VÝROKOVÝ POČET

výrok = tvrzení, u kterého zjišťujeme pravdivost / nepravdivost. Nemůže platit současně.

(Def) Výrok je tvrzení, o kterém lze z principu rozhodnout, je-li pravdivý či nikoli.

Požadujeme, aby:

1) výrok byl pravdivý nebo nepravdivý, třetí možnost není
2) výrok nemůže být současně pravdivý i nepravdivý

Formální definice

Abeceda je množina těchto symbolů:

$($, $)$ závorky

$\neg$	negace, reprezentuje zápor	logické výroky
$\wedge$	konjunkce, reprezentuje „a"	
$\vee$	disjunkce, -"- „nebo"	
$\Rightarrow$	implikace, -"- „je-li, pak"	
$\Leftrightarrow$	ekvivalence, -"- „právě, když"	

$P, Q, R \dots$ logické proměnné

Def FORMULE je konečná posloupnost znaků abecedy vytvořená následující induktivní konstrukcí:

1) logické proměnné jsou formule
2) jsou-li φ a ψ formule, pak i $(\neg\varphi)$, $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$ $(\varphi\Rightarrow\psi)$ a $(\varphi\Leftrightarrow\psi)$ jsou formule.

Složitější formule se tvoří pomocí závorek $(((P\vee Q)\vee R)\vee R)\ldots$

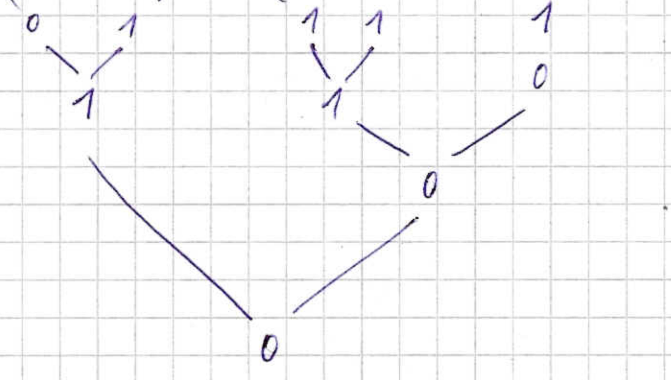
- vnější závorky můžeme vypustit $= P\vee Q\vee R\vee R\ldots$
- nejsilnější preferenci má $\neg$, pak $\wedge$ a $\vee$, nakonec $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$

PŘ $(P\Rightarrow Q)\Leftrightarrow(R\wedge Q\Rightarrow\neg R)=\varphi$

$v(P)=0$

$v(Q)=1$

$v(R)=1$



Závěr $v(\varphi)=0$.

PRAVDIVOSTNÍ OHODNOCENÍ

1 = pravda   0 = nepravda

Pravdivostní ohodnocení je zobrazení ν (= ný) z množiny všech formulí do dvouprvkové množiny $\{0,1\}$ takové, že

	φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$	$\neg \varphi$
	0	0	0	0	1	1	1
ν	0	1	0	1	1	0	1
	1	0	0	1	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	0

3.2.1 Pravdivostní ohodnocení je zobrazení $u \colon \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}$, které splňuje pravidla

(1) $\neg\alpha$ je pravdivá právě tehdy, když α je nepravdivá;

(2) $\alpha \wedge \beta$ je pravdivá právě tehdy, když α a β jsou obě pravdivé;

(3) $\alpha \vee \beta$ je nepravdivá právě tehdy, když α a β jsou obě nepravdivé;

(4) $\alpha \Rightarrow \beta$ je nepravdivá právě tehdy, když α je pravdivá a β nepravdivá;

(5) $\alpha \Leftrightarrow \beta$ je pravdivá právě tehdy, když buď obě formule α a β jsou pravdivé nebo obě jsou nepravdivé.

