(A) **Jsou-li opery Aida a Don Jovani stejně dlouhé, pak delší je pouze prodaná nevěsta.**

a .. Aida

d .. Don Jovani

p .. Prodaná nevěsta

O(x) .. x je opera

D(x,y) .. x je aspoň stejně tak dlouhé jako y

(B) **Je-li číslo dělitelné dvěma různými čísly, pak je dělitelné i součinem těchto čísel.**

4. (a) $D(a,d) \wedge D(d,a) \Rightarrow \Big(\forall x\ O(x) \wedge \neg D(a,x) \Rightarrow (x=p)\Big)$
   (b) $\forall x \Big(\exists y \exists z \exists u \exists v\ (x = y \times u) \wedge (x = z \times v) \wedge \neg(y = z) \Rightarrow \exists t\ (x = t \times (y \times z)\Big)$.

a) Pomocí uvedených predikátů a konstant formalizujte následující výrok v predikátovém počtu s rovností.
Existují nejvýše dva kandidáti na krále Persie a Xerxes je jeden z nich.
K(x) ... kandidát na perského krále
k ... Xerxes

b) Pomocí artmetických symbolů x,+,-,:, závorek, kvantifikátorů a logických spojek (žádné jiné symboly nejsou k dispozici) formalizujte v univerzu celých čísel následující výrok:
Součet čtverců jakýchkoliv dvou různých čísel je vždy lichý.

4. (a) $K(k) \wedge \Big(\forall x\ \forall y\ K(x) \wedge K(y) \Rightarrow (x=k) \vee (y=k)\Big)$
   (b) $\forall x \forall y \exists z\ \neg(x=y) \Rightarrow \neg(x \times x + y \times y = z + z)$.

(A) Pan Novák je právě jediný výherce v loterii, pokud vůbec nějaký výherce existuje.
n = pan Novák
V(x) = výherce existuje (nějaký výherce)

(B) Každé sudé číslo je součtem dvou různých čísel.

4. (a) Nejkratší zápis je $\forall x\ (V(x) \Rightarrow (x=n))$
   (b) $\forall x \Big(\exists y\ (x = y+y) \Rightarrow (\exists u \exists v\ (x = u+v) \wedge \neg(u=v)\Big)$.

4. (a) Pomocí uvedených predikátů a konstant formalizujte následující výrok v predikátovém počtu s rovností:

Slečna B obdivuje každého, kdo obdivuje sám sebe nebo slečna B obdivuje všechny, kdo obdivují ji.

$O(x, z) \ldots x$ obdivuje y, $\qquad b \ldots$ slečna B

(b) Pomocí aritmetických symbolů $\times, +, -, =$, závorek, kvantifikátorů a logických spojek (žádné jiné symboly jako 0, 1, atd. nejsou k dispozici) formalizujte v univerzu celých čísel:

Existuje nejvýše jedno nenulové číslo.

4. (a) $\Big(\forall x\ O(x,x) \Rightarrow O(b,x)\Big) \vee \Big(\forall x\ O(x,b) \Rightarrow O(b,x)\Big)$.

(b) $\forall x \forall y \exists z \Big(\neg(x = z - z) \wedge \neg(y = z - z) \Rightarrow (x = y)\Big)$.

kombinatorika

9. 6. 2010

Něco ve smyslu "házíme n kostkami **současně**"

a) 1)Kolika způsoby pokud kostky rozlišujeme může vrh dopadnout.

2)Kolika způsoby dopadně 1) pokud vyřadíme hody se všude stejným výsledkem (tj na všech kostkách současně padne 1, nebo 2, nebo 3, ... , 6)

b) kolika způsoby hod dopadne, když kostky nerozlišujeme

1. (a) Na kostce je 6 možností, co může padnout. Počet výsledků je tedy 6^n. Konstantních výsledků je 6, takže nekonstantních je $6^n - 6$.

(b) Zde je výsledek hodu n kostkami údaj, že padlo x_1 jedniček, x_2 dvojek,... a x_6 šestek. Protože $x_1 + \cdots + x_6 = n$, je počet výsledků $\binom{n+6-1}{6-1} = \binom{n+5}{5}$.

1. Z množiny čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$ zvolíme čtyři čísla.

(a) Kolik je takových výběrů, že největší ze zvolených čísel je alespoň 12?

(b) Kolik je takových výběrů, že druhé největší ze zvolených čísel je alespoň 12?

