RELACE = vztah mezi dvěma objekty, buď jsou nebo nejsou v relaci

$a \in A$, $b \in B$

a je v relaci s B $= aRb = (a, b) \in R$

Def Relace R z množ. A do množ. B je podmnožina $A \times B$. Podmnož. je 2^n.

I_A = identická relace na A

$a I_A b$ právě tehdy, když $a = b$

R^{-1} = inverzní relace

Def Máme relaci z A do B. Inverzní relace R^{1} je relace z B do A taková, že $b R^{-1} a$ právě, když $a R b$.

$R_1 \circ R_2$ = <u>skládání relací</u>

Def Mějme relace R_1 z A do B a R_2 z B do C.

Složená relace $R_1 \circ R_2$ je definována $a (R_1 \circ R_2) c$ = a a c budou v relaci právě když existuje $b \in B$, že $a R_1 b$ a $b R_2 c$.

<u>Dvě množiny</u> jsou v relaci, když jedna je podmnož. druhé.

<u>inkluze</u> = je podmnožinou

2.1.4 Každé zobrazení $f : A \to B$ je relace (nebo přesněji definuje relaci); a to relace f z A do B definovaná $x\ f\ y$ právě tehdy, když $y = f(x)$. Ne každá relace z A do B je zobrazením množiny A do množiny B; k tomu, aby relace R byla zobrazením je třeba (a stačí), aby pro každé $a \in A$ existovalo právě jedno $b \in B$ takové, že $a\ R\ b$.

Pro relace přejímáme také termíny, které jsou běžné, když mluvíme o zobrazení. *Definičním oborem* relace R je množina všech $a \in A$, pro něž existuje $b \in B$ takové, že $a\ R\ b$; *oborem hodnot* relace R je množina všech $b \in B$, pro něž existuje $a \in A$ takové, že $a\ R\ b$.

RELACE - PŘ

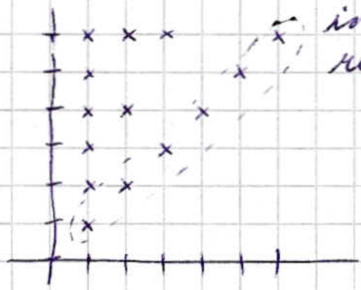
① $A = \{\text{města}\}$ $B = \{\text{státy}\}$

$a \in A$ $b \in B$

$a R b$, jestliže „a leží v b"

② $A = B = \{1, 2, \dots, 6\}$

$a R b$, jestliže a dělí b



③ $A = \{a, b, c\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

Kolik je relací z A do B?

$A \times B = 12 \Rightarrow$ relací je 2^{12}

④ Jaká je R^{-1} k relaci „a dělí b"?

$x R^{-1} y$ právě tehdy když

$y R x$, tj. „y dělí x".

Znázornění R^{-1} je symetrické podle diagonály.

⑤ Relace R na $\mathbb{N}$ je daná $n R m$ právě, když $m = n^2$. Co je $R \circ R$?

$n (R \circ R) k$ jestliže existuje m, že $n R m$ a $m R k$, tj. $m = n^2$ a $k = m^2$

2.2.9 Poznámka. Skládání relací **není** komutativní, tj. neplatí $R \circ S = S \circ R$. To je vidět z následujícího příkladu:

Uvažujme množinu A všech lidí v České republice a dvě relace R, S definované na A:

$a\,R\,b$ právě tehdy, když a je sourozenec b a $a \neq b$

$c\,S\,d$ právě tehdy, když c je dítětem d.

Ukažme, že $R \circ S \neq S \circ R$.

Abychom ukázali, že $R \circ S \neq S \circ R$, stačí najít dva lidi x, y tak, že platí $x\ R \circ S\ y$ a neplatí $x\ S \circ R\ y$. Uvažujme dvojici synovec a a strýc b. Platí $a\ S \circ R\ b$, protože jeden z rodičů a je sourozencem strýce b. Neplatí ale, že $a\ R \circ S\ b$ protože to by znamenalo, že některý ze sourozenců a by byl rodičem strýce b.

EKVIVALENCE

Def Řekneme, že relace R na množ. A je

1) reflexivní = pro každé $a \in A$ je $a R a$
2) symetrická = je-li $a R b$, pak $b R a$
3) tranzitivní = je-li $a R b$ a $b R c$, pak $a R c$

Relace splňující podm. 1-3 je <u>ekvivalence</u>.

