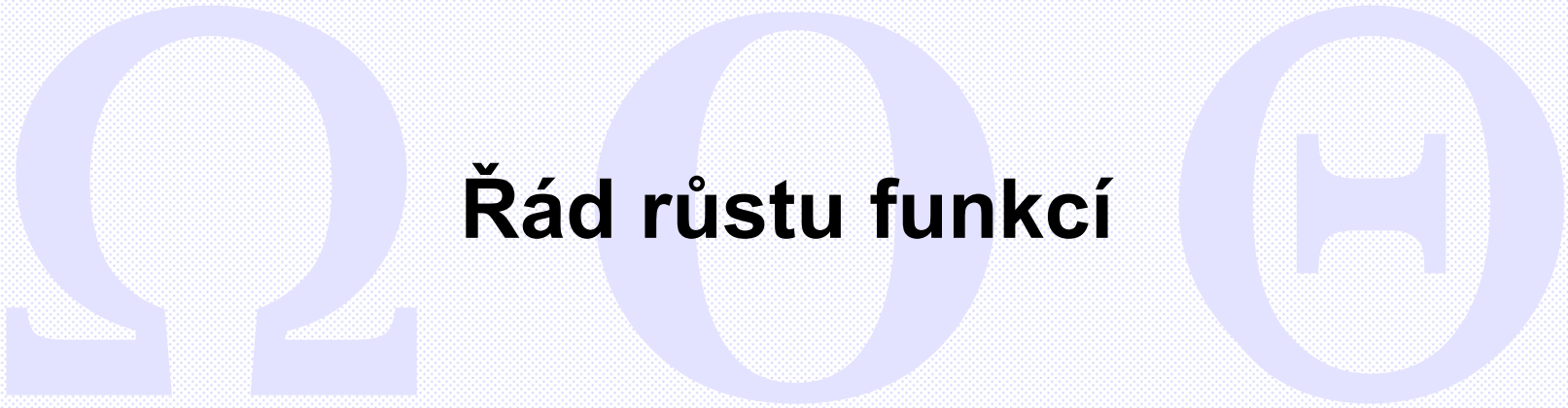
Počítání složitosti

Doba výpočtu pro různé časové složitosti s předpokladem, že 1 operace trvá 1 μs (10^{-6} sec)

složitost	Počet operací					
	10	20	40	60	500	1000
$\log_2 n$	3,3 μs	4,3 μs	5 μs	5,8 μs	9 μs	10 μs
n	10 μs	20 μs	40 μs	60 μs	0,5 ms	1 ms
$n \log_2 n$	33 μs	86 μs	0,2 ms	0,35 ms	4,5 ms	10 ms
n^2	0,1 ms	0,4 ms	1,6 ms	3,6 ms	0,25 s	1 s
n^3	1 ms	8 ms	64 ms	0,2 s	125 s	17 min
n^4	10 ms	160 ms	2,56 s	13 s	17 hod	11,6 dnů
2^n	1 ms	1 s	12,7 dnů	36000 let	10^{137} let	10^{287} let
$n!$	3,6 s	77000 let	10^{34} let	10^{68} let	10^{1110} let	10^{2554} let