1. (a) Zjistíme počet výběrů, které dané podmínce nevyhovují a odečteme je od všech výběrů.

$$\binom{n}{4} - \binom{11}{4}.$$

(b) Podobně jako v (a) odečteme od všech výběrů ty, které nevyhovují podmínce ze zadání.

$$\binom{n}{4} - \binom{11}{4} - \binom{11}{3}\binom{n-1}{1}.$$

Kombinatorika

→ Máme n mužů a n žen: 26. 5. 2009

a

kolika způsoby lze vytvořit řadu, aby žádné 2 ženy nestály vedle sebe

řešení

Postavime zeny do rady, moznost je n!. Muze postavime do rady, je to n!. Pak rada muze zacinat muzem, nebo zenou. Proto ×2.

Pak druhá část: Řada může začínat i končit ženou Př. na třech:

Ž M M Ž M Ž

ženy lze umístit do n! míst, muže taky. U nich je ale nutné vybrat místo, kde budou dva vedle sebe. Proto ještě násobíme (n-1).

Protože obě množiny jsou disjunkní, tak je sečteme.

b

kolika způsoby lze posadit lidi kolem stolu, aby žádné 2 ženy neseděly vedle sebe

řešení

To, co napsal Tišer, je všeříkající. Ženy můžeme posadit (n-1)! způsoby. Pak nám mezi nima zbyde n míst a na ty usadíme n mužů. Tady už nejsou zobrazení vzniklá pootočením mužů stejná - každý by pak seděl vedle jinejch žen, proto n!.

1. (a) počet řad, kde se střídá muž a žena je $2n!n!$. V řadě mohou stát na jednom místě dva muži vedle sebe a zbytek je střídavý. Počet pozic dvojice mužů je $n-1$. Dohromady je výsledek

$$2(n!)^2 + (n-1)(n!)^2 = (n+1)(n!)^2.$$

   (b) Počet způsobů rozesadit ženy kolem stolu, aby mezi nimi bylo volné místo je $(n-1)!$. Do volných míst je možné rozmístit muže $n!$ způsoby. Tedy počet možností je $(n-1)!\,n!$.

2. 6. 2010

→ Máme n modrých a n bílých míčků.
a) Kolika způsoby je lze rozdělit do dvou misek tak, aby na každé bylo právě n míčků? Misky nerozlišujeme.

b) Bílé míčky jsou očíslovány čísly 1,...,n a modré míčky rovněž čísly 1,...,n. Kolik je nyní způsobů rozdělení do dvou misek po n míčkách? Opět misky nerozlišujeme.

1. (a) Dívejme se na složení míčků jedné misce: Je-li n sudé, pak možných rozdělení je $\frac{1}{2}n + 1$: (počet bílých, počet modrých) $= (0, n)$, $(1, n-1)$, $\ldots$ $(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n)$.
   Je-li n liché, pak možných rozdělení je $\frac{1}{2}(n+1)$:
   (počet bílých, počet modrých) $= (0, n)$, $(1, n-1)$, $\ldots$ $(\frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}(n+1))$.
   Souhnně to lze napsat $[\frac{1}{2}n] + 1$.

   (b) Jsou-li míčku očíslovány, vybíráme vlastně z $2n$ míčků n, dáme je ma první misku a zbytek na druhou. Počet takových výběrů je $\binom{2n}{n}$. Protože misky nerozlišujeme, vždy dvě rozdělení splývají (prohození misek), takže správný výsledek je $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$.

Cvičení.

(i) Mějme v krabici n koulí očíslovaných $1, 2, \dots, n$. Postupně je vytahujeme všechny ven.

   (a) Nechť k je pevně zvolené číslo, $1 \leq k \leq n$. Kolik je případů takových, že k-tá vytažená koule má číslo právě k?

   (b) Kolik je takových vytažení všech koulí, že při nich alespoň v $n-1$ případech souhlasí pořadí tažené koule s jejím číslem?

(ii) Společnost se skládá z n mužů a n žen.

   (a) Kolika způsoby je možné utvořit řadu, kde se muži a ženy střídají?

   (b) Kolika způsoby je možné všechny usadit okolo kulatého stolu tak, že se muži a ženy střídají? Rozesazení, která se liší pouze pootočením, pokládáme za stejná.

(iii) Z množiny čísel $\{1, 2, \dots, n\}$ zvolíme čtyři.

   (a) Kolik je takových výběrů, že největší ze zvolených čísel je alespoň 11?

   (b) Kolik je takových výběrů, že druhé největší ze zvolených čísel je alespoň 11?

(iv) Máme balíček karet očíslovaný čísly $1, \dots, n$.

   (a) Kolika způsoby je možné balíček uspořádat, aby pro každé $k = 1, \dots, n$ platilo, že na k-tém místě v balíčku je karta s číslem alespoň $k+1$?

   (b) Kolika způsoby je možné balíček uspořádat, aby pro každé $k = 1, \dots, n$ platilo, že na k-tém místě v balíčku je karta s číslem nejvýše $k+4$?

