5. 10. 2010

CV 1

(1)

ALGORITMY - cvičení

~~at~~ hodnota algoritmu

- NEJHORŠÍ = nejdelší čas

$$T^{w}(n) = \max\{T(i),\ i \in I_n\}$$

- NEJLEPŠÍ = nejkratší čas

$$T^{b}(n) = \min\{T(i),\ i \in I_n\}$$

- PRŮMĚRNÝ = průměr časů

$$T^{a}(n) = \frac{1}{|I_n|} \sum_{i \in I_n} T(i)$$

$T(i)$ = množina čísel, kterou chci seřadit

Asymptotická analýza

funkce $\left.\begin{matrix} f(n) \\ g(n) \end{matrix}\right\}$ mají kladné hodnoty N a zobrazují se na kladná R

$$N \longrightarrow R^+$$

$$\underbrace{\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)}}_{\Downarrow} = \begin{cases} 0 & \text{pro } f(n) < g(n) \\ k & \text{pro } f(n) \sim g(n) \quad \cancel{f(n) < g(n)} \\ +\infty & \text{pro } f(n) > g(n) \end{cases}$$

POROVNÁNÍ DVOU ALGORITMŮ

ASYMPTOTICKÁ ANALÝZA = POROVNÁNÍ DVOU ALGORITMŮ

fce $f(n)$, $g(n)$ } mají kladné hodnoty N a zobrazují se na R^+

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} \to 0 & \text{pro } f(n) < g(n) \\ \to k & \text{pro } f(n) \sim g(n) \\ \to +\infty & \text{pro } f(n) > g(n) \end{cases}$$

PŘ
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{4n^2}{3n^2 + 6n} = \lim \frac{4}{3 + \frac{6}{n}} = +\infty$$

PŘ
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\log n} = \lim \frac{1}{\underbrace{\frac{\log n}{n}}_{\to 0}} = +\infty$$

PŘ
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{10^6 n + 10^6} = \frac{n}{10^4 + \underbrace{\frac{10^4}{n}}_{\to 0}} = +\infty$$

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{asymptoticky rovné} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

ČASOVÁ SLOŽITOST ALGORITMŮ

worst case: $T(n) = \max\{T(i) : i \in I_n\}$
best case: $T(n) = \min\{T(i) : i \in I_n\}$
average case: $T(n) = \frac{1}{|I_n|} \sum_{i \in I_n} T(i)$.

