# MNOŽINY

značení – $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ množina (přiroz. čísel)

$\emptyset$ = prázdná množina

$\{x \in A,\ x$ má vlastnost…$\}$ = vlastnost prvků

$A \subset B$ = $A$ je podmnožinou $B$

$A \subsetneq B$ = vlastní podmnožina
$A$ je podmnož. $B$, ale $\neq B$
každá množ. má svoji vlastní podmnož.

$A_1 \cup A_2 \cup \dots$ = sjednocení

$A_1 \cup A_2 \cup \dots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

$A_1 \cap A_2 \cap \dots$ = průnik

$A_1 \cap A_2 \cap \dots = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ = rozdíl

operace s ~~operace~~ množinami = průnik $\cap$, rozdíl $\setminus$, sjednocení $\cup$

**1.1.6 Operace s množinami.** Mějme dvě množiny $A$ a $B$. Jejich *sjednocením* je množina

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\};$$

*průnikem* těchto dvou množin je množina

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ a } x \in B\}.$$

*Rozdílem* množin $A$ a $B$ (v tomto pořadí) je množina

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ a } x \notin B\}.$$

Je-li $A \subseteq U$, potom *doplňkem množiny $A$ v množině $U$* je množina $U \setminus A$.

**1.1.7 Disjunktní množiny.** Je-li $A \cap B = \emptyset$, říkáme, že množiny $A$ a $B$ jsou *disjunktní*.

**1.1.8 Kartézský součin.** *Kartézský součin* množin $A$, $B$ (značíme $A \times B$) je definován

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Jestliže se jedná o kartézský součin stejných množin, mluvíme o *kartézských mocninách* množiny $A$ a píšeme $A^2$ místo $A \times A$, $A^3$ místo $A \times (A \times A)$, atd.

**1.1.9 Potenční množina.** *Potenční množina* $P(A)$ množiny $A$ je rovna množině všech podmnožin množiny $A$; formálně

$$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Potenční množina je vždy neprázdná; obsahuje totiž prázdnou množinu.

**1.1.10 Charakteristická funkce podmnožiny.** *Charakteristická funkce* $\chi_A$ podmožiny $A \subseteq U$ je zobrazení $\chi_A \colon U \to \{0, 1\}$ definované

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in U \setminus A. \end{cases}$$

de Morganova pravidla

1) $B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (B \setminus A_i)$

Dk $x \in B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Leftrightarrow x \in B$ a $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$\Leftrightarrow x \in B$, $x \notin A_i$ pro všechna $i$

$\Leftrightarrow x \in B \setminus A_i$ pro všechna $i$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} (B \setminus A_i)$

2) $B \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B \setminus A_i)$

Dk analogicky

KARTÉZSKÝ SOUČIN

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Kartézský součin všech množin

$\prod_{i=1}^{m} A_i = A_1 \times A_2 \times \dots A_m = \{(a_1, a_2 \dots a_m) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \dots a_m \in A_m\}$

Nekonečný kartézský součin množin

$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \{(a_1, a_2 \dots a_\infty) \mid a_i \in A, i \in \mathbb{N}\}$

jsou-li $A_i = A$, pak $\prod_{i=1}^{\infty} A_i = A^{\mathbb{N}}$ (tj. všechny množ. jsou stejné)

$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ = všechny posloupnosti 0-1 (nula, jedna)

* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ = kartézský součin všech ~~posloupností~~ posloupností 0,1

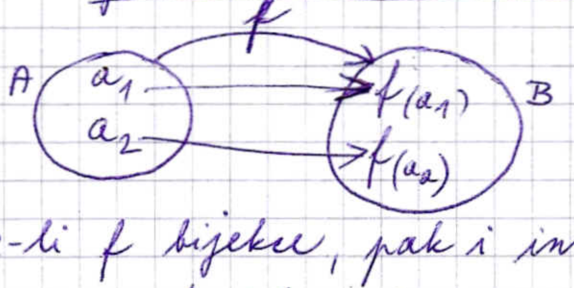
ZOBRAZENÍ f:

Def zobrazení $f: A \to B$ se nazývá

BIJEKCE, je-li PROSTÉ

(tj. $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$)

a je-li obor hodnot roven množ. B




Je-li f bijekce, pak i inverzní zobrazení $f^{-1}$ je bijekce.

## NEKONEČNÉ MNOŽINY

(Def) Množina A je nekonečná, jestliže existuje bijekce množiny A na svoji vlastní podmnožinu.

## MOHUTNOST MNOŽIN

(Def) Množ. A a B mají stejnou <u>mohutnost</u>, jestliže existuje bijekce množiny A na množinu B

značíme $|A| = |B|$

## SPOČETNOST

Množina je <u>SPOČETNÁ</u>, jestliže její $|A| = |\mathbb{N}|$.