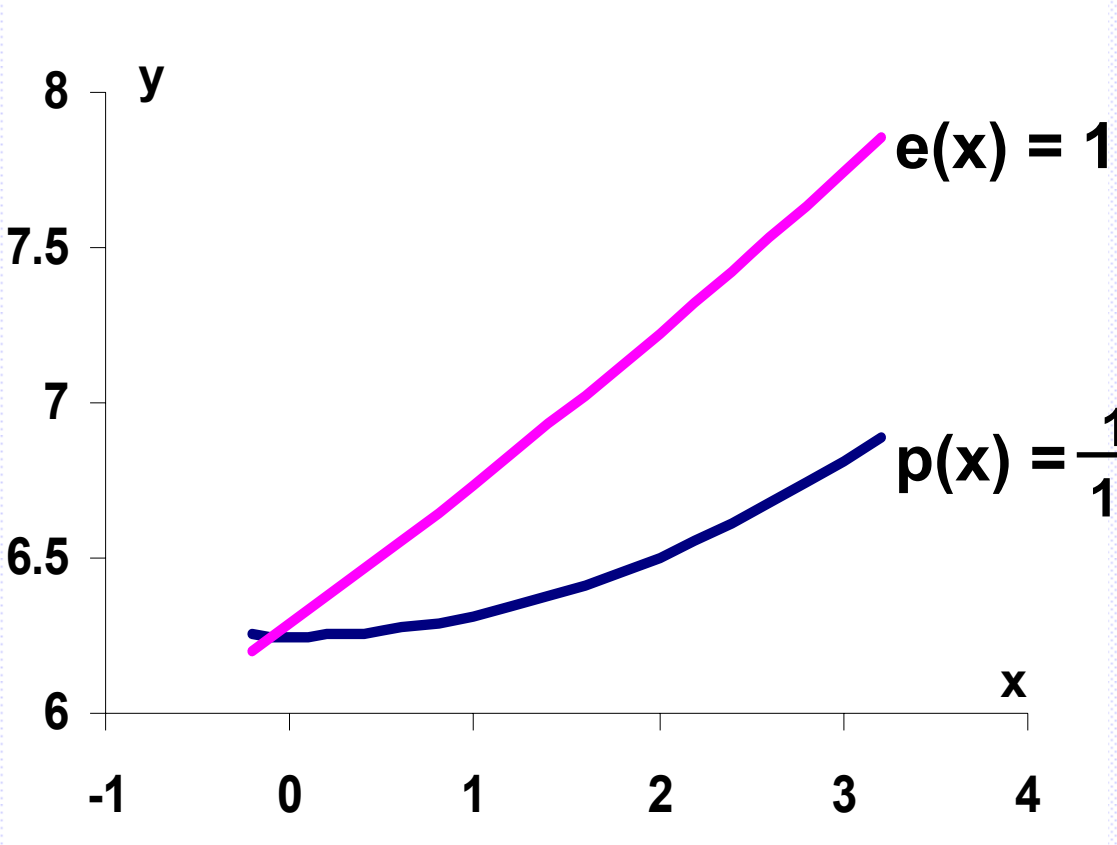
Tab. 5

Řád růstu funkcí



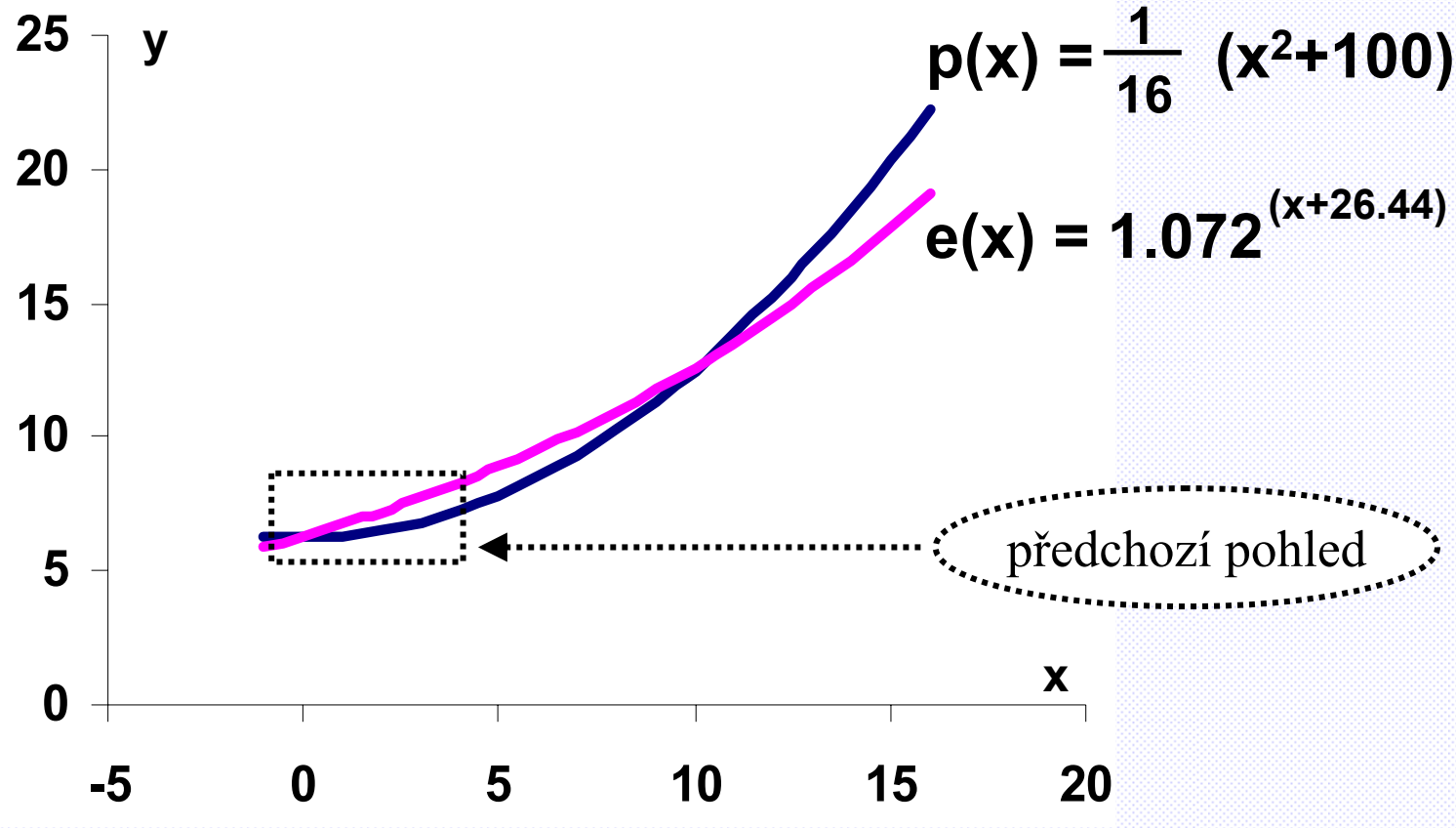
Řád růstu funkcí

Řád růstu funkcí



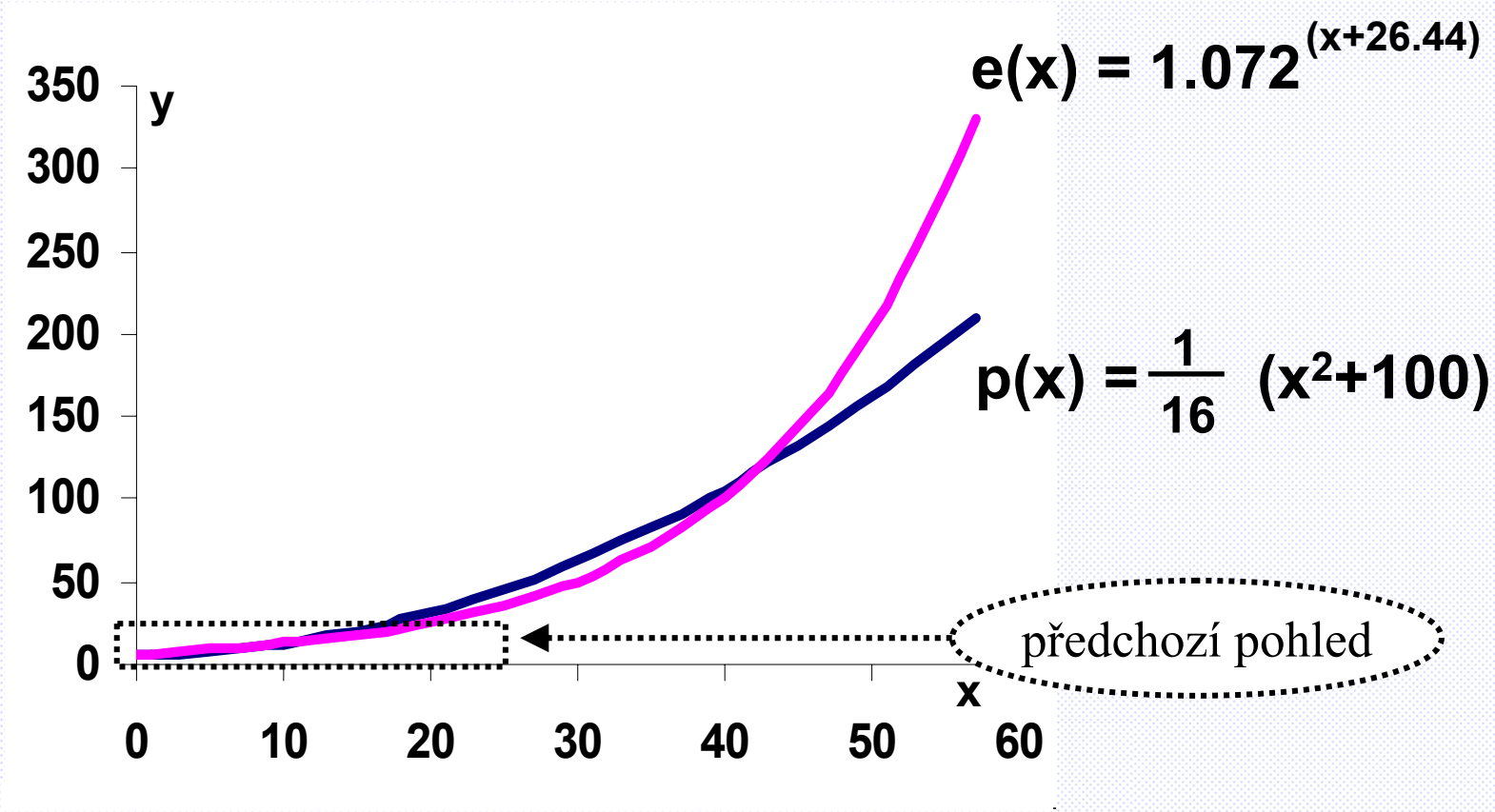
Řád růstu funkcí

Zoom out! :