~~$F(n)$~~
$T(i)$ = množina čísel, kterou chci seřadit

3

Asymptotická složitost

5 množin fcí

1. množina $O(f(n))$

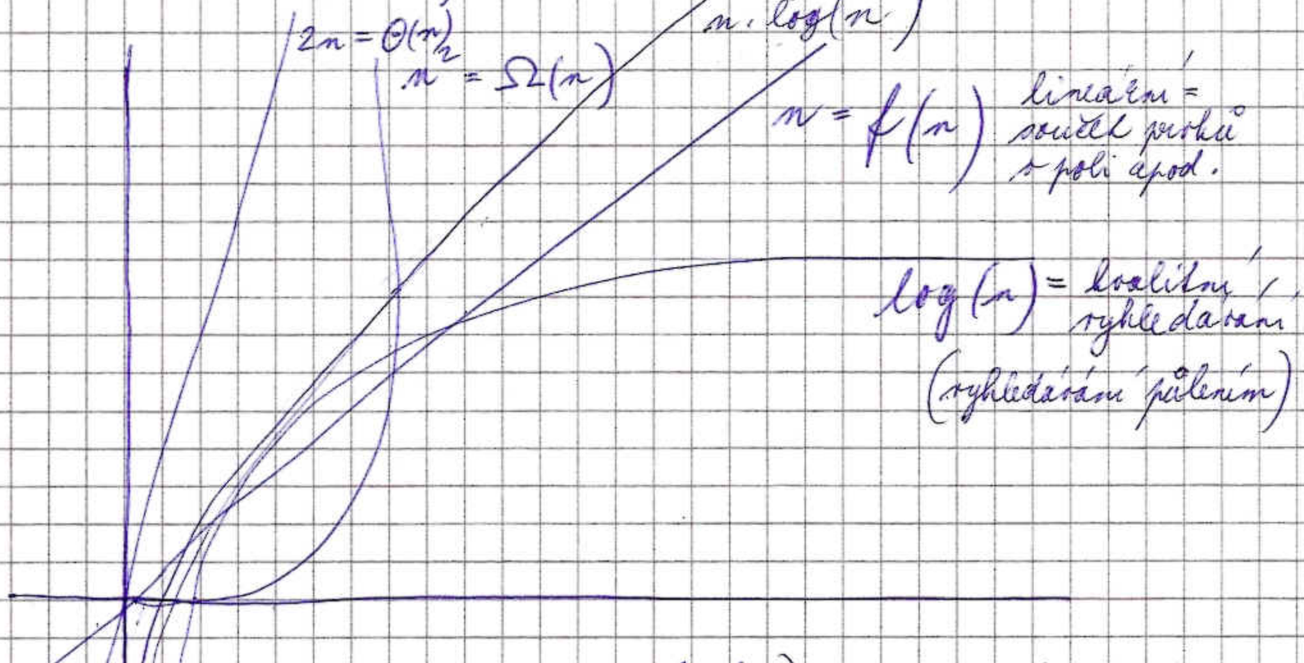
$$O(f(n)) = \{ g(n) : \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c\, f(n) \}$$

2. množina $\Omega(f(n))$

$$\Omega(f(n)) = \{ g(n) : \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 : g(n) \geq c\, f(n) \}$$

3. množina $\Theta(f(n))$ Θ = éta

$$\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$$



$n . \log(n)$ = zákl. složitost kvalitního třídícího algoritmu

n^3 = násobení matic (např.)

4 $o(f(n)) = \{g(n) : \forall c \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 :$
$g(n) \leq c\, f(n)\}$

5 $\omega(f(n)) = \{g(n) : \forall c \in \mathbb{R}^+ ; \exists n_0 : \forall n \geq n_0$
$g \geq c\, f(n)\}$

PŘ

$$\underbrace{\underbrace{n^2 + 10^6 n}_{g(n)} \overset{?}{\in} O(\underbrace{n^2}_{f(g)})}_{\text{dosadíme do rovnice}}$$

$$n^2 + 10^6 n \leq c\, n^2 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{n}$$

$$n + 10^6 \leq c\, n \quad \Big/ -n$$

$$10^6 \leq cn - n$$

$$10^6 \leq (c-1) \cdot n$$

našli jsme $c \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+$
a ~~n když platí~~ n_0 např. 10^6

$$\underbrace{\text{pak platí } \exists c,\ c = 2 : \exists n_0,\ n_0 = 10^6}$$

$\Rightarrow$ platí to

ASYMPTOTICKÁ SLOŽITOST - (PŘ) EX 2.1.

$\underbrace{n^2 + 10^6 n}_{g(n)} \overset{?}{\in} \underbrace{O(n^2)}_{f(n)}$ → dosadíme do vzorce

$n^2 + 10^6 n \le c \cdot n^2$ $\quad \cdot \frac{1}{n}$

$n + 10^6 \le c n$ $\quad -n$

$10^6 \le cn - n$

$10^6 \le n(c-1)$

$n^2 + 10^6 n \overset{?}{\in} \Omega(n^2)$

$n^2 + 10^6 n \ge c n^2$

$n + 10^6 \ge cn$

$10^6 \ge cn - n$

$10^6 \ge n(c-1)$

$n_0 =$ např. 10^6

$\exists c \in R^+$

platí $\exists c, c=2 : \exists n_0, n_0 = 10^6$

$10^6 \ge -\frac{n}{2}$

= platí

pro o a ω neplatí, protože u O a Ω musí $\exists c$, pro které platí, ALE u o a ω musí platit pro $\forall c$