<u>Kritérium pro spočetnost</u>

A je spočetná $\Leftrightarrow$ všechny prvky množ. A lze sestavit do prosté posloupnosti.

(V) Máme-li $\infty$ množinu, pak obsahuje spočetnou podmnož.

<u>spočetná podmnož.</u> = jsou to nejmenší ~~mn~~ $\infty$ množiny

(Dk) A je $\infty \Rightarrow A \neq \emptyset$ a $\exists a_1 \in A$.

Množ. $A \setminus \{a_1\}$ je neprázdná, $\exists a_2 \in A \setminus \{a_1\}$

Podobně $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$, $\exists a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\} \dots$

Tím se vytvoří $\infty$ posloupnost

$$\underbrace{\{a_1, a_2 \dots\}}_{= \text{spočetná množina}} \subset A$$

SPOČETNOST

(V) Jsou-li $A, B$ spočetné množ., pak i množ. všech dvojic $(= A \times B)$ je spočetná $|A \times B| = |\mathbb{N}|$.

(V) Jsou-li $A_1, A_2 \ldots$ spočetné, pak i $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ je spočetné.
(= každý řádek „sítě bodů" je spočetný a jejich $\cup$ je rovněž spočetná M)

(V1) Mějme spočetnou množ. A. Pak $A^k$ je spočetná pro každé $k = 1, 2, 3, \ldots$

(Dk) matematickou indukcí

indukce podle k: 1) $k = 1$: $A^1$ je spočetná

2) najít platný algoritmus pro všechna k

k = přirozené číslo

předpoklad, že $A^k$ je spočetná

$A^{k+1} = A^k \times A$ – podle (V) o kartézském součinu spočetných množ. je i $A^k \times A$ spočetná

(V2) Konečných podmnožin spočetné množ. je jen spočetně mnoho.

(Dk) Konečná podmnož. o k-prvcích je k-tice prvků => všechny konečné podmnož. tvoří $\bigcup_{k=1}^{\infty} A^k$ (= sjednocení všech konečných podmnož.)
Protože $A^k$ je spočetná podle (V1) + (Dk), z věty o sjednocení vyplývá, že $\bigcup_{k=1}^{\infty} A^k$ je opět spočetná.

SPOČETNOST

(V) Množ. všech podmnož. $\mathbb{N}$ není spočetná!

(Dk) Kdyby množina všech podmnož. byla spočetná, podle kritéria spočetnosti ji lze zapsat $\{A_1, A_2, A_3 \dots\}$.

Sestrojíme množ. $S$ takto:

- je-li $1 \notin A_1$, pak 1 vložíme do $S$
- je-li $2 \notin A_2$, pak 2 vložíme do $S$

$\Rightarrow S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\}$

Pak existuje index $m$, že $S = A_m$.

$m \overset{?}{\in} S$

Kdyby $m \in S$, pak $m \notin A_m = S$ = SPOR

Kdyby $m \notin S = A_m$, pak $m \in S$ = SPOR

**1.3.5 Spočetné a nespočetné množiny.** Řekneme, že množina $A$ je *spočetná*, má-li stejnou mohutnost jako množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$. Jestliže množina $A$ je nekonečná a není spočetná, řekneme, že je *nespočetná*.

Pro množinu, která je buď spočetná nebo konečná, se často používá termín *nejvýše spočetná množina*.

**1.3.6 Tvrzení.** Množina $A$ je spočetná právě tehdy, když ji lze uspořádat do prosté nekonečné posloupnosti (tj. neopakují se v ní prvky).

**1.3.1 Vzájemně jednoznačné zobrazení.** Zobrazení $f$ množiny $A$ do množiny $B$ je *vzájemně jednoznačné* právě tehdy, když je prosté a na.

*Prosté zobrazení* je takové, které dvěma různým prvkům $x$, $y$ množiny $A$ přiřazuje různé prvky $f(x)$, $f(y)$ množiny $B$.

*Zobrazení je na* $B$, jestliže pro každý prvek $y \in B$ existuje prvek $x \in A$ takový, že $f(x) = y$.

**1.3.2 Mohutnost množin.** Řekneme, že dvě množiny $A$, $B$ mají *stejnou mohutnost*, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $A$ na množinu $B$. Tento fakt značíme $|A| = |B|$.

**1.3.3 Poznámka.** Poznamenejme, že existuje-li vzájemně jednoznačné zobrazení $f$ množiny $A$ na množinu $B$, pak také existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $B$ na množinu $A$ — inversní zobrazení k zobrazení $f$.