MLO

Ing. Tišer

Základy teorie množin

označení

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ = množina přiroz. čísel

$\mathbb{Z}$ = celá čísla

$\mathbb{R}$ = reálná č.

$\emptyset$ = prázdná množina

$\{x \in A,\ x \text{ má vlastnost} \dots\}$ = vlastnost prvků

$A \subset B$ podmnožina

každá množina je svojí vlastní podmnožinou

$A \subsetneq B$ = vlastní podmnožina

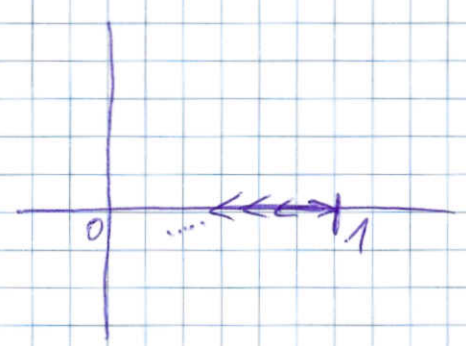
(A je podmnož. B, ale není rovna B)

sjednocení:

$A_1 \cup A_2 \cup \dots A_m = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$ event. $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \dots$

Př.: $\bigcup_{k=1}^{\infty} \langle -k, k \rangle = \mathbb{R}$

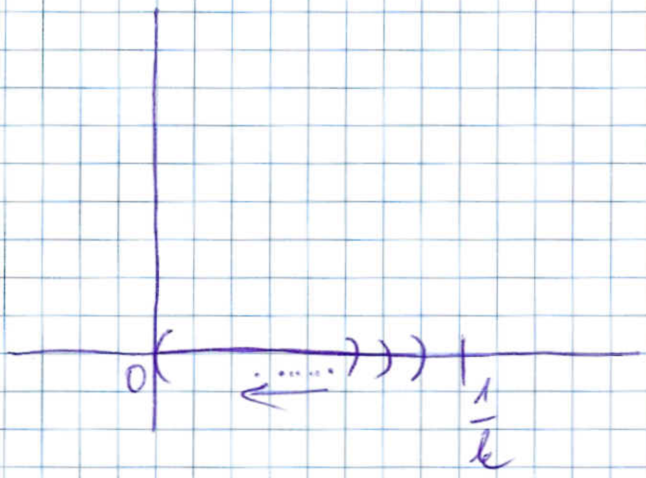
$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\langle \frac{1}{k}, 1 \right\rangle = (0, 1\rangle$



průnik:

$$A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k, \text{ event. } \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \ldots$$

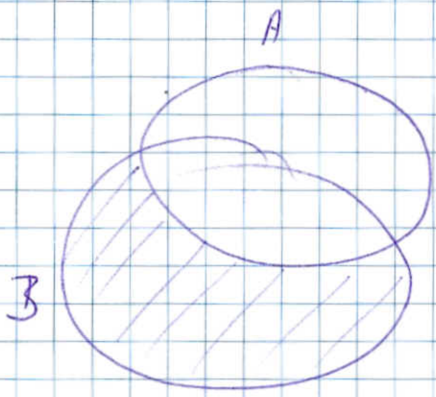
Př. $\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{k}\right) = \emptyset$



rozdíl:

$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

minus



operace
- průnik
- rozdíl
- sjednocení

+ de Morganova pravidla

Věta

de Morganova pravidla

Mějme množiny $B, A_1, A_2, \dots$

1) $B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (B \setminus A_i)$

2) $B \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B \setminus A_i)$

Dk ~~$x \in B$~~

1) $x \in B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \iff x \in B$ a $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$\iff x \in B$, ~~a~~ $x \notin A_i$ pro všechna i

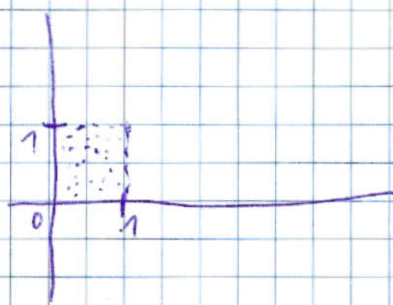
$\iff x \in B \setminus A_i$ pro všechna i

