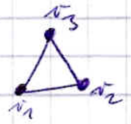
GRAFY

Def Graf $G = (V, E)$ je dvojice,
kde V je neprázdná množ.
(tzv. vrcholy grafu)
$E \subset \{\{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V\}$
(tzv. hrany)

Zjednodušeně – je to spojnice dvou vrcholů.

Úplný graf K_n je takový, kde
$E = \{\{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V\} \quad = \quad K_3$ 

Stupeň vrcholu V je $d(v)$ = počet hran příslušných vrcholu v

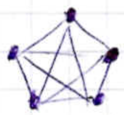
$$d(v) = |\{e \in E \mid v \in e\}|$$

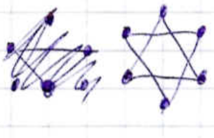
V Mějme graf $G = (V, E)$. Je-li $|V| = n$
(= počet vrcholů je „n"), pak
$|E| \leq \binom{n}{2}$. Dále $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

Dk $|E| \leq \binom{n}{2}$ – tvrzení je triviální
$\sum_{v \in E} d(v) = 2|E|$ – z tvrzení vyplývá,
že speciálně počet vrcholů s lichým stupněm je sudý.
= máme-li lichý počet vrcholů, pak musí být v grafu lichý počet vrcholů se sudým stupněm.

GRAFY

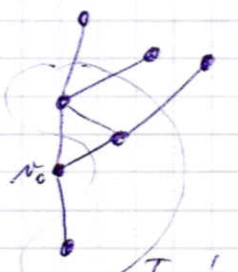
Def Mějme graf $G = (V, E)$.
Řekneme, že posloupnost $v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_{n-1} e_{n-1} v_n$ se nazývá TAH (nebo HRANA GRAFU), jestliže $v_i \in V$ a $e_i \in \{v_i, v_{i+1}\}$ a všechna e_i jsou navzájem různá.
CESTA je takový tah, který má navzájem různé vrcholy (= každý vrchol se opakuje pouze jednou).
GRAF JE SOUVISLÝ, jestliže pro každé dva vrcholy existuje cesta, která je spojuje.





V Mějme graf $G = (V, E)$, že $|V| = n$.
Je-li G souvislý, pak má alespoň $n-1$ hran.

Dk Zvolíme libovolný v_0. Vrcholy, které jsou spojeny s hranou v_0 nazveme VRCHOLY I. STUPNĚ.
II. ÚROVEŇ je tvořena vrcholy, které lze spojit hranou s vrcholy I. úrovně a nejsou to vrcholy nižší úrovně.
... atd.



(vrchol v_0 nepočítáme $\Leftarrow n-1$)

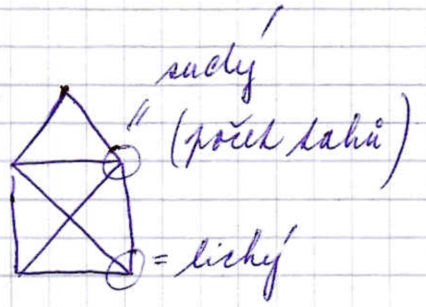
Proces končí po nekonečně mnoha (= n) krocích.
V procesu jsme připojili celkem $n-1$ vrcholů a tedy jsme potřebovali ALESPOŇ $n-1$ hran.

GRAFY

Eulerův graf = graf jedním tahem
(Leonard Euler)

(Def) Graf se nazývá EULERŮV, jestliže existuje tah, obsahující všechny hrany.

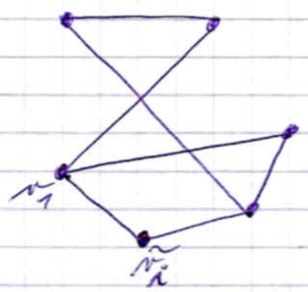
(V) Souvislý graf je Eulerův právě, když stupně všech vrcholů jsou sudé s jedinou možnou výjimkou dvou vrcholů.



(Dk) Je-li graf Eulerův, existuje tah $v_1 e_1 \dots v_{n-1} e_{n-1}, v_n$ obsahující všechny hrany.
Když $v_1 = v_n$, pak stupeň každého vrcholu je sudý (= min. do něj jednou hranou přijdeme a druhou vyjdeme).
Když se $v_1 \neq v_n$, pak v_1 a v_n jsou jediné vrcholy s lichým stupněm (= min. z v_1 vyjdeme a do v_n dojdeme; oběma vrcholy ale můžeme v průběhu cesty procházet).