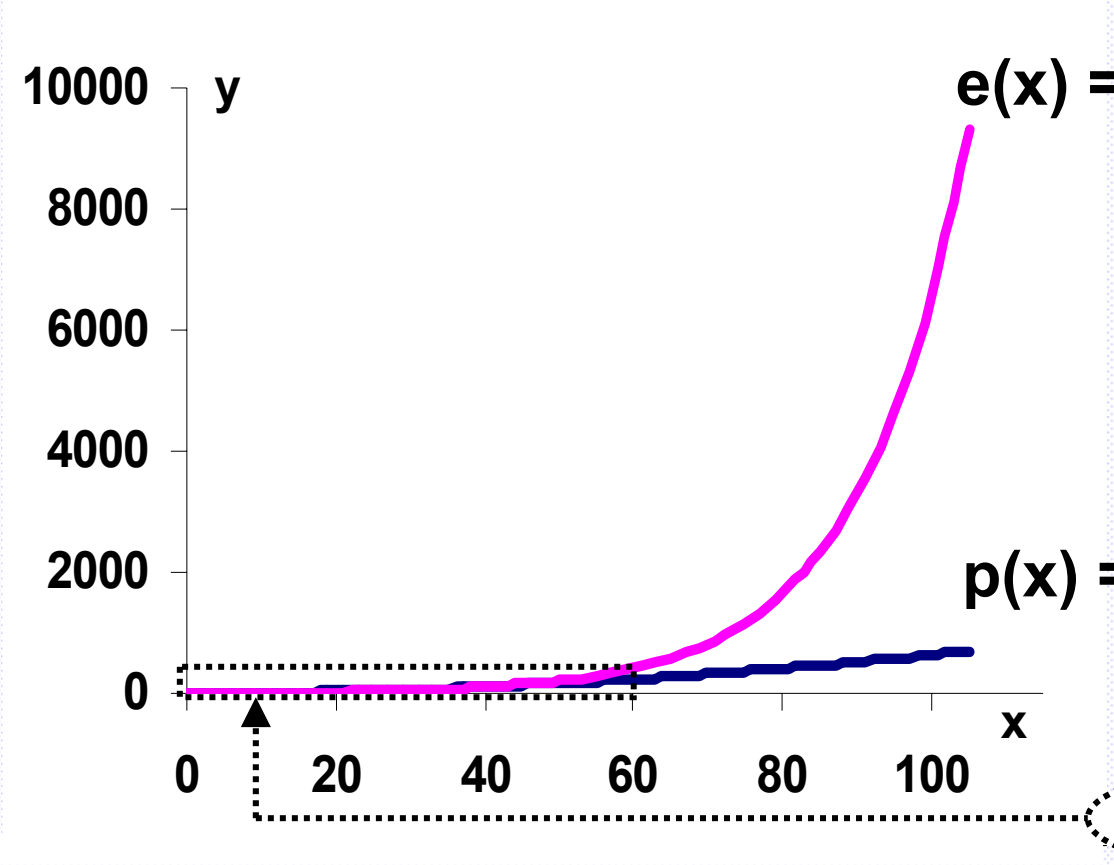
Řád růstu funkcí

Zoom out! :



