PREDIKÁTY = zpřesnění výroků

<u>Predikáty</u> přiřazují objektům vlastnost.
<u>Funkční symbol</u> je zobrazení, které objektu/ům přiřadí jiný objekt.
(např. x^2 není predikát, ale
fční symbol $f(x) = x^2$)

Kvantifikátory – ! na pořadí kvantifikátorů záleží !
$\exists$ = existuje = existenční
$\forall$ = obecný

<u>abeceda</u>

(,)	= závorky
$x, y, z, \ldots$	= proměnné (obecné objekty)
$a, b, c, \ldots$	= konstanty (objekty pevně zadané)
$F, G, H, \ldots$	= predikáty (vyjadřují vlastnosti objektů)
$f, g, h, \ldots$	= fční symboly (přiřazuje objektu jiný objekt => výsledkem je objekt)
$\exists$	= existenční kvantif.
$\forall$	= obecný kvantif.
$=, \neq$	= rovná se, nerovná se
$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$	= logické spojky

2. Jsou-li φ a ψ formule, jejichž pravdivost v interpretaci $\langle U, [\![-]\!]\rangle$ a kontextu ρ již známe, pak
   - $\neg\varphi$ je pravdivá právě tehdy, když φ není pravdivá.
   - $\varphi \wedge \psi$ je pravdivá právě tehdy, když φ i ψ jsou pravdivé.
   - $\varphi \vee \psi$ je nepravdivá právě tehdy, když φ i ψ jsou nepravdivé.
   - $\varphi \Rightarrow \psi$ je nepravdivá právě tehdy, když φ je pravdivá a ψ je nepravdivá.
   - $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je pravdivá právě tehdy, když buď obě formule φ a ψ jsou pravdivé, nebo obě formule φ a ψ jsou nepravdivé.
3. Je-li φ formule a x proměnná, pak
   - $\forall x \varphi(x)$ je pravdivá právě tehdy, když fromule φ je pravdivá *v každém* kontextu $\rho[x := d]$, kde d je prvek U.
   - $\exists x\, \varphi(x)$ je pravdivá právě tehdy, když fromule φ je pravdivá *v aspoň jednom* kontextu $\rho[x := d]$, kde d je prvek U..

PRED (1)

PREDIKÁTY

$\exists$

nejvýše jeden

$\forall x \, \forall y \, \big(F(x) \land F(y) \Rightarrow (x = y)\big)$

právě jeden

$\big(\exists x \, F(x)\big) \land \Big(\forall x \, \forall y \big(F(x) \land F(y) \Rightarrow (x = y)\big)\Big)$

alespoň jeden

$\exists x \, F(x)$

$$\neg \forall x (\ldots) = \exists x \, \neg(\ldots)$$
$$\neg \exists x (\ldots) = \forall x \, \neg(\ldots)$$

<u>Univerzum</u> = množina, na níž se vztahují kvantifikátory. Zjednodušení, aby se nemusely pojmenovávat $Z(x)$.

PŘ Petrův otec je varhaník.

Naše objekty jsou lidé. Dále potřebujeme jeden predikát (vlastnost) $V(\_)$, a to vlastnost „být varhaníkem“. Rovněž potřebujeme funkci o, která každému člověku přiřadí jeho otce a nakonec potřebujeme konstantu p pro Petra. Formule má tvar:

$$V(o(p)).$$

Něčí otec je varhaník.

Tady si vystačíme s predikátem a funkcí z minulého příkladu; „něčí“ popíšeme existenčním kvantifikátorem:

$$\exists x \, V(o(x)).$$

PREDIKÁTY

Def <u>Term</u> je
- proměnná nebo
- konstanta nebo
- výraz $f(t_1, t_2 \dots t_n)$, kde f je fční symbol a $t_1 \dots t_n$ jsou termy.

<u>atomická formule</u> (= nejjednodušší formule) je $F(t_1, t_2 \dots t_n)$, kde F je predikát a $t_1 \dots t_n$ jsou termy.

Formule (v predikát. počtu) jsou následující:
- atomická formule je formule
- jsou-li φ a ψ formule, tak $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ jsou formule.
- je-li φ formule, je i $\forall x (\varphi(x))$ a $\exists x\, \varphi(x)$ formule.

PŘ Každý čtverec reálného čísla je nezáporný

Objekty jsou reálná čísla. Potřebujeme jeden predikát $K(\_)$, který označuje vlastnost „být nezáporné číslo“, a funkci f, která každému reálnému číslu přiřadí jeho čtverec, tj. $f\colon x \mapsto x^2$. Formule má tvar

$$\forall x\, K(f(x)).$$

PREDIKÁTY

(PŘ) Formalizujte výrok:

Žádné celé číslo není větší než jeho kvadrát.