$n \cdot \log(n) \overset{?}{\in} O(n)$

$n \cdot \log(n) \le c n$ $\quad \cdot \frac{1}{n}$

$\log(n) \le c$

neplatí, protože $\log(n)$ bude vždy $> c$

$n \cdot \log(n) \overset{?}{\in} \Omega(n)$

$n \cdot \log(n) \ge c n$

$\log(n) \ge c$

$n \ge e^c$

platí $\Leftarrow g(n) \ge c f(n)$

pro ω platí rovněž

ASYMPTOTICKÁ SLOŽITOST – PŘ   LEMMA 2.1.

polynom $P(k) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} \dots a_1 n + a_0$

$a_k > \emptyset$

$P(k) \overset{?}{\in} \Theta(n^k)$

$P(k) \overset{?}{\in} O(n^k)$

$a_k n^k \dots + a_0 \leq c\, n^k$ $\quad \cdot \frac{1}{n^k}$

$a_k + \frac{a_{k-1}}{n} \dots \frac{a_0}{n^k} \leq c$

$\frac{a_{k-1}}{n} \to \emptyset \qquad \frac{a_0}{n^k} \to 0 \qquad \cancel{\Rightarrow c \to 0}$

$\Rightarrow c > \emptyset$ a $c > a_k$

$P(k) \overset{?}{\in} \Omega(n^k)$

$a_k n^k \dots + a_0 \geq c\, n^k$

$a_k + \frac{a_{k-1}}{n} \dots + \frac{a_0}{n^k} \geq c$

$\Rightarrow c < \emptyset$ a $c < a_k$

obě platí

$\Rightarrow P(k) \in \Theta(n^k)$

nutno ještě ověřit vlastnost $\alpha f(n) \overset{?}{\in} \Theta(f(n))$

$\alpha > 0$

$O(f(n)) : \alpha f(n) \leq c\,(f(n))$

$\alpha \leq c$

$\Omega(f(n)) : \alpha f(n) \geq c\, f(n)$

$\alpha \geq c$

$\Rightarrow$ platí

ASYMPTOTICKÁ SLOŽITOST - PŘ

$$\underbrace{f(n) + g(n)}_{g(n)} \overset{?}{\in} \Omega\left(\underbrace{f(n)}_{f(n)}\right)$$

$$f(n) + g(n) \geq c \cdot f(n)$$

$$g(n) \geq c \cdot f(n) - f(n)$$

$$g(n) \geq f(n)\,(c-1)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 0 \\ k \\ +\infty \end{matrix}}\leftarrow \frac{g(n)}{f(n)} \geq c-1$$

=> nutno zvolit správné c

$c \in \{0, 1\} \Rightarrow \dfrac{g(n)}{f(n)} = 0 \Rightarrow$ platí

$c \rightarrow$ libovolné konstantě k => platí

$c \leq +\infty \Rightarrow \dfrac{g(n)}{f(n)} = +\infty \Rightarrow$ platí

$$O(f(n)) \cdot O(g(n)) \overset{?}{\in} O(f(n) \cdot g(n))$$

$$c_1 (f(n)) \cdot c_2 (g(n)) \leq c_3 \cdot f(n) \cdot g(n)$$

$f(n)$ a $g(n) > 0$ => lze vykrátit

$\Rightarrow \quad c_1 \cdot c_2 \leq c_3 \quad \Rightarrow$ platí

(PŘ) EX 2.4.

ALGORITMICKÁ SLOŽITOST

Dokažte, že $n^k = o(c^n)$ pro libovolné „k" a $c>1$.
Porovnejte $n^{\log\log n}$ s n^k a c^n.