$\iff x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} (B \setminus A_i)$

2) analogicky

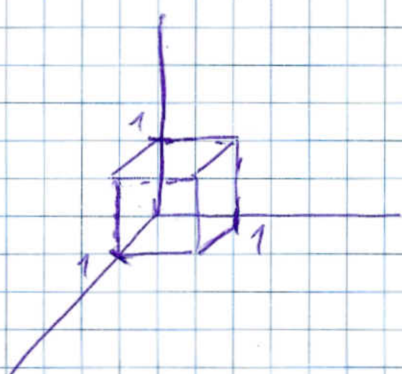
Př

$\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \overset{\text{zkrácení}}{=} \langle 0,1\rangle^2$



množina všech bodů čtverce

$\langle 0,1\rangle^3$ = ~~jedno~~ krychle (tzv. jednotková)



množina všech bodů krychle

$\langle 0,1\rangle^4$ = čtyřrozměrná krychle

~~W~~ kartéz. součin všech množin

$$\prod_{i=1}^{m} A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m =$$
$$= \{(a_1, \dots, a_m) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_m \in A_m\}$$

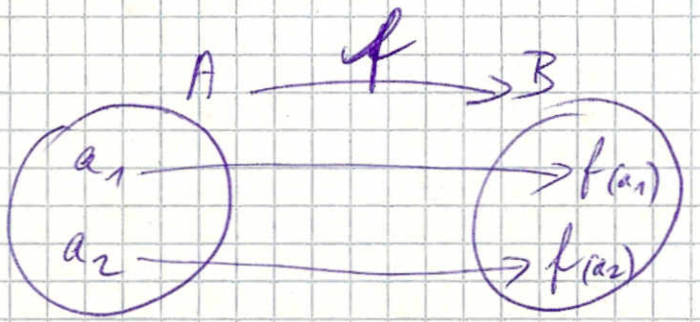
nekonečný kart. součin množin

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \{(a_1, a_2 \dots a_m) \mid a_i \in A, i \in \mathbb{N}\}$$

jsou-li $A_i = A$, pak $\prod_{i=1}^{\infty} A_i = A^{\mathbb{N}}$
(tj. všechny množiny jsou stejné)

$\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ = všechny posloupnosti 0-1 (nula, jedna)

Def Zobrazení $f: A \to B$ se nazývá **bijekce**, je-li prosté (tj. $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$) a je-li obor hodnot roven množině B.



Je-li f bijekce, pak i inverzní zobrazení f^{-1} je bijekce.