(v) Máme k dispozici p nul a q jedniček.

   (a) Kolik různých posloupností délky $p+q$ lze sestavit?

   (b) Nechť $p = q$. Kolik lze sestrojit posloupností délky $p+q$ takových, aby se v nich nevyskytovali dvě nuly vedle sebe?

(vi) Z čísel $\{1, \dots, n\}$ tvoříme posloupnosti délky k.

   (a) Kolik existuje různých klesajících posloupností?

   (b) Kolik existuje různých nerostoucích posloupností?

(vii) Mějme balíček karet očíslovaných $1, 2 \dots, n$, ze kterého postupně snímáme všechny karty.

   (a) Kolik je různých uspořádání balíčku takových, že při snímání je mezi kartou číslo 1 a kartou číslo 2 právě k dalších karet?

   (b) Kolik je různých uspořádání balíčku takových, že při snímání přijde karta číslo 1 dříve než karta číslo 2?

(viii) Mějme n černých koulí očíslovaných $1, 2, \dots, n$ a $2n$ bílých koulí očíslovaných $1, 2, \dots, 2n$. Rozdělíme je do n krabic očíslovaných $1, 2, \dots, n$ tak, že v každé krabici jsou právě tři.

   (a) Kolika způsoby to lze provést?

   (b) Kolika způsoby to lze provést tak, aby v každé krabici byly dvě bílé a jedna černá koule?

Řešení: (i) $(n-1)!$, 1; (ii) $(n!)^2$, $n!\,(n-1)!$; (iii) $\binom{n}{4} - \binom{10}{4}$, $\binom{n}{4} - \binom{10}{4} - (n-10)\binom{10}{3}$; (iv) 0, $5^{n-4}4!$; (v) $\binom{p+q}{q}$, $p+1$; (vi) $\binom{n}{k}$, $\binom{n+k-1}{k-1}$; (vii) $2(n-2)\cdot(n-2)!$, $n!/2$; (viii) $(3n)!/(3!)^n$, $(2n)!\,n!/(2^n)$.

2. Na množině všech n-prvkových podmnožin množiny $M = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ uvažujme relaci $\mathcal{R}$ definovanou předpisem

n-prvkové množiny A, B jsou v relaci $\mathcal{R}$ právě když $A \cap B \neq \emptyset$.

(a) Jaké z vlastností reflexivita, symetrie, antisymetrie a tranzitivita má relace $\mathcal{R}$?

(b) Je-li $A \subset M$ daná n-prvková množina, pro kolik množin $B \subset M$ platí $A\ (\mathcal{R} \circ \mathcal{R})\ B$?

2. (a) Relace je reflexivní a symetrická, ale není antisymetrická ani tranzitivní.
   (b) Každá množina A je v relaci $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$, takže počet jejich počet je $\binom{2n}{n}$.

Byla zadána 5ti prvková množina M{a,b,c,d,e} a na M x M se mělo

a) najít takovou relaci, která neni reflexivní, symetrická ani tranzitivní
b) zjistit kolik takových relací může existovat.

2. (a) Relace splňující požadavky je relace typu $R = \{(a, b), (b, c)\}$ obsahující jen dvě dvojice.
   (b) Počet takových relací je roven počtu způsobů, jak vybrat postupně tři různé prvky z množiny M, což je $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Nechť *R* je relace na množině **Z** celých čísel definovaný předpisem

x R y, právě když x-y je sudé číslo dělitelné pěti.

a) Ukažte, že *R* je ekvivalence na **Z**.
b) Dokažte, že pro každé *n* náležící **Z** platí *n^5 R n*.

2. (a) Relace je reflexivní, neboť 0 je sudé číslo dělitelné pěti. Je symetrická, neboť je-li $x - y$ sudé číslo dělitelné pěti, pak i $y - x$ sudé číslo dělitelné pěti. Je tranzitivní, neboť, je-li $x - y$ sudé číslo dělitelné pěti a $y - z$ sudé číslo dělitelné pěti, pak jejich součet musí být opět sudé číslo dělitelné pěti a zároveň je to $x - z$.
   (b) Jedna možnost je důkaz indukcí, že $n^5 - n$ je vždy sudé číslo dělitelné pěti.

Máme relaci R na množině N

mRn, pokud aspoň tři z čísel m, n, (m+n), (m-n) jsou dělitelné 3ma

a

je relace R reflexivní, symetrická tranzitivní?

b

Zjistěte všechny dvojice (m,n) tak, že mRn

2. (a) Relace není reflexivní, je symetrická a je tranzitivní.
   (b) $m\,R\,n$ právě, když obě čísla jsou dělitelná třemi.