$n^k \overset{?}{\in} o(c^n)$ k a c jsou konstanty

$k > 1, \ c > 1$

definice: $o(f(n)) = \{g(n) : \forall c > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N}^+ : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c\, f(n)\}$

$\Rightarrow \forall a > 0\ \exists n_0 > 0\ \forall n > n_0 : n^k \leq a \cdot c^n$

volíme $a = a_0$ $\exists n_0 > 0\ \forall n > n_0 : n^k < a_0 \cdot c^n$

$$n < \sqrt[k]{a_0 \cdot c^n}$$

$$n < \sqrt[k]{a_0} \cdot c^{\frac{n}{k}}$$

o kolik vyroste v $n+k$?

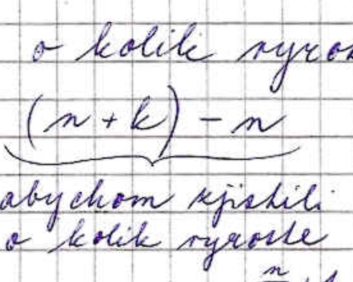
$$\underbrace{(n+k) - n}_{\text{abychom zjistili o kolik vyroste}} < b_0\left(c^{\frac{n+k}{k}} - c^{\frac{n}{k}}\right) \qquad \sqrt[k]{a_0} = b_0$$

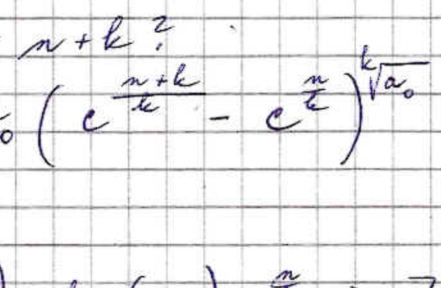
$$k < b_0\left(c^{\frac{n}{k}+1} - c^{\frac{n}{k}}\right) = \underbrace{b_0}_{\text{konstanta} > 0} \underbrace{(c-1)}_{\text{konst.} > 0} \cdot c^{\frac{n}{k}} \Rightarrow \underbrace{\exists n_0\ \forall n > n_0}_{\text{platí}}$$

aby rostla 2x rychlej

$2k < b_0 \cdot c^{\frac{n}{k}}$ → stále platí

$\Rightarrow$ hledáme n_0, kdy to přeroste





$$k \begin{cases} F(n_0) = n_0 \\ F(2n_0) = 2n_0 \end{cases} \rightarrow \text{exp. min. dostihne mocninu}$$

Y36DSA - 1. úkol

Zadání 1. úkolu:

Exercise 2.4. Prove that $n^k = o(c^n)$ for any integer k and any $c > 1$. How does $n^{\log\log n}$ compare with n^k and c^n?

//bych to nejak shrnul - ma se dokazat, ze algoritmus s polynomialni vypocetni slozitosti(n^k) roste striktne pomaleji nez jakykoliv algoritmus s exponencialni vypocetni slozitosti(B^n, schvalne sem nahradil c za B, aby se to nemotalo, B > 1), tj. ze nerovnice n^k < c*B^n pro vsechny c>0,B>1 a k z N ma reseni n0 a pro vsechna dalsi n > n0 bude platit. Protoze n^k roste vzdycky pomalejc nez c*B^n, je jejich podil n^k/c*B^n v nekonecnu 0. Dale n^k = o(n^(log log n)) - tady se da urcit n0 primo z porovnani exponentu a n^(log log n) = o(c^n), zde dukaz analogicky s predchozi limitou. jestli to je blbe, tak mne nesezerte, sem dalkar a nemame cvika ;)

nahrál sem to řešení na http://www.image-share.com/ijpg-387-167.html ;-)

$c > 1, \; k \in \mathbb{Z}, \; n \in \mathbb{N}:$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{c^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(\ln c)^k \cdot c^n} \overset{*/}{=}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{k!}{(\ln c)^k c^n} = 0 \qquad \underline{\text{pro } k \geq 0}$$

$$\underline{k < 0:} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{c^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{-k} c^n} = 0$$

*/ derivováno k-krát

deltaž $n^0 = 1$