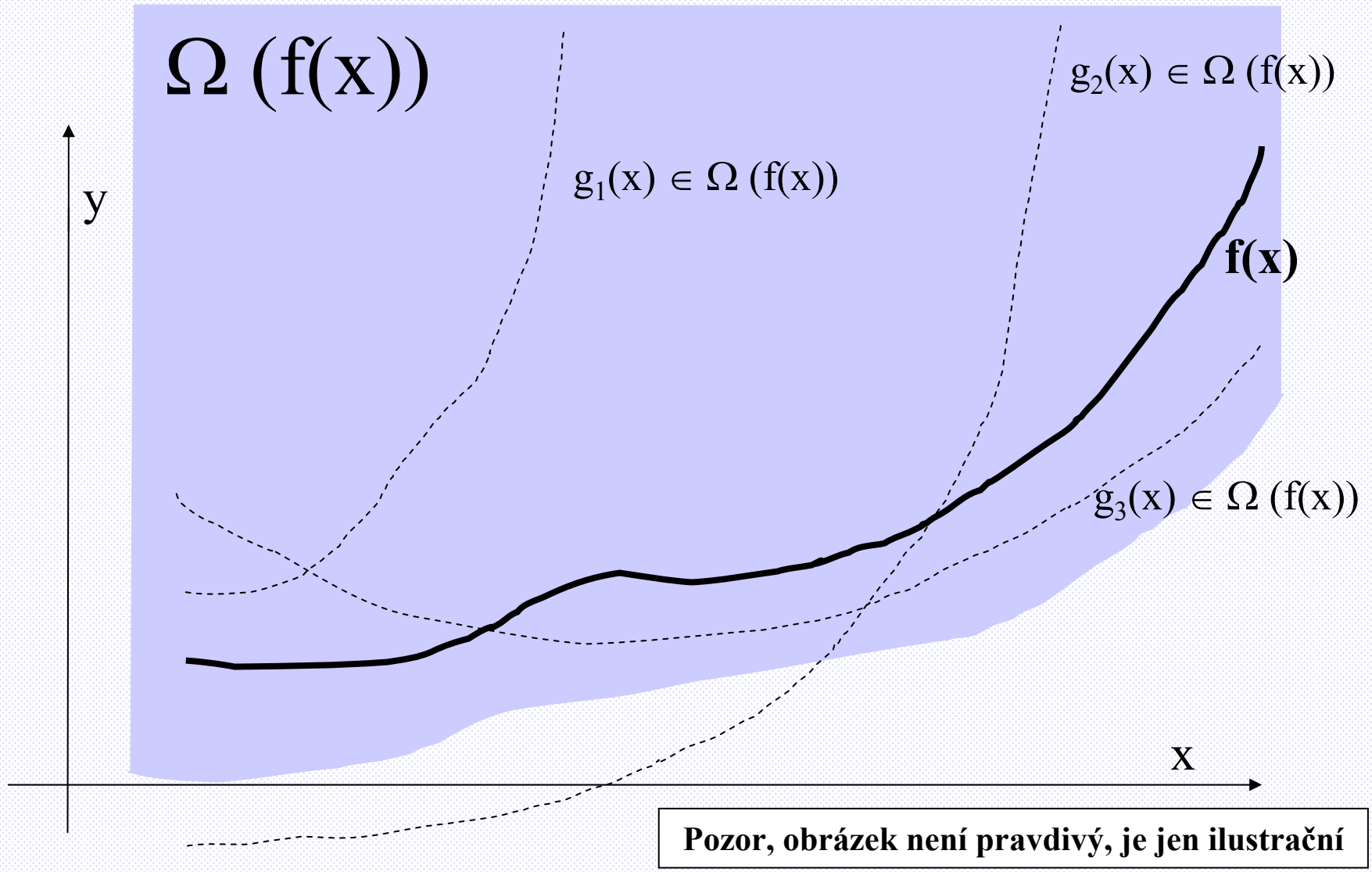
Řád růstu funkcí

Zoom out! :



atd:… e(1000) = 984318123660540890654762870434 2.9 p(1000) = 62506.25 …

Řád růstu funkcí



Pozor, obrázek není pravdivý, je jen ilustrační

Řád růstu funkcí

Ω(f(x))

Ω Omega

V množině Ω(f(x))
se octne každá funkce g(x), která od určitého bodu x_0
(není nijak předem předepsáno, kde by x_0 měl být)

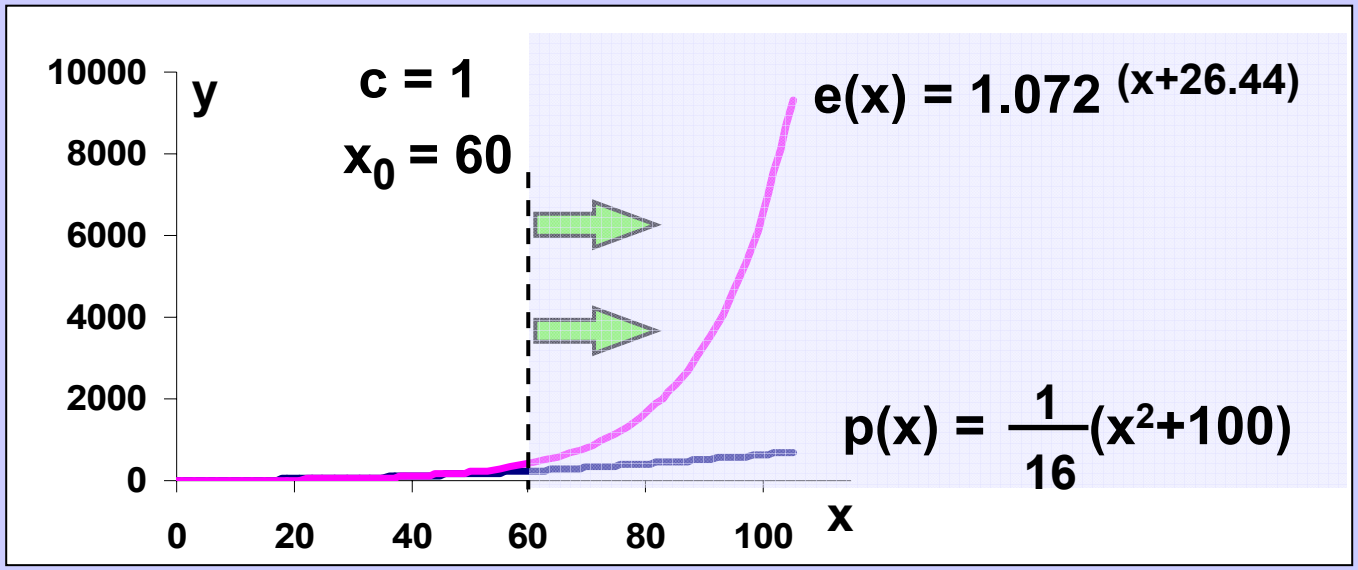
a) – je už vždy větší než funkce f(x)

b) – sice větší než f(x) není, ale po vynásobení
nějakou kladnou konstantou
(hodnota konstanty také není nijak předepsána)
je už vždy větší než funkce f(x).

Takže: pokud najdeme nějaké x_0 a c>0 takové, že
$c \cdot g(x) > f(x)$ všude napravo od x_0, (někdy stačí c=1)
je jisto, že $g(x) \in \Omega(f(x))$

Řád růstu funkcí

Takže: pokud najdeme nějaké x_0 a c>0 takové, že $c \cdot g(x) > f(x)$ všude napravo od x_0, (někdy stačí c=1) je jisto, že $g(x) \in \Omega(f(x))$



$x > 60 \Rightarrow e(x) > p(x)$, tj. $1.072^{(x+26.44)} > \frac{1}{16}(x^2+100)$

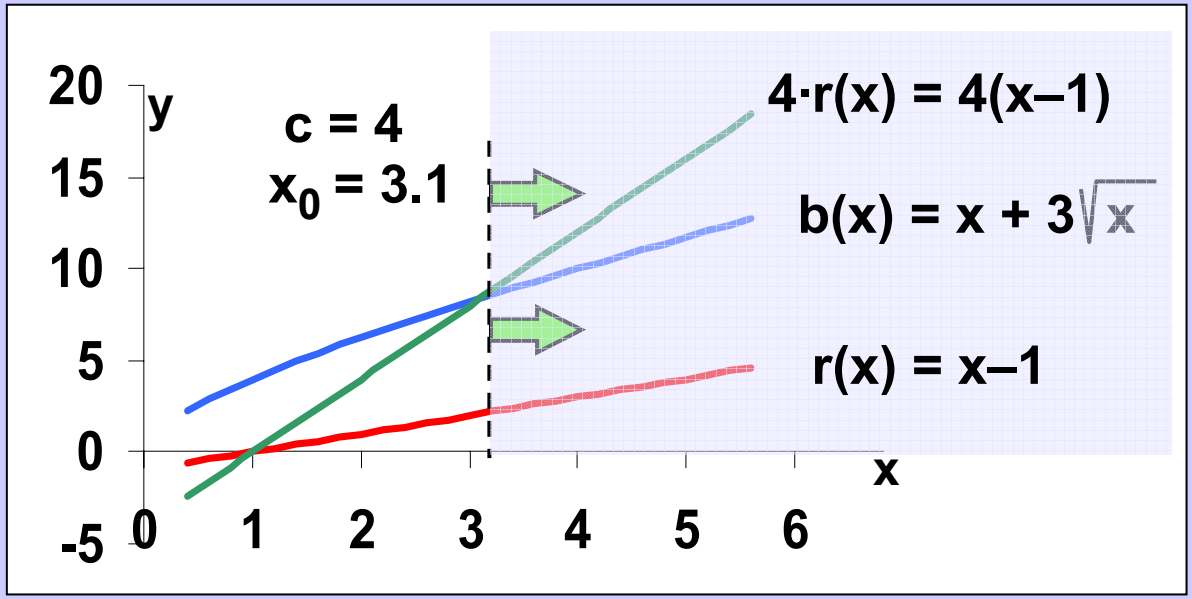
tudíž platí $e(x) \in \Omega(p(x))$ (ověřte!)