Def Mějme relaci ekvivalence R (<u>= ekvivalenci R</u>) na množ. A. Je-li $a \in A$, pak $\langle a \rangle = \{b \in A \mid a R b\}$ se tato množina nazývá TŘÍDA EKVIVALENCE.

2.3.6 Třídy ekvivalence. Je dána relace ekvivalence R na množině A. *Třídou ekvivalence* R odpovídající prvku $a \in A$ nazýváme množinu $R[a] = \{b \in A \mid a\,R\,b\}$.

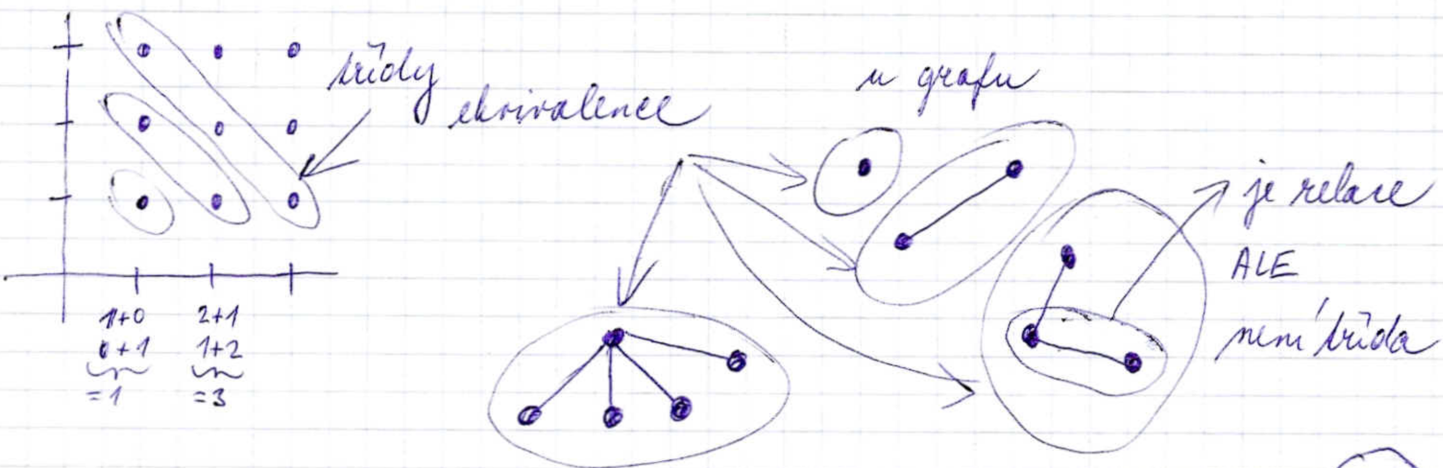
Množinu všech tříd dané ekvivalence, tj. množinu $\{R[a] \mid a \in A\}$ často nazýváme *faktorovou množinou podle ekvivalence* R a značíme A/R.

2.3.7 Příklady. Uvažujme relaci ekvivalence R z příkladu 2.3.4. Tato relace má dvě třídy ekvivalence, a to $R[a] = \{b \in A \mid a\ R\ b\}$. množinu všech sudých čísel a množinu všech lichých čísel.

Hledejme třídy ekvivalence S z příkladu 2.3.5 ke dvojicím $(p, q) \in A$. Např. s dvojicí $(1, 2)$ jsou v relaci všechny dvojice (s, t) pro něž $1 \cdot t = s \cdot 2$, tj. $t = 2s$. Kdybychom si dvojice představili jako zlomky, byly by to všechny zlomky, které po zkrácení dávají racionální číslo $\frac{1}{2}$. Platí, že $(s, t)\ S\ (p, q)$ právě tehdy, když $\frac{s}{t} = \frac{p}{q}$. Tedy třídy ekvivalence odpovídají jednotlivým racionálním číslům.

2.3.8 Tvrzení. Nechť R je ekvivalence na množině A. Množina tříd ekvivalence $\{R[a] \mid a \in A\}$ má tyto vlastnosti:

1. Každý prvek $a \in A$ leží v $R[a]$ a platí rovnost $\bigcup\{R[a] \mid a \in A\} = A$.
2. Třídy ekvivalence $R[a]$ jsou po dvou disjunktní, tj. jestliže $R[a] \cap R[b] \neq \emptyset$, pak $R[a] = R[b]$.



EKVIVALENCE - PŘ

① Relace R na reálných číslech:

$x R y$, jestliže $x \le y$.