žádné = znamená negaci

¬ (existuje objekt, že je to celé číslo a je větší než jeho kvadrát)

zavedení značení

$Z(x)$ = x je celé číslo

$V(x,y)$ = x je větší než y

¬ (existuje objekt x, že $Z(x) \wedge V(x, x^2)$)

¬ (existuje x, že $Z(x) \wedge V(x, f(x))$)

$\neg(\exists x\; Z(x) \wedge V(x, f(x)))$

(PŘ) a = daný člověk

$f(x)$ = otec x (= objekt)

$F(x)$ = x je otcem (= vlastnost objektu)

$f(a) \neq F(a)$

$F(x)$ = x

$F(f(a))$ = otec člověka „a" je otcem

(PŘ) $M(x,y)$ = y je matka x

$\forall x \exists y\, M(x,y) \neq \exists y \forall x\, M(x,y)$

= pro každé x existuje y, které je jeho matkou

= existuje matka pro všechna x

PREDIKÁTY

PŘ

a = Homér
b = Odyssea
c = Oresteia
$E(x)$ = x je epické dílo
$K(x,y)$ = x je kratší než y
$N(x,y)$ = x napsal y

- Odyssea a Oresteia nejsou stejně dlouhé
  $K(b,c) \vee K(c,b)$
- Odyssea není nejkratší epické dílo
  $\exists x\ E(x) \wedge K(x,b)$
- jakékoli epické dílo kratší než Odyssea nebylo napsáno Homérem
  $\forall x\,(E(x) \wedge K(x,b)) \Rightarrow \neg N(x,a)$

PŘ Každé celé číslo má předchůdce

Objekty jsou celá čísla. Pro formalizaci této věty potřebujeme vztah mezi dvěma celými čísly. (Vztahu, který se týká dvou objektů, budeme říkat *binární predikát.*) Dvě čísla a, b jsou ve vztahu Q, jestliže první z nich, a, je předchůdcem čísla druhého, b. Fakt, že dvojice čísel a, b je ve vztahu Q zapíšeme $Q(a,b)$. Věta „Každé celé číslo má předchůdce." odpovídá významem větě „Pro každé celé číslo existuje jeho předchůdce." a můžeme ji zformalizovat:

$$\forall x\, \exists y\, Q(y,x).$$

PŘ Je-li přirozené číslo větší než 0, je jeho následník větší než 1.

Objekty jsou přirozená čísla. Mohli bychom sice zavést dva predikáty: Jeden, který znamená vlastnost být větší než 0, a druhý, který znamená vlastnost být větší než 1, ale srozumitelnosti formalizace bychom tím neprospěli. Zavedeme raději jeden binární predikát a to „být větší než". Tato vlastnost je dobře známá a značí se symbolem „>". Aby naše formalizace byla co nejsrozumitelnější v případě predikátu „být větší" zvolíme zápis $a > b$ místo přesného leč nesmyslně těžkopádného zápisu $>(a,b)$. Použijeme dvě konstanty a to číslo 0 a číslo 1 a funkci následníka f. Formule má tvar:

$$\forall x\,((x > 0) \Rightarrow (f(x) > 1)).$$

PREDIKÁTY

PŘ Pomocí uvedených predikátů formalizujte:

existuje-li jediná úspěšná divadelní hra, pak je to Kupec Benátský

$U(x)$ = x je úspěšná div. hra

k = Kupec Benátský

$$\forall (x \left[U(x) \wedge \left(\forall z \forall y\; U(z) \wedge U(y) \right) \Rightarrow (z = y) \right] = (x \doteq k)]$$

PŘ S využitím aritm. symbolů +, − a •

formalizujte:

existuje nejvýše jedno celé číslo rovnající se své druhé mocnině (univerzum = celá čísla)

$$(x = x \cdot x) \wedge (y = y \cdot y) \Rightarrow (x = y)$$

$$\forall x \forall y\; (x = x \cdot x) \wedge (y = y \cdot y) \Rightarrow (x = y)$$

PŘ b = Brutus $\quad R(x)$ = objekt x je Říman

c = Caesar $\quad Z(x,y)$ = x zabil y

Brutus zabil Caesara: $\cancel{Z(a,b)}$ $Z(b,c)$

Někdo zabil Caesara: $\exists x\; Z(x,c)$

Nějaký Říman zabil Caesara: $\exists x\; Z(x,c) (\wedge R(x))$

Zabil-li někdo Caesara, pak to byl Říman:

$$\forall x\; Z(x,c) \Rightarrow R(x)$$

Někdo zabil sám sebe: $\exists x\; Z(x,x)$

Někdo zabil všechny: $\exists x \forall y\; Z(x,y)$

Zabil-li Caesara Říman, pak to byl Brutus: $\forall x\; R(x) \wedge Z(x,c) \Rightarrow (x = b)$

Všichni zabili někoho: $\exists y \forall x\; Z(x,y)$

Každý zabil někoho: $\forall x \exists y\; Z(x,y)$