Řád růstu funkcí

Takže: pokud najdeme nějaké x_0 a c>0 takové, že
$c \cdot g(x) > f(x)$ všude napravo od x_0, (někdy stačí c=1)
je jisto, že $g(x) \in \Omega(f(x))$

$b(x) = x + 3\sqrt{x}$

$r(x) = x-1$



$x > 3.1 \Rightarrow 4 \cdot r(x) > b(x)$, tj. $4(x-1) > x + 3\sqrt{x}$ (ověřte!)

tudíž platí $r(x) \in \Omega(b(x))$

Řád růstu funkcí

Typické ukázky

$x^2 \in \Omega(x)$ $x^3 \in \Omega(x^2)$ $x^{n+1} \in \Omega(x^n)$

$2^x \in \Omega(x^2)$ $2^x \in \Omega(x^3)$ $2^x \in \Omega(x^{5000})$

$x \in \Omega(\log(x))$ $x \cdot \log(x) \in \Omega(x)$ $x^2 \in \Omega(x \cdot \log(x))$

$2^x \in \Omega(x^{20000})$ $x^{20000} \in \Omega(x)$ $x \in \Omega(1)$

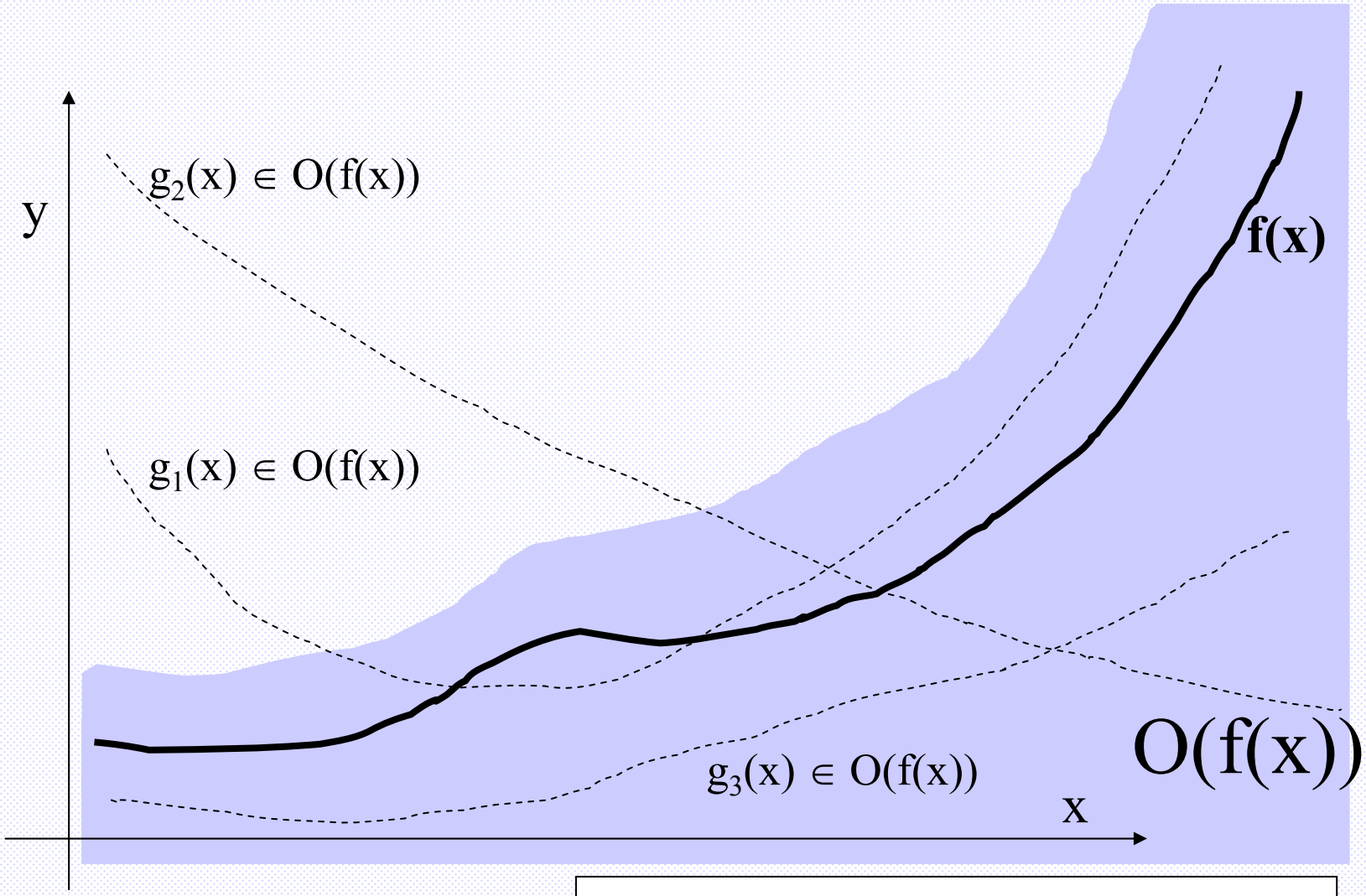
vždy

$f(x) > 1 \Rightarrow f(x) \in \Omega(1)$

těžko uvěřitelné

$\sqrt[200\,000]{x} \in \Omega(\log(x)^{200\,000})$

Řád růstu funkcí



Pozor, obrázek není pravdivý, je jen ilustrační

Řád růstu funkcí

O(f(x))

O Omikron

V množině O(f(x))
se octne každá funkce g(x), která od určitého bodu x_0
(není nijak předem předepsáno, kde by x_0 měl být)