- je reflexivní
- není symetrická - neplatí

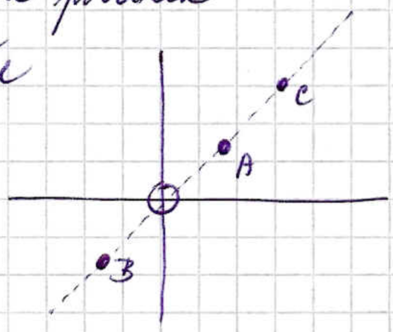
  aRb a bRa

  $(x \le y)$ $(y \le x) \leftarrow$ neplatí
- je tranzitivní

Není to ekvivalence, protože neplatí symetrie.

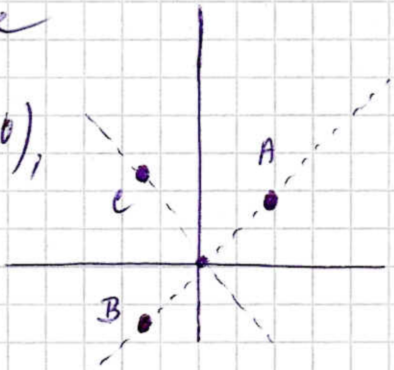
② $M = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ = z roviny odstraníme počátek

Relace R na M je $A R B$ jestliže A i B leží na téže přímce procházející počátkem.



$$\left.\begin{array}{l}\text{- je reflexivní} \\ \text{- je symetrická} \\ \text{- je tranzitivní}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{je ekvivalence}$$

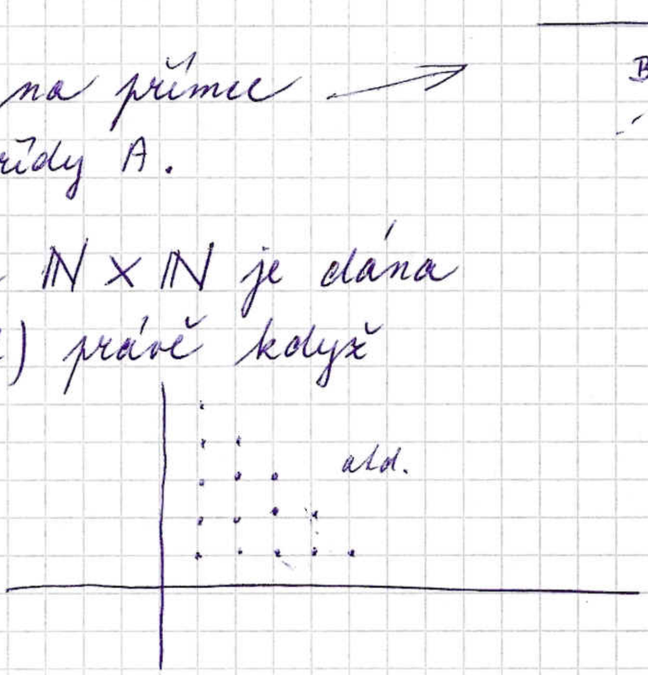
Pokud bychom v M nechali bod $(0,0)$, pak by neplatila tranzitivita.



③ Všechny body na přímce $\longrightarrow$ jsou body třídy A.

④ Relace R na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je dána $(a,b)\ R\ (c,d)$ právě když

$a + b = c + d$



USPOŘÁDÁNÍ

Def Relace R na množ. A se nazývá uspořádání, je-li
- reflexivní
- tranzitivní
- antisymetrická

R je antisymetrická, když platí aRb a bRa, pak $a = b$.

Zápis uspořádání $a \leq b$

Def Mějme uspořádání $\leq$ na množ. A.
Prvek $a_0 \in A$ nazveme
- největší, pokud $\forall a \in A$ platí $a \leq a_0$
- maximální, pokud neexistuje $a \in A$, že $a_0 \leq a$, $a \neq a_0$

Největší může být jen jeden, maximálních může být víc.

- nejmenší
- minimální

} inverzně

Je-li A systém všech podmnožin množiny M, pak relace inkluze (= je podmnož.) je uspořádání.
= Dvě množiny jsou v relaci, když jedna je podmnožinou druhé.

PŘ $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$
Uspořádání = inkluze.
Největší prvek neexistuje.
Maximální prvky jsou $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$

RELACE

PŘ Na množině $\mathcal{X}$ = {posloupnosti přirozených čísel}
$(x_n) R (y_n)$ právě, když existují indexy k, m, že
$x_k \leq x_m$ a $y_k \leq y_m$.
? Které všechny posloupnosti jsou v relaci s posloupností $(1, 2, 3, \dots)$?
? Jaké z vlastností reflexivita, symetrie a tranzitivita má R?

