X Máme k dispozici M jedniček a N nul. M ≤ N.

a) kolika způsoby je možné všechny 0 a 1 uspořádat do řady?

b) kolika způsoby z celkového počtu 0 a 1 vybereme N symbolů a uspořádáme je do ~~řad~~ řady? Kolik řad vznikne?

1. (a) Z celkového počtu $n + m$ míst v řadě vybereme $m$ a obsadíme jedničkami. Zbytek pak doplníme nulami. Počet uspořádání je

$$\binom{m+n}{m}.$$

(b) Je-li ve vybraném vzorku $n$ symbolů obsaženo $k$ jedniček, můžeme tyto symboly uspořádat $\binom{n}{k}$ způsoby. Celkově

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}.$$

X Uvažujme všechny dvouprvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \dots n\}$. Kolik je

a) disjunktních dvojic takových dvouprvkových množin?
(nemají společný prvek)

b) dvouprvkových množin, které mají společný právě jeden prvek?

1. (a) První dvouprvkovou množinu můžeme vybrat jakkoli, tj. $\binom{n}{2}$ způsoby. Druhou podmnožinu už vybíráme jen z $n-2$ prvků, tedy $\binom{n-2}{2}$ způsoby. Počet disjunktních dvojic (u kterých nezáleží na pořadí) je

$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\frac{1}{2}.$$

(b) Vybereme společný prvek obou množin, což lze $n$ způsoby. Ten doplníme tak, že k němu dvakrát přidáme po jednom prvku, čímž vytvoříme dvě množiny, které mají jen jeden společný prvek. Přidávané dva prvky lze vybrat $\binom{n-1}{2}$ způsoby. Počet je tedy

$$n\binom{n-1}{2}..$$

× V krabici je N míčků s navzájem různými barvami. Provedeme k-krát vytažení.

a) Kolika způsoby může série dopadnout, když míčky **vracíme**: $n^k$ $\qquad \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot n \cdots}_{k}$

**nevracíme**: $\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot n(n-2) \cdot \ldots \cdot n-(k-1)}_{k}$

b) V kolika sériích se vyskytnou všechny barvy, když míčky vracíme:

(pokud nevracíme, bude to $n!$, protože $k = n$)

$n \leq k$

$$N = n^k - \underbrace{|A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n|}_{\text{sérií, kde nějaká barva chybí}} = n^k - n(n-1)^k + \binom{n}{2} \cdot (n-2)^k \ldots 0$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} n^k - \binom{n}{1}(n-1)^k - \binom{n}{2}(n-2)^k \ldots - \underbrace{\binom{n}{n}(n-n)^k}_{=0}$$

× Není-li pravda, že není všechno zlato, co se třpytí, pak se zlato netřpytí.

4. (a) $\neg\Big(\exists x\, T(x) \wedge \neg(x = z)\Big) \Rightarrow \neg T(z)$ nebo ekvivalentně $\forall x \neg T(x) \vee (x = z) \Rightarrow \neg T(z)$.

(b) $\exists x \exists y (x = y + y + y) \wedge \Big(\forall z \neg(x = z + z)\Big)$.

Ne každé číslo dělitelné třemi je sudé.

× Existuje-li jediná úspěšná divadelní hra, pak je to Kupec Benátský.

$U(x)$ — $x$ je úspěšná div. hra

$k$ — Kupec Benátský

$$\forall x \Big[U(x) \wedge \Big[\Big(\forall x\, \forall y\, \big(U(x) \wedge U(y)\big)\Big) \Rightarrow (x = y)\Big] = (x = k)\Big]$$

× Existuje nejvýše jedno celé číslo rovnající se své druhé mocnině.

$$\forall x \forall y \Big(\big(x = x \cdot x\big) \wedge \big(y = y \cdot y\big) \Rightarrow (x = y)\Big)$$

X Na množině N (přirozených čísel) máme relaci R definovanou předpisem $m R n$ právě když obě čísla $3333^m$ a $3333^n$ mají v dekadickém zápise na konci stejnou číslici.

a) Ukaž, že R je ekvivalence, kolik je tříd ekvivalence na množině N?

b) Ukaž, že když platí $m R n$, tak součet $3333^m$ a $3333^{n+2}$ je dělitelný 10.

2. (a) Exisují čtyři třídy ekvivalence podle toho, na co končí $3333^n$.

   (b) Jsou-li $m\,R\,n$, pak lze psát $3333^m = 10u + k$ a $3333^n = 10v + k$. Proto

$$3333^m + 3333^{n+2} = 10u + k + 9(10\widetilde{v} + k) = 10(u + \widetilde{v}) + 10k.$$

X R je relace na množině N definovaná předpisem $x R y$ právě, když $x \wedge y \Leftarrow y \wedge x$.

a) Ukažte, že R je reflexivní, ale nikoli antisymetrická!

b) Pro kolik přirozených čísel y platí $3 R y \wedge x$

2. (a) Že relace není antisymetrická je vidět např. z toho, že $2\,R\,4$ a $4\,R\,2$ a přesto $2 \neq 4$.

   (b) Jediné číslo $y$ splňující, že $3\,R\,y$ je $y = 3$.

X Na množině $X = \{$posloupnosti příroz. čísel$\}$. $x_n R y_n$ právě, když existují indexy $k$, $m$, že $x_k \leq x_m$ a $y_k \leq y_m$.

a) Které všechny posloupnosti jsou v relaci s posloup. $(1,2,3,4,\dots)$?

Protože posloupnost N čísel nemůže být klesající, vždy existují indexy $k < m$, že $y_k \leq y_m$.
Tím je každá posloupnost v relaci.

b) Je reflexivní a symetrická? ANO

reflexivita: ~~jest~~ platí $x_1 \leq x_2$, pak $k=1$, $m=2$ a naopak $x_2 \leq x_1$, pak $k=2$, $m=1$

symetrie: je jasná z reflexivity