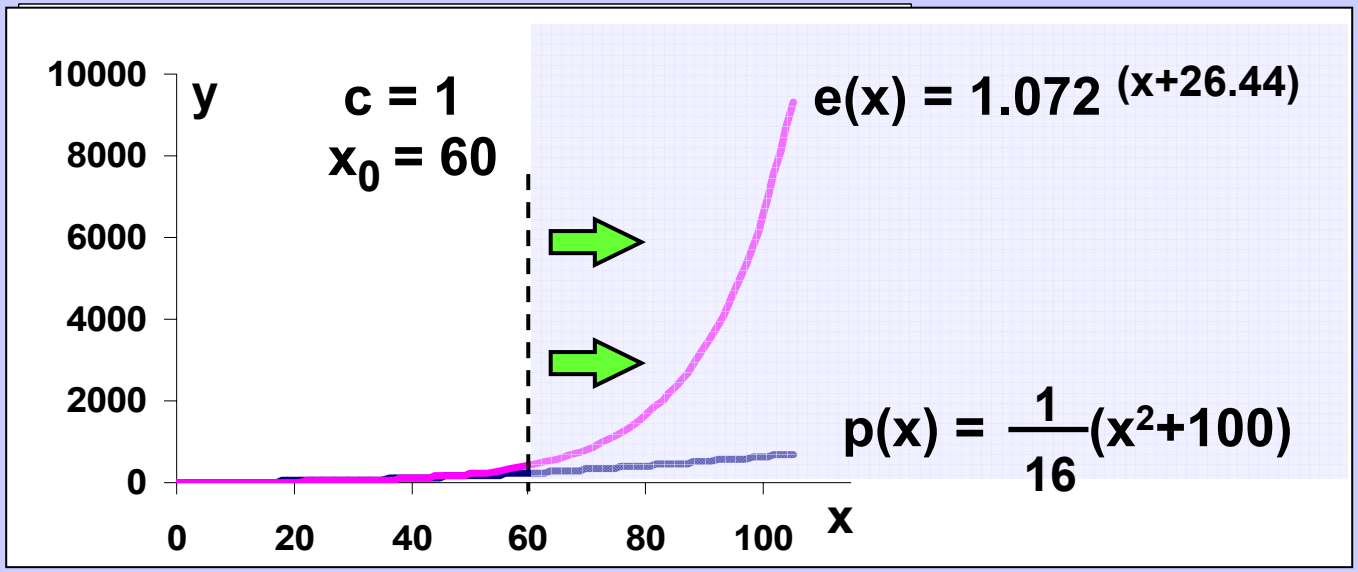
a) – je už vždy menší než funkce f(x)

b) – sice menší než f(x) není, ale po vynásobení
nějakou kladnou konstantou (asi < 1 ☺)
(hodnota konstanty také není nijak předepsána)
je už vždy menší než funkce f(x).

Takže: pokud najdeme nějaké x_0 a c>0 takové, že
$c \cdot g(x) < f(x)$ všude napravo od x_0, (někdy stačí c=1)
je jisto, že $g(x) \in O(f(x))$

Řád růstu funkcí

Takže: pokud najdeme nějaké x_0 a c>0 takové, že $c \cdot g(x) < f(x)$ všude napravo od x_0, (někdy stačí c=1) je jisto, že $g(x) \in O(f(x))$



$x > 60 \Rightarrow p(x) < e(x)$, tj. $\frac{1}{16}(x^2+100) < 1.072^{(x+26.44)}$

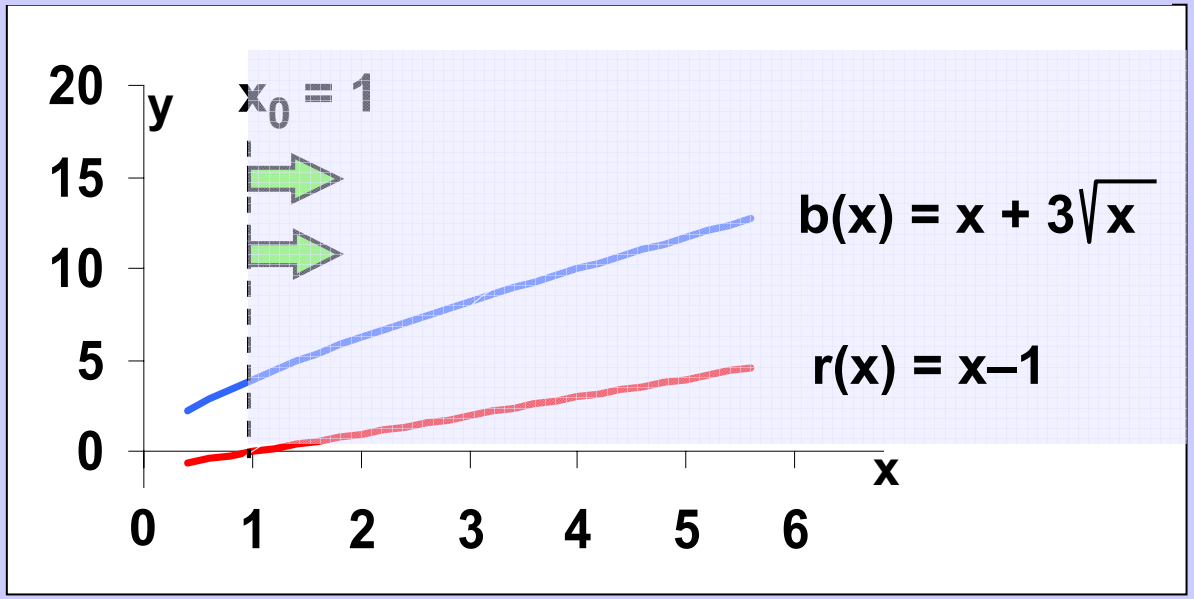
tudíž platí $p(x) \in O(e(x))$ ověřte!