3.2.2 Pravdivostní tabulky. Vlastnosti, které pravdivostní ohodnocení musí mít, znázorňujeme též pomocí tzv. pravdivostních tabulek logických spojek. Jsou to:

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

3.2.5 Příklad. Zde je pravdivostní tabulka formule $\varphi = (x \Rightarrow y) \Rightarrow ((\neg x \vee \vee y) \wedge (y \Rightarrow \neg x))$:

x	y	$x \Rightarrow y$	$\neg x \vee y$	$y \Rightarrow \neg x$	$(\neg x \vee y) \wedge (y \Rightarrow \neg x)$	φ
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0

3.2.6 Tautologie, splnitelná formule, kontradikce. Formule se nazývá *tautologie*, jestliže je pravdivá ve všech pravdivostních ohodnoceních; nazývá se *kontradikce*, jestliže je nepravdivá ve všech pravdivostních ohodnoceních. Formule je *splnitelná*, jestliže existuje aspoň jedno pravdivostní ohodnocení, ve kterém je pravdivá.

VÝR/REL 3

3.2.7 Příklady. Formule $\alpha = (x \Rightarrow (y \wedge \neg y)) \Rightarrow \neg x$ je tautologie.
Formule $\beta = (\neg x \vee y) \Leftrightarrow (y \Rightarrow x)$ je splnitelná, ale není tautologie.
Formule $\gamma = \neg((x \Rightarrow \neg x) \Leftrightarrow \neg x)$ je kontradikce.

BOOLEOVSKÁ FUNKCE

(Def) Boll. fce je každá fce $\mathcal{B}: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Bool. fce je realizovaná formulí φ.

$\mathcal{B}_\varphi(x_1, x_2, x_3)$

$\varphi = P \Rightarrow (R \vee Q)$ ...

3.8.1 Booleovská funkce. *Booleovskou funkcí n proměnných*, kde n je přirozené číslo, rozumíme každé zobrazení $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, tj. zobrazení, které každé n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nul a jedniček přiřazuje nulu nebo jedničku (označenou $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$).

(V) Každá Bool. fce je realizována nějakou formulí.

(Def) Formule φ má konjunktivní normální tvar (CNF), jestliže $\varphi = \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$, kde ψ_i jsou disjunkce log. proměnných a jejich negací.

Formule φ má disjunktivní normální tvar (DFN), jestliže $\varphi = \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$, kde ψ_i jsou konjunkce log. proměnných a jejich negací.

3.5.6 Booleovské funkce. *Booleovskou funkcí n* proměnných rozumíme funkci, která každé n-tici nul a jedniček přiřazuje buď nulu nebo jedničku; jedná se tedy o zobrazeni $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Místo booleovská funkce se často také říká *Booleova funkce.* Každé výrokové formuli odpovídá booleovská funkce — stačí se podívat na poslední sloupec pravdivostní tabulky formule. Dvě formule jsou tautologicky ekvivalentní právě tehdy, když oběma odpovídají stejné Booleovy funkce. V tomto smyslu najít „jednodušší" formuli tautologicky ekvivalentní s danou formulí je jinak řečena úloha najít v nějakém smyslu jednodušší formuli (většinou kratší, nebo s menší hloubkou), která odpovídá stejné Booleově funkci. A to je úloha v teorii logických obvodů častá.

(PŘ) $\mathcal{B}(0,0) = 1$

$\mathcal{B}(0,1) = 0$

$\mathcal{B}(1,0) = 0$

$\mathcal{B}(1,1) = 0$

BOOLEOVSKÁ FUNKCE

(PŘ) formule $\varphi = (P_1 \wedge \neg P_2)$
Bool. fce, která realizuje φ,
je definována $B_\varphi(x_1, x_2) = V(\varphi)$,
když $V(P_1) = x_1$, $V(P_2) = x_2$.

$B_\varphi(0,0) = 0$ $\quad$ $B_\varphi(1,0) = 1$

$B_\varphi(0,1) = 0$ $\quad$ $B_\varphi(1,1) = 0$

(PŘ) $B(0,0,0) =$ máme 3 proměnné
a hledáme fci, která by ji
realizovala.