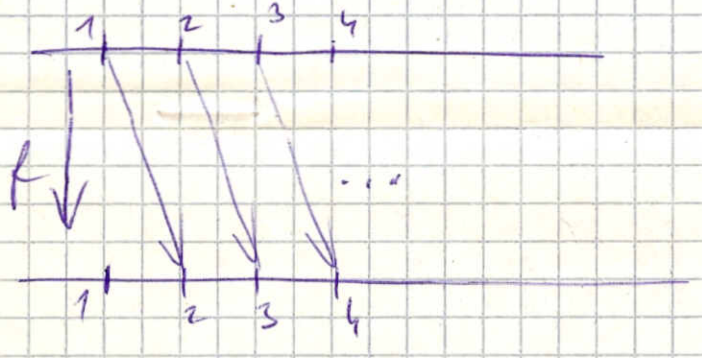
Vlastnosti nekonečných množin

Def ~~to~~ nekonečné množiny

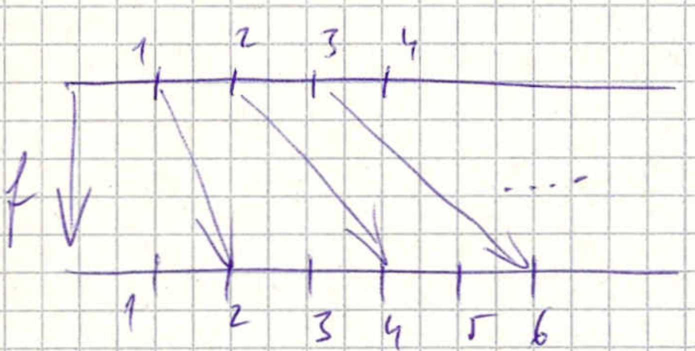
Množina A je nekonečná, jestliže existuje bijekce množiny A na svoji vlastní podmnožinu.

~~A~~

Př $\mathbb{N}$ je nekonečná neboť $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n+1$ je bijekce na $\{2, 3, \dots\} \subsetneq \mathbb{N}$



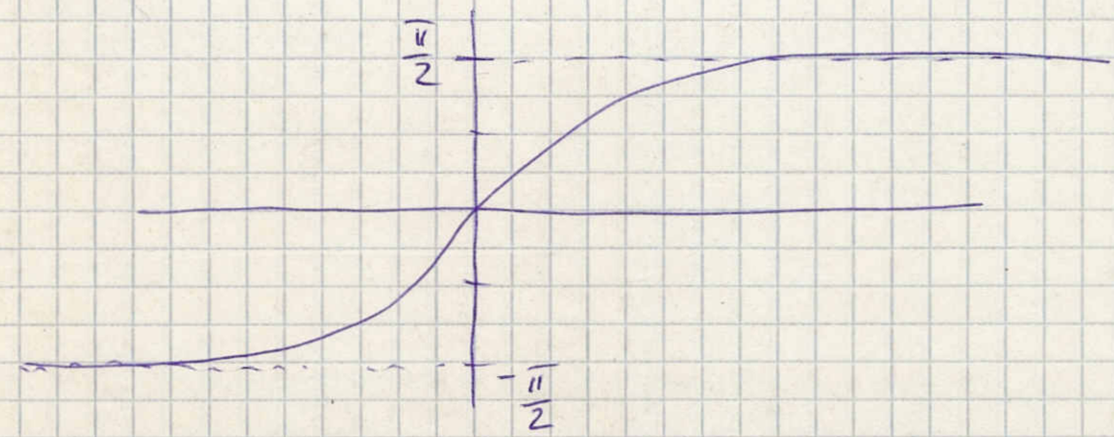
nebo např. $f(n) = 2n$



Př $\mathbb{R}$ je nekonečná, neboť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$

je bijekce $\mathbb{R}$ na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Def množiny A a B mají stejnou mohutnost, jestliže existuje bijekce množiny A na množinu B

Značení $|A| = |B|$

Množina A je spočetná, jestliže její $|A| = |\mathbb{N}|$

Př $\mathbb{Z}$ je spočetná, neboť existuje bijekce
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbb{Z} = \{ & 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & \ldots & ? \} \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n \end{array}$$

$f(n) = (-1)^n \cdot \left[\frac{n}{2}\right]$ = bijekce $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \Rightarrow |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$

$[x]$ = celá část čísla x $\left([1{,}3] = 1\right)$

<u>Kritérium</u> pro spočetnost

A je spočetná $\Leftrightarrow$ všechny prvky množiny A lze seřadit do prosté posloupnosti

Věta Máme-li ~~si~~ ∞ ~~množ~~ M, pak ~~často~~ obsahuje spočetnou podM

spočetná podM = jsou ty nejmenší ~~z~~ ∞ M

Dk

A je $\infty \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} A \neq \emptyset$ a $\exists\, a_1 \in A$. ~~Množ. $A \setminus \{a_1\}$~~

prvek, který si můžeme zvolit

Množ $A \setminus \{a_1\}$ je neprázdná, $\exists\, a_2 \in A \setminus \{a_1\}$

Podobně $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$, $\exists\, a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\} \dots$

Tím vytvoříme ∞ posloupnost.

