KOMBINATORIKA – K-TICE / PODMNOŽINY

základní pravidlo – počet uspořádaných
k-tic takových, že na
1. místě máme n_1 možností
2. místě –"– n_2 –"–
3. místě –"– n_3 –"–
⋮
k-tém místě –"– n_k –"–

N = násobek možností $= n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$

– kolik k-prvkových podmnožin má n-prvková množina?

1. krok – počet uspořádaných k-tic

$k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

2. krok – každou k-prvkovou podmnožinu
  můžeme uspořádat $k!$ způsoby

3. krok – počet k-prvkových podmnožin

$$\frac{n(n-1) \cdot \ldots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

KOMBINATORIKA – ŘADY

- kolika způsoby lze n lidí postavit do řady?

$N = n!$

$n!$ = počet uspořádání objektů do řady

$n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ (např. $5 = 5.4.3.2.1$)

$0! = 1$

- kolika…, aby osoby A a B <u>stály</u> vedle sebe?

$N = 2(n-1)(n-2)! = 2(n-1)!$

- kolika…, aby osoby A a B <u>NEstály</u> vedle sebe?

$N = n! - 2(n-1)! = n(n-1)! - 2(n-1)! = (n-2)(n-1)!$

- kolika… rozesadíme lidi kolem kulatého stolu?

$N = \frac{n!}{n} = (n-1)!$ (máme n řad, které dávají stejné uspořádání kolem stolu)

- kolik je způsobů, aby A a B <u>seděly</u> vedle sebe?

$N = 2(n-2)!$

- kolik je způsobů, aby A a B <u>NEseděly</u> vedle sebe?

$N = (n-1)! - 2(n-2)! = (n-2)![n-1-2] = (n-2)!\cdot(n-3)$

KOMBINATORIKA - BINOMICKÁ VĚTA

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Počet všech podmnožin n-prvkové množiny

$$= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{=n} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k$$
$$= (1+1)^n = 2^n$$

Rozvoj dle binomické věty

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot (-1)^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots$$

- převedeme záporné členy na L stranu rovnice

$$\sum_{k=\text{liché}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=\text{sudé}}^{n} \binom{n}{k}$$

KOMBINATORIKA

(V) Počet nezáporných celočíselných řešení rovnice

$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$

je $\binom{n+k-1}{k-1}$

(Dk) Zavedeme nové proměnné

$y_1 = 1 + x_1$

$y_2 = 2 + x_1 + x_2$

$y_3 = 3 + x_1 + x_2 + x_3$

$\vdots$

$y_k = k + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = k + n$

$1 \leq y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_{k-1} < y_k < n+k$

$\underbrace{\phantom{y_{k-1}}}_{\leq n+k-1}$

Počet řešení je stejný jako počet výběrů čísel $y_1 \ldots y_{k-1}$ s podm. $\binom{n+k-1}{k-1}$

PRINCIP INKLUZE A EXKLUZE

Mějme konečné množiny $A_1, A_2 \ldots A_n$.

Počet prvků jejich sjednocení

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} |A_i \cap \ldots A_n|$$

KOMBINATORIKA - PŘ

① máme n párů bot, vybereme z nich $2k$ bot.

BOTY

a) kolik je možností, aby ve výběru nebyl žádný pár?

můžeme vybrat z $\binom{n}{2k}$ krabic

$$N = \binom{n}{2k} 2^{2k}$$

b) jaká je pravděpodobnost, že při náhodném výběru $2k$ bot nedostaneme žádný pár?

$$P = \frac{\binom{n}{2k} \cdot 2^{2k}}{\binom{2n}{2k}}$$

= výběry, kdy nedostaneme žádný pár

= počet všech možných výběrů

c) kolik je možností, kde bude alespoň jeden pár?

c) je doplněk a) $\Rightarrow N = \binom{2n}{2k} - \binom{n}{2k} \cdot 2^{2k}$

d) kolik je výběrů, kde bude přesně jeden pár?

$$n \binom{n-1}{2k-2} \cdot 2^{2k-2}$$

KOMBINATORIKA - PŘ

MÍČKY

② v krabici je n míčků s navzájem různými barvami. Provedeme k-krát vytažení.

a) míčky vracíme: $\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\text{-krát}} = n^k$

~~b~~ míčky nevracíme: $\underbrace{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}_{k}$

b) v kolika sériích budou míčky všech barev?

míčky nevracíme: $k = n$, počet sérií $= n!$

míčky vracíme: $n \leq k$

$A_1 = \{$série, kde chybí barva č. 1$\}$

$A_2 = \{$ — " — č. 2$\}$

$\vdots$

$A_n = \{$ — " — č. $n\}$

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{$série, kde nějaká barva chybí$\}$

$N = n^k - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$

použít princip inkluze a exkluze

$$|A_1 \cup \ldots A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots A_n|$$

$|A_i| = \cancel{(n-1)}\ (n-1)^k$ = série, kde chybí jedna barva

$|A_i \cap A_j| = (n-2)^k$ = série, kde chybí dvě barvy

$\vdots$

$|A_i \cap A_n| = 0$ - není série, kde by nebyla žádná barva

$$N = n^k - |A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n| = n^k - n(n-1)^k + \binom{n}{2} \cdot (n-2)^k - \ldots 0$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} n^k - \binom{n}{1}(n-1)^k - \binom{n}{2}(n-2)^k - \ldots - \underbrace{\binom{n}{n}(n-n)^k}_{=0}$$