Řád růstu funkcí

Takže: pokud najdeme nějaké x_0 a c>0 takové, že $c \cdot g(x) < f(x)$ všude napravo od x_0, (někdy stačí c=1) je jisto, že $g(x) \in O(f(x))$

$b(x) = x + 3\sqrt{x}$

$r(x) = x - 1$



$x > 1 \Rightarrow r(x) < b(x)$, tj. $x - 1 < x + 3\sqrt{x}$

tudíž platí $r(x) \in O(b(x))$

Řád růstu funkcí

$$f \in \Omega(g) \Leftrightarrow g \in O(f)$$

$x \in O(x^2)$ $\quad x^2 \in O(x^3)$ $\quad x^n \in O(x^{n+1})$

$x^2 \in O(2^x)$ $\quad x^3 \in O(2^x)$ $\quad x^{5000} \in O(2^x)$

$\log(x) \in O(x)$ $\quad x \in O(x \cdot \log(x))$ $\quad x \cdot \log(x) \in O(x^2)$

$x^{20000} \in O(2^x)$ $\quad x \in O(x^{20000})$ $\quad 1 \in O(x)$

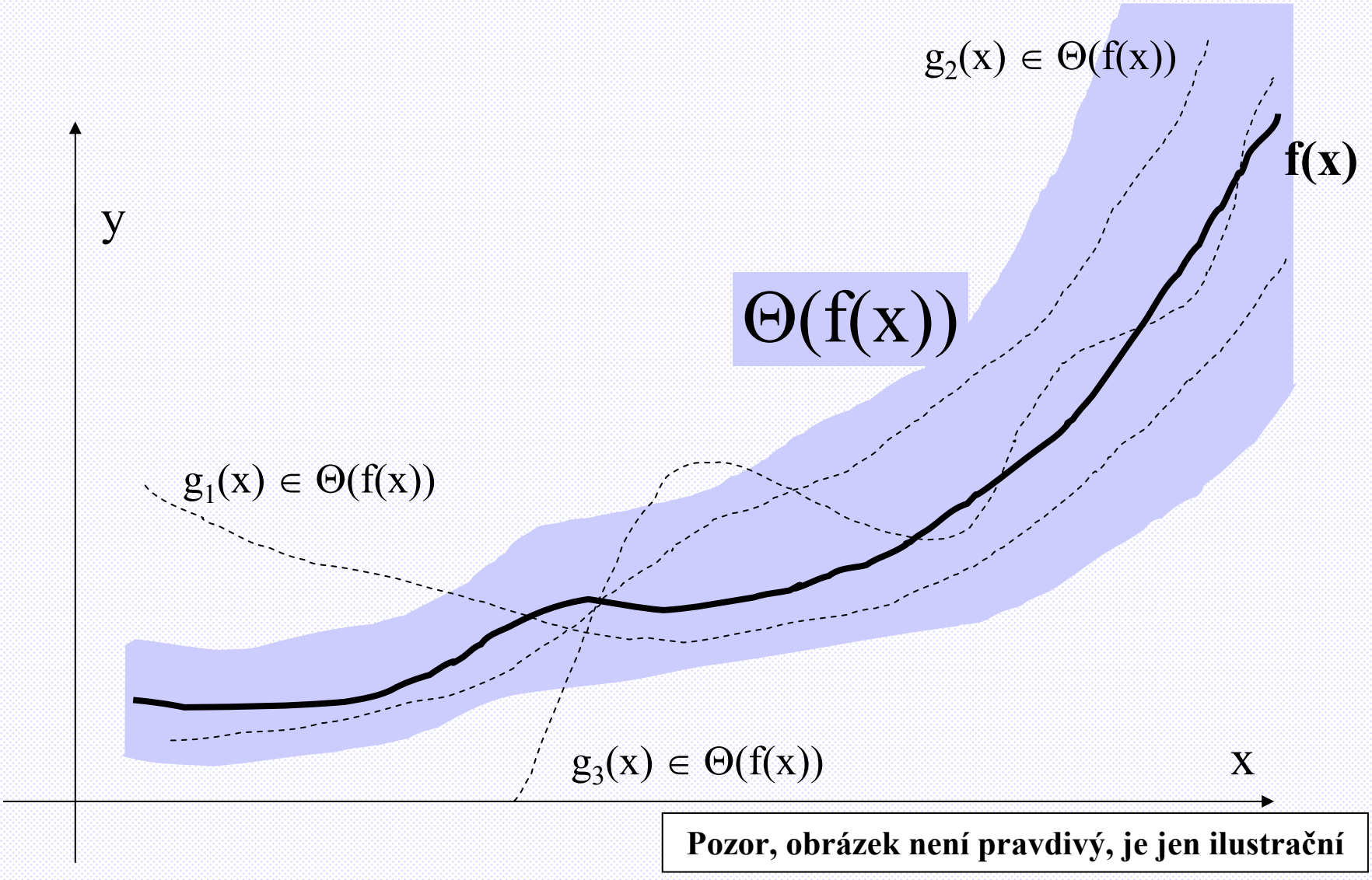
vždy

$$f(x) > 1 \Rightarrow 1 \in O(f(x))$$

těžko uvěřitelné

$$\log(x)^{200\,000} \in O(\sqrt[200\,000]{x})$$

Řád růstu funkcí



Pozor, obrázek není pravdivý, je jen ilustrační

Řád růstu funkcí

$$\Theta(f(x)) = \Omega(f(x)) \cap O(f(x))$$

Θ Theta

V množině $\Theta(f(x))$ se octne každá funkce g(x), která spadá jak do $\Omega(f(x))$ tak do $O(f(x))$.

$$f(x) \in \Theta(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \in \Theta(f(x))$$

Řád růstu funkcí

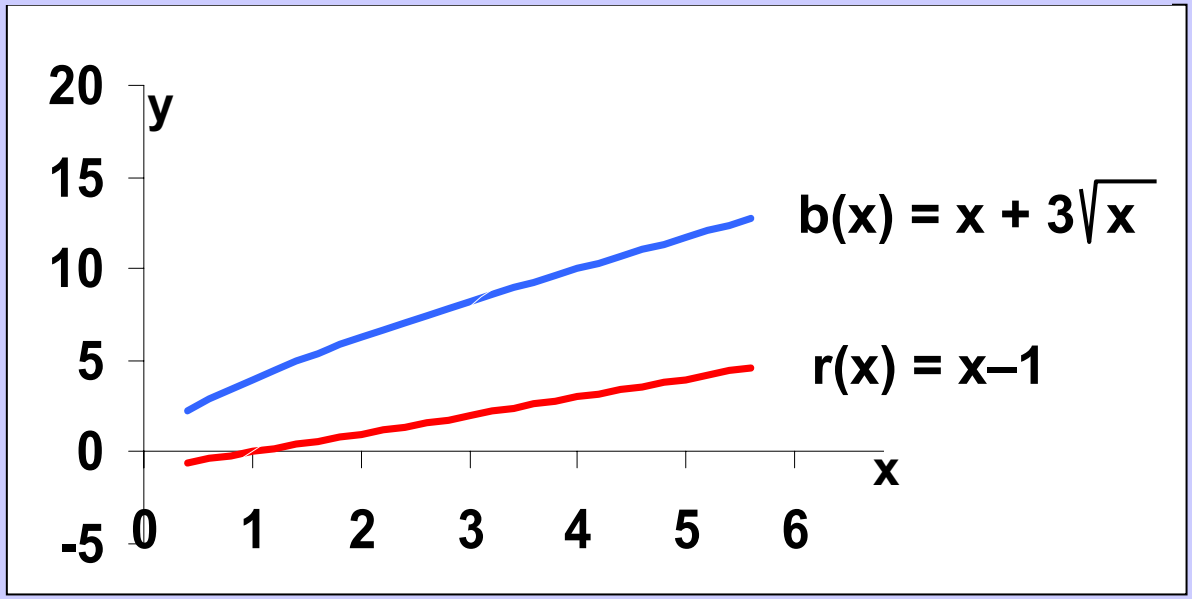
$$f(x) \in \Theta(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \in \Theta(f(x))$$

