Predikátová logika - příklady

I. Převeďte následující věty do formulí predikátové logiky. Napište negace a vyjádřete je co nejjednodušeji slovně.

1. Někteří studenti píší.
2. Všichni studenti jsou zde.
3. Někteří studenti zde nejsou.
4. Jsou zde jen studenti.
5. Nejsou zde žádní studenti.
6. Nejsou zde jen studenti.
7. Ne všichni studenti jsou zde.
8. Všichni studenti a učitelé jsou zde.
9. Všichni studenti jsou zde a píší.
10. Všichni studenti píší, jestliže jsou zde.
11. Všichni studenti, kteří jsou zde, píší.
12. Někteří studenti, kteří jsou zde, píší.
13. Zde jsou pouze studenti, kteří píší.
14. Všichni, kdo píší jsou studenti.
15. Žádní učitelé nepíší.
16. Je zde učitel.
17. Je zde právě jeden učitel.*
18. Je zde maximálně jeden učitel.*
19. Někdo je zde.
20. Nikdo zde není.
Užijte značení: $s(x)$ - *x je student*, $z(x)$ - *x je zde*, $u(x)$ - *x je učitel*, $p(x)$ - *x píše.*

II. Jsou následující formule logicky pravdivé (tj. pravdivé ve všech interpretacích), splnitelné (tj. pravdivé alespoň v jedné interpretaci) či kontradikce (tj. nejsou pravdivé v žádné interpretaci)? Zdůvodněte. (K je konstanta, p je unární a r je binární predikát.)

Pro splnitelné formule nalezněte interpretaci, v níž je daná formule pravdivá (model), případně též interpretaci, v níž není pravdivá.

1. $\forall x \forall y\ (r(x,y) \vee r(y,x))$
2. symetrie: $\forall x \forall y\ (r(x,y) \Rightarrow r(y,x))$
3. $p(x) \vee \neg p(x)$
4. $p(x) \wedge \neg p(x)$
5. reflexivita: $\forall x\ r(x,x)$
6. $\forall x p(x) \Rightarrow \exists x p(x)$
7. $\neg \forall x p(x) \Rightarrow \exists x \neg p(x)$
8. $\exists x p(x) \wedge \forall x \neg p(x)$
9. $\forall x \forall y\ (r(x,y) \vee \neg r(x,y))$
10. transitivita: $\forall x \forall y\ (r(x,y) \wedge r(y,z)) \Rightarrow r(x,z)$
11. hustota: $\forall x \forall z\ (r(x,z) \Rightarrow \exists y (r(x,y) \wedge r(y,z)))$
12. $\forall x \exists y\ r(x,y)$
13. $\forall x \exists y\ r(y,x)$
14. $p(K) \Rightarrow \exists x p(x)$

c) Všichni alkoholici jsou štamgasti.
d) Někteří alkoholici jsou štamgasti.
e) Žádní alkoholici nejsou štamgasti.

Některá řešení

ad I.

1. $\exists x(s(x) \wedge p(x))$
2. $\forall x(s(x) \Rightarrow z(x))$
3. $\exists x(s(x) \wedge \neg z(x))$
4. $\forall x(z(x) \Rightarrow s(x))$, slova "jen, pouze,..." vedou k opačné implikaci!
5. $\forall x(z(x) \Rightarrow \neg s(x))$ nebo $\forall x(s(x) \Rightarrow \neg z(x))$
6. $\exists x(z(x) \wedge \neg s(x))$
7. $\neg\forall x(s(x) \Rightarrow z(x)$
8. $\forall x((s(x) \vee u(x)) \Rightarrow z(x))$, pozor, zde je spojka $\vee$ a nikoliv $\wedge$!
9. $\forall x(s(x) \Rightarrow (z(x) \wedge p(x)))$
10. $\forall x(s(x) \Rightarrow (z(x) \Rightarrow p(x)))$
11. $\forall x(s(x) \wedge z(x)) \Rightarrow p(x)))$
12. $\exists x(s(x) \wedge z(x) \wedge p(x))$
13. $\forall x(z(x) \Rightarrow (s(x) \wedge p(x)))$
14. $\forall x(p(x) \Rightarrow s(x))$
15. $\forall x(u(x) \Rightarrow \neg p(x))$
16. $\exists x(u(x) \wedge z(x)$
17. $\exists x(u(x) \wedge z(x) \wedge (\forall y(y \neq x) \Rightarrow \neg(u(y) \wedge z(y))))$
18. $\forall x\forall y((u(x) \wedge u(y) \wedge z(x) \wedge z(y)) \Rightarrow (x = y))$
19. $\exists x z(x)$
20. $\forall x \neg z(x)$

Negace:

Negace 2 jsou 3 a 7 a naopak. Negace 4 je 6. Další:

1. $\forall x(s(x) \Rightarrow \neg p(x))$
5. $\exists x(z(x) \wedge s(x))$
8. $\exists x((s(x) \vee u(x)) \wedge \neg z(x))$ nebo $\exists x(s(x) \wedge \neg z(x)) \vee \exists x(u(x) \wedge \neg z(x))$
9. $\exists x(s(x) \wedge \neg(z(x) \wedge p(x)))$
10. $\exists x(s(x) \wedge z(x) \wedge \neg p(x))$
11. $\exists x(s(x) \wedge z(x) \wedge \neg p(x))$
12. $\forall x(((s(x) \wedge z(x)) \Rightarrow \neg p(x)))$
13. $\exists x(z(x) \wedge \neg(s(x) \wedge p(x)))$
14. $\exists x(p(x) \wedge \neg s(x))$
15. $\exists x(u(x) \wedge p(x))$
16. $\forall x(u(x) \Rightarrow \neg z(x)$
17. $\neg\exists x(u(x) \wedge z(x) \vee (\exists y(y \neq x) \wedge u(y) \wedge z(y)))$
18. $\exists x\exists y((u(x) \wedge u(y) \wedge z(x) \wedge z(y)) \wedge (x \neq y))$
19. $\forall x \neg z(x)$
20. $\exists x z(x)$

ad II. Kontradikce jsou 4, 8. Logicky pravdivé jsou 3, 6, 7, 9, 14, 15, 16. Ostatní jsou splnitelné, některé jsou pojmenované podle vlastnosti, kterou vyjadřují.