$\underbrace{\{a_1, a_2 \dots\}}_{\text{spočetná podM}} \subset A$

MLO 24.2.2010

$f: A \to B$ bijekce – prosté zobrazení
- obor hodnot = B

$\downarrow$

$|A| = |B|$ = mají stejnou mohutnost

$|A| = |N|$ = spočetné M, mají stejný počet jako M přiroz. čísel

spočetné M = nejmenší nekonečné M

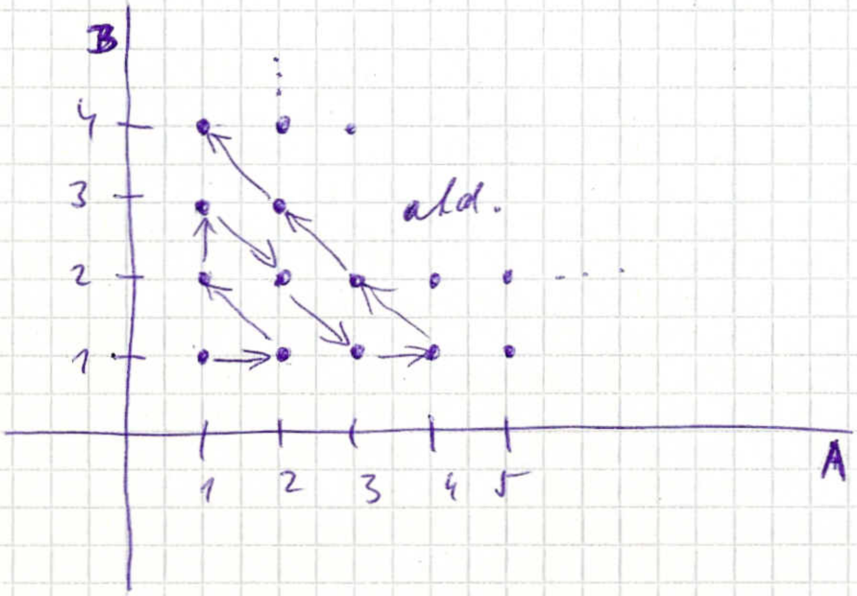
~~Př~~ = taková M, jejíž prvky umíme seřadit do posloupnosti

Př

$\mathbb{Z}$ ~~Množ. čí~~ = M celých čísel

lze seřadit do posloupn. $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$

~~Př~~ Př : $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$



šipky ukazují posloupnost záznamu všech bodů $\Rightarrow$ množina je spočetná

V Podle kritéria pro spočetnost je M $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ spočetná.

V Jsou-li A, B spočetné M, pak i M všech dvojic $\left(= \underbrace{A \times B}_{\text{kartéz. součin}}\right)$ je spočetná,

$|A \times B| = |\mathbb{N}|$.

Jsou-li M $A_1, A_2, \ldots$ spočetné, pak i

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ je spočetné.

(= každý řádek „sítě bodů" je spočetný a jejich $\cup$ je rovněž spočetná M)

(V) 1) mějme spočetnou M = A. Pak

A^k je spočetná pro každé $k = 1, 2, 3, \ldots$

2) Konečných podmnožin spočetné M je jen spočetně mnoho.

Dk 1) Dk matematickou indukcí

indukce podle „k": ① $k = 1$: A^1 je spočetná
(k = přirozené číslo) ② najít platný algoritmus pro všechna „k"

předpoklad, že A^k je spočetná

$$A^{k+1} = A^k \times A$$

spočetná M ~~mno~~ spočetná M

podle (V) ~~je i~~ o kartézském součinu spočetných M je i $A^k \times A$ spočetná

2) Konečná podM o „k"-prvcích je k-tice prvků ⇒ všechny konečné podM tvoří

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A^k \quad \left(= \text{sjednocení všech konečných podM}\right)$$

Protože A^k je spočetná podle **1)**, z ~~odp.~~ (V) o sjednocení vyplývá, že

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A^k$ je opět spočetná.