KOMBINATORIKA – PŘ

VĚŽE

(3a) Kolika způsoby lze rozmístit na šachovnici 8×8 polí věže tak, aby se neohrožovaly?

a) 8 stejných věží $= 8!$

b) 8 navzájem různých věží

$8! \cdot 8!$

c) 4 bílé a 4 černé věže tak, aby bílá a černá nebyly vedle sebe

$$\frac{8! \cdot 8!}{4! \cdot 4!}$$

(3b) Máme stejný počet mužů a žen. Kolik je uspořádání, aby dvě ženy nebyly vedle sebe

a) v řadě

b) u kulatého stolu

1. (a) počet řad, kde se střídá muž a žena je $2n!\,n!$. V řadě mohou stát na jednom místě dva muži vedle sebe a zbytek je střídavý. Počet pozic dvojice mužů je $n-1$. Dohromady je výsledek

$$2(n!)^2 + (n-1)(n!)^2 = (n+1)(n!)^2.$$

(b) Počet způsobů rozesadit ženy kolem stolu, aby mezi nimi bylo volné místo je $(n-1)!$. Do volných míst je možné rozmístit muže $n!$ způsoby. Tedy počet možností je $(n-1)!\,n!$.

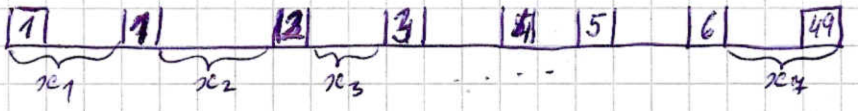
KOMBINATORIKA - PŘ

SPORTKA

(4) Sportka = 6 čísel ze 49

Všech výsledků je $\binom{49}{6} = 13,983.816$

Kolik je šestic, kde nestojí žádná 2 čísla vedle sebe?



$x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 49 - 6 = 43$

Zavedeme si
$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_2 - 1$$
$$y_3 = x_3 - 1$$
$$\vdots$$
$$y_6 = x_6 - 1$$
$$y_7 = x_7$$

$y_1 + y_2 + \dots + y_7 = x_1 + \dots + x_7 - 5 = 38$

Počet řešení je $\binom{38 + 7 - 1}{7 - 1} = 7,059.052$

KOMBINATORIKA - PŘ

ČLENOVÉ SPOLKŮ

(5) V osadě je 24 a každý je členem nějakého spolku

T = tenisový - 10

F = filatelisti - 7

Š = šachový - 7

D = divadelní - ?

Žádný T ~~nesb~~ nehraje šachy ani nesbírá známky.

Nikdo není členem 3 spolků.

8 je členy 2 spolků.

Kolik má D spolek členů?

$|T| = 10$

$|F| = 7$

$|Š| = 7$

$|D| = ?$

nikdo není členem 3 spolků

$\Rightarrow \cap$ 3 množin $= 0$

$|T \cup F \cup Š \cup D| = 24$

$$24 = 10 + 7 + 7 + |D| - \underbrace{|T \cap F|}_{=0} - \underbrace{|T \cap Š|}_{=0} - \underbrace{|T \cap D| - |F \cap Š| - |F \cap D| - |Š \cap D|}_{=8}$$

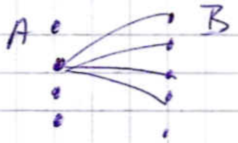
$\Leftarrow$ 8 je členem 2 spolků

$$\underline{\underline{|D| = 8}}$$

KOMBINATORIKA

PŘ $G = (V, E)$, $V = A \cup B$, $|A| = n$, $|B| = m$

a) každá hrana spojuje vrchol z A s nějakým vrcholem z B. Kolik maximálně hran může G mít?



$$n \cdot m$$

b) začíná-li hrana ve vrcholu z A, pak končí ve vrcholu z B. Kolik maximálně hran může G mít?

$$n \cdot m + \binom{m}{2}$$

PŘ mějme úplný graf o n vrcholech. $V = \{1, 2, 3 \dots n\}$.

a) kolik je cest vedoucích všemi vrcholy? $n!$ = cesta je posloupnost čísel

b) kolik uzavřených cest vedoucích všemi vrcholy lze nalézt? (Orientaci nebereme v úvahu).

- neuzavřených cest je $n!$
- ke každé uzavřené cestě existuje $2n$ ~~neuzavře~~ neuzavřených $N = \frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$

KOMBINATORIKA

PŘ Kolik je grafů na ~~na~~ n-bodové množině?

- max. počet hran $\binom{n}{2}$
- min. se spojí všechny body do dvojic hranou
- $\underline{\underline{N = 2^{\binom{n}{2}}}}$ = počet grafů
- počet grafů s právě k hranami

$$N = \binom{\binom{n}{2}}{k}$$

- počet grafů s disjunktními hranami $\underbrace{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\cdots\binom{n-2k+2}{2}}_{=k}$

PŘ Kolik má m-prvková množ. podmnožin?

$$1 + m + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \dots \binom{m}{m} =$$

{∅} 1-prvková 3 prvková

$$= \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \dots \binom{m}{m} = \underline{\underline{2^m}}$$

lze použít binomickou větu

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k \cdot b^{m-k}$$