(i) Mějme v krabici n koulí očíslovaných $1, 2, \ldots, n$. Postupně je vytahujeme všechny ven.

(a) Nechť k je pevně zvolené číslo, $1 \leq k \leq n$. Kolik je případů takových, že k-tá vytažená koule má číslo právě k?

(b) Kolik je takových vytažení všech koulí, že při nich alespoň v $n-1$ případech souhlasí pořadí tažené koule s jejím číslem?

a) k = číslo $1 \leq k \leq n$ => k se může = i 1 nebo n

pozic k obsazení je: $n-1 = n$

koulí je: $k = n-1$

=> možností je $(n-1)!$

b) $n-1$ pozic je obsazeno => zbývá 1 pozice a 1 koule => možností je 1

X v $n-2$ případech je možností $2!$

(iv) Máme balíček karet očíslovaný čísly $1, \ldots, n$.

(a) Kolika způsoby je možné balíček uspořádat, aby pro každé $k = 1, \ldots, n$ platilo, že na k-tém místě v balíčku je karta s číslem alespoň $k+1$?

(b) Kolika způsoby je možné balíček uspořádat, aby pro každé $k = 1, \ldots, n$ platilo, že na k-tém místě v balíčku je karta s číslem nejvýše $k+4$?

a) na n-tém místě nelze zajistit podmínku $k+1$ => způsobů je 0

b) vždy mám 5 kombinací, kromě posledních 4 pozic, kde je 4, 3, 2 a 1 možnosti

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{pozice } n-4 \text{ až } n = 4! \\ \text{ostatní pozice } 5^{(n-4)} \end{array}\right\} 5^{(n-4)} \cdot 4!$$

(vii) Mějme balíček karet očíslovaných $1, 2, \ldots, n$, ze kterého postupně snímáme všechny karty.

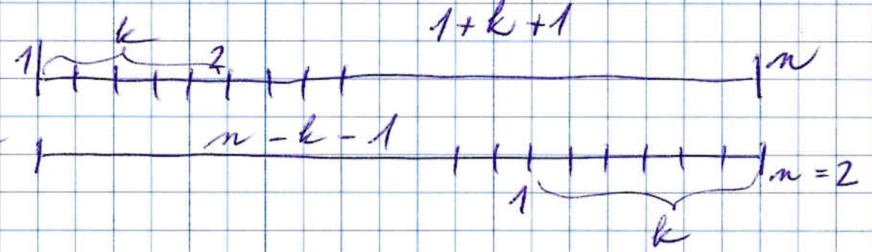
(a) Kolik je různých uspořádání balíčku takových, že při snímání je mezi kartou číslo 1 a kartou číslo 2 právě k dalších karet?

(b) Kolik je různých uspořádání balíčku takových, že při snímání přijde karta číslo 1 dříve než karta číslo 2?

a) 2 místa jsou pevně daná, ostatní místa jsou libovolná $= (n-2)!$

- počet karet (~~mezi~~) mezi kartou 1 a 2 = $k+2$

- počet způsobů rozmístění
  - první pozice
  - poslední pozice



- varianta pro kartu 1 a 2 = $(n-k-1) \cdot 2$
- kombinace se zbytkem = $2(n-k-1)(n-2)!$

b) varianty při snímání – první 1 / první 2

$\Rightarrow$ jednička má 50% pravděpodobnost

$100\% = n! \Rightarrow 50\% \quad \frac{n!}{2}$

(vi) Z čísel $\{1, \ldots, n\}$ tvoříme posloupnosti délky k.

(a) Kolik existuje různých klesajících posloupností?

(b) Kolik existuje různých nerostoucích posloupností?

a) klesající posloupnost

- čísla se neopakují
- máme pouze jedno uspořádání = ostře klesající posloupnost, ze které vyberu k-tici

$\Rightarrow$ nezáleží na pořadí $\Rightarrow \binom{n}{k}$

b) nerostoucí posloupnost = např. 6 5 5 4 apod.
- čísla se mohou opakovat
- nezáleží na pořadí $\Rightarrow \binom{n+k-1}{k}$

X Kromě Mozarta existují právě dva další skladatelé.

m = Mozart, $S(x)$ = x je skladatel

$$\Big(\exists x \exists y\; S(x) \wedge S(y) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(x = m) \wedge \neg(y = m)\Big) \wedge \Big(\forall z\; S(z) \Rightarrow (z = m) \vee (z = x) \vee (z = y)\Big).$$

(b) $\forall x \forall y \forall z \Big((\neg(y = z) \wedge (x = y + z)) \Rightarrow \exists u ((y = u + u) \vee (z = u + u)) \Big)$.

X Pokud je x součtem 2 různých čísel, je aspoň jeden sčítanec sudý.

(viii) Mějme n černých koulí očíslovaných $1, 2, \dots, n$ a $2n$ bílých koulí očíslovaných $1, 2, \dots, 2n$. Rozdělíme je do n krabic očíslovaných $1, 2, \dots, n$ tak, že v každé krabici jsou právě tři.

(a) Kolika způsoby to lze provést?

(b) Kolika způsoby to lze provést tak, aby v každé krabici byly dvě bílé a jedna černá koule?

a) koule se neopakují

nezáleží na pořadí = celkem máme $3n$ koulí

kombinace pro vytvoření 1. trojice $\binom{3n}{3}$

2. trojice $\binom{3n-3}{3}$ ...

$$\text{kombinace} = \binom{3n}{3} \cdot \binom{3n-3}{3} \cdot \binom{3n-6}{3} \cdots \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3}$$

$$= \frac{(3n)!}{(3!)^n}$$

b) trojice tvoří koule B B Č → kombinace $\binom{n}{1} = n$

neopakují se a nezáleží na pořadí

1. krabice $\binom{2n}{2} \cdot \binom{n}{1}$

2. krabice $\binom{2n-2}{2} \cdot \binom{n-1}{1}$ atd.

$$\text{kombinace} = \binom{2n}{2} \cdot \binom{n}{1} \cdot \binom{2n-2}{2}\binom{n-1}{1} \cdots \binom{4}{2}\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{2}\binom{1}{1}$$

$$= \frac{(2n)!\, n!}{2^n}$$