$B(0,0,0) = 1$
$B(0,0,1) = 0$
$B(0,1,0) = 0$
$B(0,1,1) = 1$
$B(1,0,0) = 1$
$B(1,0,1) = 0$
$B(1,1,0) = 0$
$B(1,1,1) = 0$

Jak najít formuli?

(A) hodnotu 1 má

000 $\quad \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3$

011 $\quad \neg P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$

100 $\quad P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3$

$\varphi = (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3) \wedge \ldots$
(spojeno disjunkcí)

(B) hodnotu 0 má

001 $\quad P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3$

010 $\quad P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3$

$\vdots \qquad \vdots$

$\varphi = (P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3) \wedge \ldots$
(spojeno konjunkcí)

BOOLEOVSKÁ FUNKCE

Df) mějme množinu formulí M a formuli φ. Řekneme, že φ je logickým důsledkem formulí z M, jestliže φ je pravdivá při každém ohodnocení, při kterém jsou pravdivé všechny formule z M.

$M \models \varphi$ = φ je log. důsledkem M

V) $M \models \varphi$ právě, když existuje pravdivostní ohodnocení, že všechny formule z $M \cup \{\neg\varphi\}$ nejsou pravdivé, tj. $M \cup \{\neg\varphi\}$ není splnitelná.

PŘ

$M = \{P, P \Rightarrow Q\}$

$\varphi = Q$

P	Q	P => Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$M \models \varphi$

Dk) mějme $M \models \varphi$. Uvažujme ohodnocení, kde všechny formule z M jsou pravdivé.
Pak $v(\varphi) = 1$ a tedy hodnota $v(\neg\varphi) = 0$ a $M \cup \{\neg\varphi\}$ není splnitelná.
Víme, že $M \cup \{\neg\varphi\}$ není splnitelná.
mějme ohodnocení, kde všechny formule z M jsou pravdivé.
V tomto ohodnocení musí být $v(\neg\varphi) = 0$, tedy $v(\varphi) = 1$.

REZOLUČNÍ METODA

Rezoluční metoda rozhoduje, zda daná množina klausulí je splnitelná nebo je nesplnitelná. Tím je také "universální metodou" pro řešení problémů, neboť:

1. Daná formule φ je sémantickým důsledkem množiny formulí S právě tehdy, když množina $S \cup \{\neg\varphi\}$ je nesplnitelná.

2. Ke každé formuli α existuje množina klausulí S_α taková, že α je pravdivá v pravdivostním ohodnocení právě tehdy, když v tomto ohodnocení je pravdivá množina S_α.

3.10.1 Klausule. Množinu všech logických proměnných označíme A. Připomeňme, že *literál* je buď logická proměnná (tzv. *positivní literál*) nebo negace logické proměnné (tzv. *negativní literál*). *Komplementární literály* jsou literály p a $\neg p$. *Klausule* je literál nebo disjunkce konečně mnoha literálů.

Zvláštní místo mezi klausulemi zaujímá *prázdná klausule*, tj. klausule, která neobsahuje žádný literál a tudíž se jedná o kontradikci. Proto ji budeme označovat F.

Pro jednoduchost zavedeme následující konvenci: Máme dánu klausuli C a literál p, který se v C vyskytuje. Pak symbolem $C \setminus p$ označujeme klausuli, která obsahuje všechny literály jako C kromě p. Tedy např. je-li $C = \neg x \vee y \vee \neg z$, pak

$$C \setminus \neg z = \neg x \vee y.$$

<u>Klauzule</u> = formule daná disjunkcí proměnných nebo jejich negací.
(CNF = konjunkce klauzulí)
<u>Rezolventa</u> = rezolventa klauzulí φ_1 a φ_2 (podle proměnné P) je nová klauzule $(\varphi_1 \setminus \{P\}) \vee \{\varphi_2 \setminus \{\neg P\})$ pro dvě klauzule φ_1 a φ_2 takové, že ve φ_1 je proměnná P a ve φ_2 je $\neg P$.