$b(x) = x + 3\sqrt{x}$

$r(x) = x - 1$

$r(x) \in \Omega(b(x))$

$r(x) \in O(b(x))$



$r(x) \in \Theta(b(x))$

$b(x) \in \Theta(r(x))$

Řád růstu funkcí

Pravidla

1. $(a > 0) \Leftrightarrow \Theta(f(x)) = \Theta(a \cdot f(x))$
2. $g(x) \in O(f(x)) \Leftrightarrow \Theta(f(x)) = \Theta(f(x) + g(x))$

Slovy

1. Multiplikativní konstanta
   nemá vliv na náležení do množiny $\Theta(f(x))$.
2. Přičtení/odečtení „menší“ funkce
   nemá vliv na náležení do množiny $\Theta(f(x))$.

Příklady

$1.8x + 600 \cdot \log_2(x) \in \Theta(x)$

$x^3 + 7x^{1/2} + 5(\log_2(x))^4 \in \Theta(x^3)$

$13 \cdot 3^x + 9x^{12} + 42x^{-4} + 29 \in \Theta(3^x)$

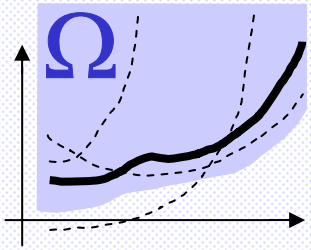
$4 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^{n-1} + 5 \cdot 2^{n/2} \in \Theta(2^n)$

$0.1x^5 + 200x^4 + 7x^2 - 3 \in \Theta(x^5)$

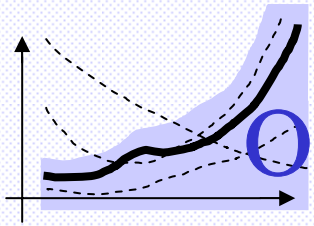
–’’– $\in O(x^5)$

–’’– $\in \Omega(x^5)$

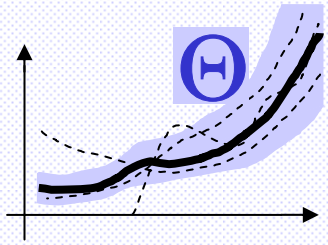
Řád růstu funkcí



$$\Omega(f(x)) = \{\, g(x) \,;\, \exists x_0>0, c>0 \;\; \forall x>x_0 : \; c\cdot f(x) < g(x) \,\}$$



$$O(f(x)) = \{\, g(x) \,;\, \exists x_0>0, c>0 \;\; \forall x>x_0 : \; g(x) < c\cdot f(x) \,\}$$



$$\Theta(f(x)) = \{\, g(x) \,;\, \exists x_0>0, c_1>0, \; c_2>0 \;\; \forall x>x_0 : \; c_1\cdot f(x) < g(x) < c_2\cdot f(x) \,\}$$

Pozor, obrázky jsou jen ilustrační

Řád růstu funkcí

Porovnání rychlosti růstu funkcí

Funkce f(x) roste asymptoticky rychleji než funkce g(x), když

$$f(x) \in \Omega(g(x)) \;\&\; f(x) \notin \Theta(g(x))$$

Pozor!

Porovnání rychlosti algoritmů

Algoritmus A je asymptoticky pomalejší než algoritmus B, když

$$f_A(n) \in \Omega(f_B(n)) \;\&\; f_A(n) \notin \Theta(f_B(n)),$$

kde $f_A(n)$, resp. $f_B(n)$ je funkce určující počet operací,
které provede algoritmus A, resp. B,
při zpracování dat o rozsahu n.

Řád růstu funkcí

Řád růstu funkce

Řád růstu funkce f je taková „co nejjednodušší" funkce g, pro kterou platí

$$g(x) \in \Theta(f(x))$$

Manipulace

Řád růstu funkce f získáme většinou tak, že zanedbáme

1. Aditivní členy rostoucí pomaleji nebo stejně rychle
2. Multiplikativní konstantu

Příklady

$ff(n) = 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^{n-1} + 5 \cdot 2^{n/2} \in \Theta(2^n)$ Řád růstu ff(n) je 2^n

$hh(x) = x + \log_2(x) - \sqrt{x} \in \Theta(x)$ Řád růstu hh(x) je x

Asymptotická složitost

Asymptotická složitost algoritmu

Asymptotická složitost algoritmu A
je řád růstu funkce f(n), která charakterizuje
počet elementárních operací algoritmu A
při zpracování dat o rozsahu n.

(rozsah dat = celkový počet čísel a znaků v nich)

Ve většině případů nehraje roli, zda uvažujeme

A) počet všech elementárních operací
B) počet všech elementárních operací nad daty
C) počet testů nad daty

Asymptotická složitost vychází z táž.

Asymptotická složitost

Asymptotická složitost předložených ukázek

Asymptotická složitost hledání minima v poli o n prvcích je n.
V obou uvedených případech.

Asymptotická složitost pomalého zjišťování, kolik čísel v poli je rovno součtu jiného pole, je n^2.

Asymptotická složitost rychlého zjišťování, kolik čísel v poli je rovno součtu jiného pole, je n.

Za předpokladu, že obě pole mají délku n.

Asymptotická složitost lineárního hledání prvku v poli je n.

Asymptotická složitost hledání prvku uspořádaném poli pomocí půlení intervalu je $\log(n)$.

Za předpokladu, že pole má délku n.

Asymptotická složitost

Úmluvy

Zjednodušení

Běžně se zkráceným termínem „složitost algoritmu“
rozumí právě výraz „asymptotická složitost algoritmu“

Zmatení

Běžně se v literatuře neříká $f(x)$ náleží do $\Theta(g(x))$,
ale $f(x)$ je $\Theta(g(x))$.
Rovněž se to tak značí: $f(x) = \Theta(g(x))$
namísto $f(x) \in \Theta(g(x))$
(a stejně pro O a Ω).

Chápe se to ale beze změny, v původním smyslu náležení.

Asymptotická složitost


$\in \Theta($  $)$


$\in \Theta($  $)$


$\in O($  $)$


$\in \Omega($  $)$

Různé algoritmy mají různou složitost

Algoritmus a program není totéž