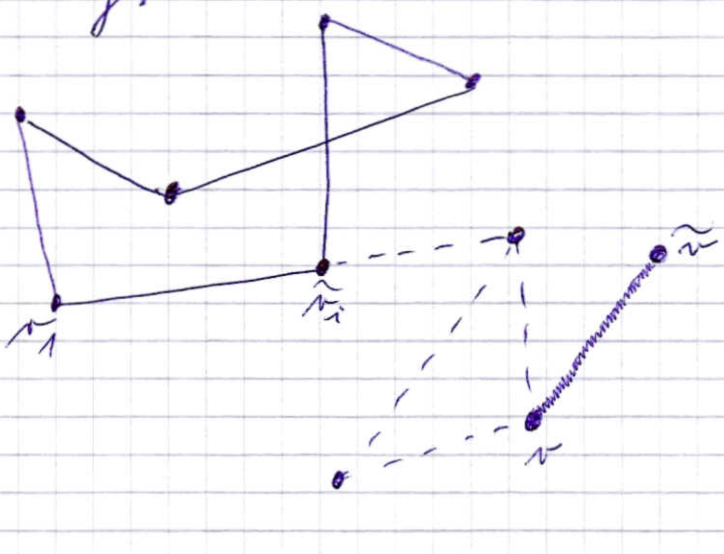
GRAFY

Předpokládejme, že všechny v mají stupně sudé. Zvolíme vrchol v_1 a k němu postoupíme do dalšího, po nové hraně do dalšího, ... dokud to lze. Tzn. skončíme ve ~~v~~ vrcholu v_1. Jestliže zbyl nějaký vrchol mimo vytvořený tah, lze ho spojit cestou s vrcholem v_1. Tato cesta opustí již vytvořený tah ve ~~v~~ vrcholu $\tilde{v}_i$.



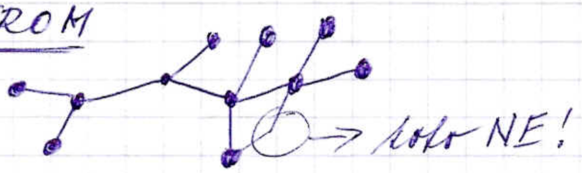
Nově vytvořený tah končí ve $\tilde{v}_i$ a připojíme (~~ho~~) ho k původnímu tahu.

Toto aplikujeme, dokud nemáme v tahu všechny hrany.



GRAFY

Def Souvislý graf neobsahující uzavřenou cestu (= kružnice) se nazývá STROM



V Mějme strom s alespoň dvěma vrcholy =  Pak existují dva vrcholy se stupněm I.

Dk Zvolme si cestu $v_1 e_1, \dots v_{n-1} e_{n-1}, v_n$ s největší délkou.
Kdyby stupeň vrcholu $d_{(v_1)} \geq 2$, pak existuje e mimo cestu, která vede do ~~v~~ vrcholu v.

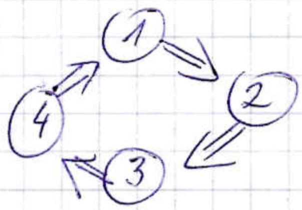
Když v není „na cestě", pak cesta v, e, $v_1 e_1 \dots$ je delší = SPOR.
Když v leží „na cestě", pak vznikne kružnice = SPOR.
Z toho plyne, že k v_1 vede pouze hrana e_1 a tedy $d_{(v_1)} = 1$.
Stejně tak i pro v_n.

GRAFY

(V) Mějme graf $G = (V, E)$. Pak následující je ekvivalentní

1) G je strom
2) G je souvislý a $|E| = |V| - 1$
3) G je souvislý a vynecháním jakékoli hrany se stane nesouvislým
4) pro každé dva vrcholy $v_1, v_2 \in V$ existuje jediná cesta, která je spojuje

Dk



$\Rightarrow$ tvrzení jsou ekvivalentní

1 $\Rightarrow$ 2 pomocí indukce přes počet vrcholů

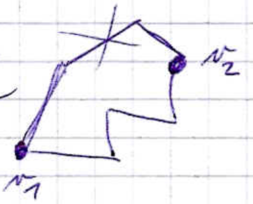
a) ~~n~~ $n = 1$ platí

b) mějme strom s $n+1$ vrcholy. Podle předchozí věty existuje vrchol v, kde $d(v) = 1$. Odebráním vrcholu v a hrany e vznikne strom o n vrcholech a o něm víme, že $|E| = |V| - 1$. To samé tedy musí platit i pro původní graf.

GRAFY

(2) ⟹ (3) je-li graf souvislý,
pak počet hran je alespoň
$|E| \geq |V| - 1$.
Kdyby po vypuštění jedné
hrany byl graf stále souvislý
$|E| - 1 \geq |V| - 1$, tj. $|E| \geq |V|$
protože také platí $|E| = |V| - 1$ = SPOR
⟹ graf se stane nesouvislým
po vypuštění jedné hrany.

(3) ⟹ (4)
Kdyby existovaly 2 cesty, které by
spojovaly 2 vrcholy v_1 a v_2, tak
vznikne z cest kružnice.
Vynecháním hrany na
kružnici zůstane G souvislý.



(4) ⟹ (1)
Kdyby G nebyl strom, pak obsahuje
kružnici. Tím se dostaneme
do sporu se (4).