3.10.2 Rezolventa. Řekneme, že klausule D je *rezolventou klausulí* C_1 a C_2 právě tehdy, když existuje literál p takový, že p se vyskytuje v klausuli C_1, $\neg p$ se vyskytuje v klausuli C_2 a

$$D = (C_1 \setminus p) \vee (C_2 \setminus \neg p).$$

Také říkáme, že klausule D je *rezolventou* C_1 *a* C_2 *podle literálu* p a značíme $D = res_p(C_1, C_2)$.

3.10.3 Tvrzení. Máme dány dvě klausule C_1, C_2 a označme D jejich rezolventu. Pak D je sémantický důsledek množiny $\{C_1, C_2\}$.

3.10.4 Tvrzení. Máme dánu množinu klausulí S a označme D rezolventu některých dvou klausulí z množiny S. Pak množiny S a $S \cup \{D\}$ jsou pravdivé ve stejných pravdivostních ohodnoceních.

PŘ $\left.\begin{array}{l}\varphi_1 = P \vee Q \vee \neg R \vee S \\ \varphi_2 = T \vee \neg Q \vee S\end{array}\right\}$ lze dělat rezolventu pouze podle Q

PŘ $\varphi_1 = P \quad \varphi_2 = \neg P$ rezolventa $= \emptyset$ (prázdná množina)

REZOLUČNÍ METODA

Rezoluční metoda pro splnitelnost množiny M:

1) mějme množinu formulí, kterou upravíme tak, že všechny formule budou v CNF (tzn. konjunkce formulí). Dále budeme za formule v M považovat všechny klauzule vyskytující se v daných formulích.
2) Vypustíme klauzule, které jsou vždy pravdivé (tzn. tautologie).
3) Vyrábíme rezolventy, pokud to lze. Pokud se vyskytne prázdná klauzule, pak je to ekvivalentní, že M nebyla splnitelná.

3.10.8 Výhodnější postup. Existuje ještě jeden postup, který usnadní práci s použitím rezoluční metody. Ten nejenom že nám odpoví na otázku, zda konečná množina klausulí S je splnitelná nebo nesplnitelná, ale dokonce nám umožní v případě splnitelnosti sestrojit aspoň jedno pravdivostní ohodnocení, v němž je množina S pravdivá.

Máme konečnou množinu klausulí S, kde žádná klausule není tautologií. Zvolíme jednu logickou proměnnou (označme ji x), která se v některé z klausulí z S vyskytuje. Najdeme množinu klausulí S_1 s těmito vlastnostmi:

1. Žádná klausule v S_1 neobsahuje logickou proměnnou x.
2. Množina S_1 je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná původní množina S.

Množinu S_1 vytvoříme takto: Rozdělíme klausule množiny S do tří skupin:

M_0 se skládá ze všech klausulí množiny S, které neobsahují logickou proměnnou x.

M_x se skládá ze všech klausulí množiny S, které obsahují positivní literál x.

$M_{\neg x}$ se skládá ze všech klausulí množiny S, které obsahují negativní literál $\neg x$.

Označme N množinu všech rezolvent klausulí množiny S podle literálu x; tj. rezolvent vždy jedné klausule z množiny M_x s jednou klausulí z množiny $M_{\neg x}$. Všechny tautologie vyřadíme.

Položíme $S_1 = M_0 \cup N$.

3.10.9 Tvrzení. Množina klausulí S_1 zkonstruovaná výše je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná množina S.

REZOLUČNÍ METODA

PŘ $M = \{P \vee Q, \neg R \vee S, \neg Q \vee S, \neg Q \vee R, \neg S\}$

rezolventa podle	$P \vee Q$	$\neg R \vee S$	$\neg Q \vee S$	$\neg Q \vee R$	$\neg S$					
Q	1		0	0		$P \vee S$	$P \vee R$			
S		1			0	1		$\neg R$	P	
R							1	0		P
									1	1

$V(P) = 1$

$V(R) = 0$

$V(Q) = 0$ $\quad V(S) = 0$

(vždy se hodnotí JEN nehodnocené sloupce)

3.10.12 Příklad. Rezoluční metodou rozhodněte, zda množina klausulí

$$S = \{x \vee y \vee \neg z, \neg x, x \vee y \vee z, x \vee \neg y, z \vee t \vee v, \neg t \vee w\}$$

je splnitelná. V kladném případě najděme pravdivostní ohodnocení, v němž je S pravdivá.