(Př) racionální čísla $= \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

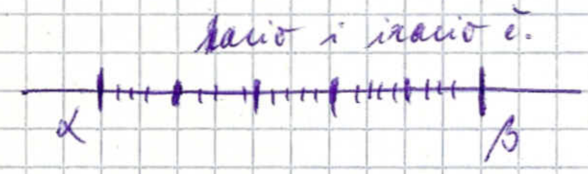
$A_1 = \left\{ -\frac{2}{1}; -\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \dots \right\}$

$A_2 = \left\{ -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \dots \right\}$

⋮ atd.

Racionální čísla $= \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ → je spočetná

$\underbrace{\left(|A_i| = |\mathbb{N}| \right)}_{\Downarrow}$



v každém intervalu $\alpha - \beta$ najdeme rac. i irac. čísla

Př interval $(0,1)$ není spočetná M

~~Dle sporem~~ postup sporem

Kdyby $(0,1)$ byla spočetná, tak podle kritéria spočetnosti lze všechna čísla z $(0,1)$ vypsat do posloupnosti.

$a = 0.a_1 a_2 a_3 \ldots,$ = desetinný rozvoj

$b = 0.b_1 b_2 b_3 \ldots$

$c = 0.c_1 c_2 c_3 \ldots$

$\vdots$

vytvoříme číslo, které tam chybí

$$\alpha = 0.\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \neq a_1 \\ \alpha_2 \neq a_2 \\ \alpha_3 \neq a_3 \end{array}\right\}$$

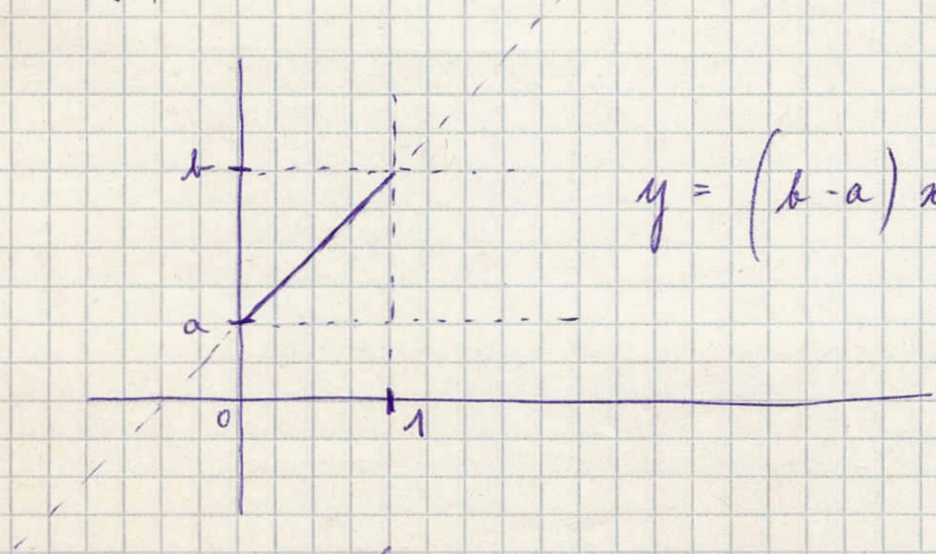
toto číslo je z $(0,1)$, ale ~~není~~ neodpovídá číslu v seznamu, protože $\alpha_1 \neq a_1$, $\alpha_2 \neq a_2 \ldots$

TOTO JE SPOR

protože nebyla všechna čísla na seznamu

$\alpha \neq a$, $\alpha \neq b$, $\alpha \neq c$ ... a tedy číslo α není na seznamu $\Rightarrow$ SPOR

$$|(0,1)| = |(a,b)|.$$



$$y = (b-a)x + a$$

Protože (α, β) není spočetná M a M racionálních čísel je spočetná, musí v (α, β) být i jiná než rac. čísla

= iracion. čísla

(V) M všech podM $\mathbb{N}$ není spočetná.