GRAFY

Def Mějme graf $G = (V, E)$.
PODGRAF $K \subset G$ takový, že
- je to strom a
- obsahuje všechny vrcholy z V

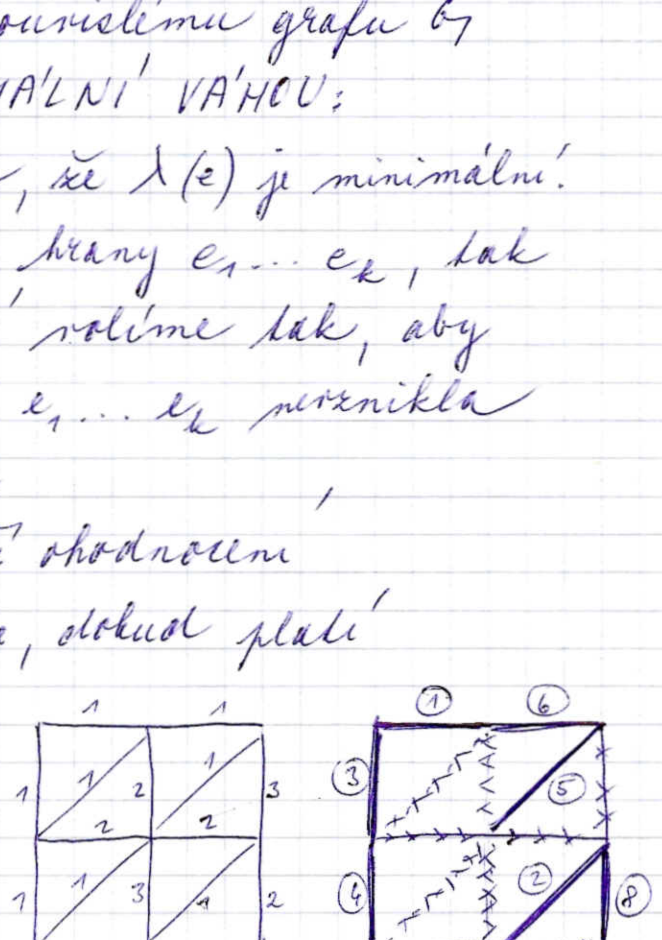
se nazývá KOSTRA GRAFU G.

Graf G JE OHODNOCENÝ, jestliže existuje funkce $\lambda : E \to R$ = každé hraně lze přiřadit R
a VÁHA G je číslo
$$W(G) = \sum_{e \in E} \lambda(e)$$ = součet ohodnocení všech hran

ALGORITMUS hledající k danému ohodnocenému souvislému grafu G KOSTRU S MINIMÁLNÍ VÁHOU:

1) zvolíme hranu, že $\lambda(e)$ je minimální
2) jsou-li vybrány hrany $e_1 \dots e_k$, tak tu následující volíme tak, aby
   a) přidáním k $e_1 \dots e_k$ nevznikla kružnice a
   b) má nejnižší ohodnocení

Bod 2) se opakuje, dokud platí podm. a) a b).



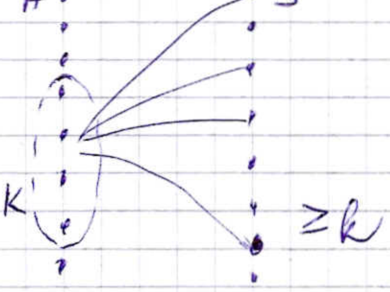
$$W(K) = 9 \quad (7 \cdot 1 + 1 \cdot 2)$$

GRAFY

Def Graf $G = (V, E)$ se nazývá **BIPARTITNÍ**, jestliže množina všech vrcholů V je rozložena na disjunktní části A a B a každá hrana vede z vrcholu A do vrcholu B.
Párování je podmnožina $F \subset E$ taková, že žádné dvě hrany v F nemají společný vrchol.
Úplné párování z množ. A do B je takové párování, že z každého vrcholu množ. A vede nějaká hrana z F.

V Mějme BIPARTITNÍ graf, $V = A \cup B$. Pak existuje úplné párování z množ. A do B právě, když
(*) každá podmnož. $A_0 \subset A$ je spojena s alespoň tolika vrcholy v B, kolik má prvků množ. A_0.

Dk Ověříme, že platí (*):



%.

<u>Důsledek</u>: máme-li bipartitní graf, $V = A \cup B$, a stupeň každého vrcholu je $d \geq 1$, pak $|A| = |B|$ a existuje úplné párování z A do B.

Dk Ověříme, že platí (*):
z množ. "k" vrcholů v A vede k.d hran do vrcholů B.
Kdyby k.d hran končilo v méně než „k" vrcholech, musel by mít nějaký vrchol vyšší stupeň než „d" = SPOR.
Podle věty existuje úplné párování z A do B. Tím $|A| \leq |B|$.
Ze symetrie dostaneme, že i $|A| \geq |B|$ a tedy $|A| = |B|$.