Vyjdeme z tabulky, která má jeden sloupec pro každou klausuli množiny S. (Sledujte tabulku 3.1.)

	$x \vee y \vee \neg z$	$\neg x$	$x \vee y \vee z$	$x \vee \neg y$	$z \vee t \vee v$	$\neg t \vee w$					
y:	1		1	0			$x \vee \neg z$	$x \vee z$			
x:		0					1	1	$\neg z$	z	
z:					1				0	1	F

Nejprve odstraňujeme logickou proměnnou y: První řádek označíme y. Do sloupce napíšeme 1 v případě, že jeho klausule obsahuje literál y (první a třetí sloupec), a napíšeme 0 v případě, že klausule sloupce obsahuje literál $\neg y$ (čtvrtý sloupec). Tím jsme označili všechny sloupce, jejichž klausule obsahují proměnnou y. K tabulce přidáme rezolventy klausulí podle literálu y: Jsou to klausule

$$x \vee \neg z = res_y(x \vee y \vee \neg z, x \vee \neg y) \quad \text{a} \quad x \vee z = res_y(x \vee y \vee z, x \vee \neg y).$$

Množina S_1 z našeho postupu je nyní tvořena všemi klausulemi, jejichž sloupce ještě nejsou označeny 0 nebo 1. Tedy

$$S_1 = \{\neg x, z \vee t \vee v, \neg t \vee w, x \vee \neg z, x \vee z\}.$$

V dalším kroku odstraníme logickou proměnnou x: V řádku odpovídajícím proměnné x napíšeme 0 do druhého sloupce (klausule $\neg x$) a napíšeme 1 do sedmého a osmého sloupce (klausule $x \vee \neg z$ a $x \vee z$). K tabulce přidáme sloupce pro rezolventy klausulí množiny S_1 podle literálu x. Jsou to $\neg z = res_x(\neg x, x \vee \vee \neg z)$ a $z = res_x(\neg x, x \vee z)$. Nyní stačí rozhodnout, zda je splnitelná množina klausulí

$$S_2 = \{z \vee t \vee v, \neg t \vee w, \neg z, z\}.$$

Dále vybereme logickou proměnnou z. Do pátého a desátého sloupce vepíšeme 1 (jejich klausule obsahují literál z) a do devátého sloupce napíšeme 0 (jeho klausule obsahuje literál $\neg z$). Jako rezolventu klausulí z devátého a desátého sloupce dostáváme prázdnou klausuli F. Proto je množina S_2 nesplnitelná. To znamená, že také množiny S_1 a S jsou nesplnitelné.

VÝR/ REL 9

REZOLUČNÍ METODA

PŘ Pomocí rezoluční metody řekněte, zda $\{\neg P \Rightarrow Q,\ R \Rightarrow S,\ \neg P \vee S,\ \neg Q \vee R\} \models S$?

V: $M \models \varphi \Leftrightarrow M \cup \{\neg \varphi\}$ není splnitelná!

1) formule musí být zapsané v CNF

pravidla $P \Rightarrow Q = \neg P \vee Q$

$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$

$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$

$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

přepis do CNF

$\neg P \Rightarrow Q = P \vee Q$

$R \Rightarrow S = \neg R \vee S$

$\neg P \vee S$

$\neg Q \vee R$

	$P \vee Q$	$\neg R \vee S$	$\neg P \vee S$	$\neg Q \vee R$	$\neg S$				
P	1		0		~~$Q \vee S$~~	$Q \vee S$			
S		1			0	1	$\neg R$	Q	
Q				0				1	R
							0		1

není splnitelná

$\Rightarrow$ S je logickým důsledkem uvedených 4 formulí