(Dk) Kdyby M všech podM byla spočetná, podle kritéria spočetnosti ji lze zapsat $\{A_1, A_2, A_3 \dots\}$.

Sestrojíme M = S takto:

je-li $1 \notin A_1$, pak 1 dáme do S

je-li $2 \notin A_2$, pak 2 dáme do S

$\vdots$

$$\Rightarrow S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\}$$

Pak existuje index m, že $S = A_m$.

$m \overset{?}{\in} S$

Kdyby $m \in S$, pak $m \notin A_m = S$ = SPOR

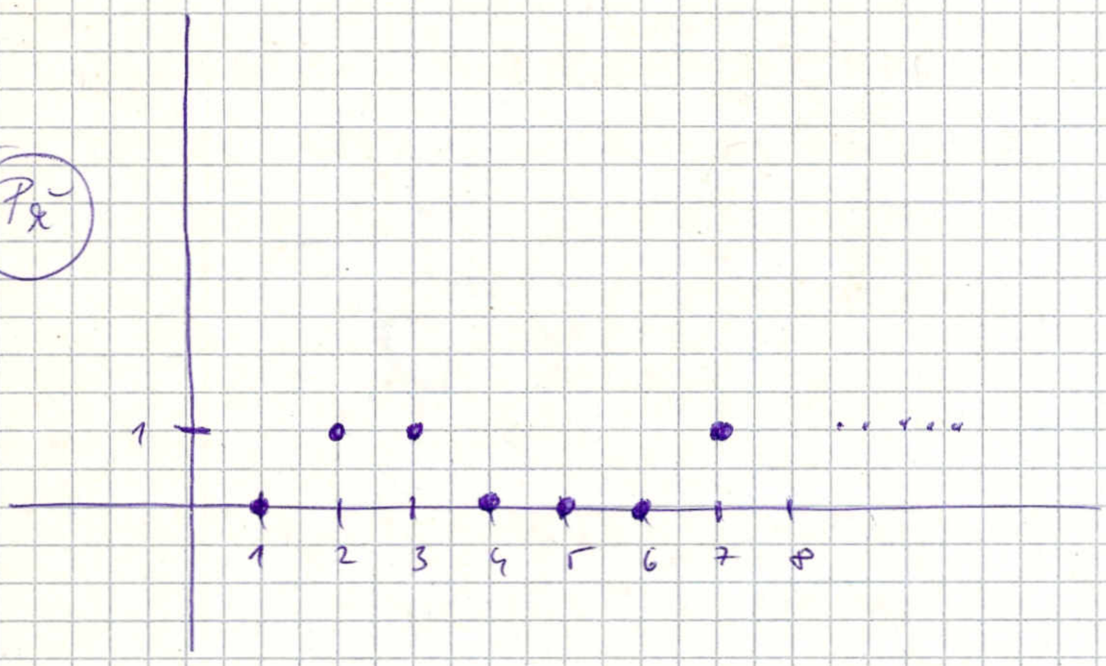
Kdyby $m \notin S = A_m$, pak $m \in S$ = SPOR

$\Rightarrow$ Dk pro (V)

$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ = {posloupnosti ~~z 0 a 1~~ všech 0 a 1}

kartézský součin (všech) posloupností 0,1

Př



Bijekce $f: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{\text{podMy } \mathbb{N}\}$

$(a_n) \to \{n \mid a_n = 1\}$

$(a_n \in \{0,1\})$

je prosté a obor hodnot „f" je celá $\{\text{podM } \mathbb{N}\}$.

$\Rightarrow \quad |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\{\text{podM } \mathbb{N}\}|$

$|\overset{\text{interval}}{(0,1)}| = |\overset{\text{množina}}{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}| = |\{\text{podM } \mathbb{N}\}|$

mají stejně bodů