$\mathcal{X}$ = { množ. posloupn. přiroz. čísel }
= jakákoli řada čísel (např. 7, 2, 2, 13, ...)
$(x_n) R (y_n)$ + $\exists\, k, m$, že $x_k \leq x_m$
$y_k \leq y_m$

např. $7, 2, \underline{2}, \underline{13}, \dots$ (k u 2, m u 13)
$1, 1, \underline{3}, \underline{5}, \dots$

a) $(x_n) = (1, 2, 3, 4, \dots) \Rightarrow k < m$
(y_n) = posloupnost $\mathbb{N}$ nemůže být klesající $\Rightarrow$ vždy existuje $y_k \leq y_m$.
$\Rightarrow$ každá $(y_n) R (x_n)$

b) je reflexivní, neboť
- je-li $x_1 \leq x_2$, pak $k = 1$, $m = 2$
- je-li $x_2 \leq x_1$, pak $k = 2$, $m = 1$

je symetrická
tranzitivita - musí platit $(x_n) R (z_n)$, což je složitý důkaz zde

2.3.12 Uspořádání. Relaci R na množině A nazveme *uspořádání (částečné uspořádání)*, jestliže je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

2.3.13 Příklady uspořádání.

1. Známé uspořádání reálných čísel je uspořádání ve smyslu předchozí definice, neboť pro všechna reálná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí: $a \leq a$; jestliže $a \leq b$ a také $b \leq a$, pak nutně $a = b$; jestliže $a \leq b$ a $b \leq c$, pak také $a \leq c$.

2. Označme A množinu všech podmnožin množiny U. Pak relace $\subseteq$ „být podmnožinou“ je relace uspořádání na A. Ověření reflexivity, antisymetrie a tranzitivity přenecháme čtenáři.

3. Položme $A = \mathbb{N}$, kde $\mathbb{N}$ je množina přirozených čísel. Pak relace dělitelnosti definovaná $m \mid n$ právě tehdy, když m je dělitel čísla n (tj. když $n = k \cdot m$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$) je relace uspořádání. Ano, pro každá tři přirozená čísla m, n, k platí $m \mid m$; jestliže $m \mid n$ a $n \mid m$, pak $m = n$; jestliže $m \mid n$ a $n \mid k$, pak také $m \mid k$.

2.3.14 Největší a maximální prvek. Mějme množinu A a na ní relaci uspořádání $\preceq$. Řekneme, že prvek a množiny A je *největší prvek* množiny A, jestliže pro všechny prvky $x \in A$ platí $x \preceq a$. Řekneme, že prvek b množiny A je *maximální prvek* množiny A, jestliže neexistuje prvek $y \in A$, $y \neq b$, takový, že $b \preceq y$.

2.3.15 Tvrzení. Mějme množinu A a na ní uspořádání $\preceq$. Množina A má nejvýše jeden největší prvek; navíc, je-li a největší prvek množiny A, pak je jediným maximálním prvkem množiny A. Nemá-li množina A největší prvek, může mít několik maximálních prvků, anebo žádný.

2.3.16 Nejmenší a minimální prvek. Mějme množinu A a na ní relaci uspořádání $\preceq$. Řekneme, že prvek a množiny A je *nejmenší prvek* množiny A, jestliže pro všechny prvky $x \in A$ platí $a \preceq x$. Řekneme, že prvek b množiny A je *minimální prvek* množiny A jestliže neexistuje prvek $y \in A$, $y \neq b$, takový, že $y \preceq b$.

2.3.17 Tvrzení. Mějme množinu A a na ní uspořádání $\preceq$. Množina A má nejvýše jeden nejmenší prvek. Pokud nejmenší prvek existuje, je jediným minimálním prvkem. Nemá-li množina A nejmenší prvek, může mít několik minimálních prvků, anebo žádný.

2.3.18 Nesrovnatelné prvky. Mějme množinu A a na ní uspořádání $\preceq$. Řekneme, že prvky $a, b \in A$ jsou *nesrovnatelné*, jestliže neplatí ani $a \preceq b$, ani $b \preceq a$.

2.3.19 Poznámka. Má-li uspořádání několik maximálních prvků, pak jsou tyto prvky nesrovnatelné. Totéž platí o minimálních prvcích.