MLO

Základní kombinatorické pojmy

Př: Kolika způsoby lze n lidí postavit do řady, aby dva z nich, osoby A a B, nestály vedle sebe?

Kolik je způsobů rozesazení kolem kulatého stolu?

- kolika způsoby lze n lidí postavit do řady?

$$N = n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1 = n!$$

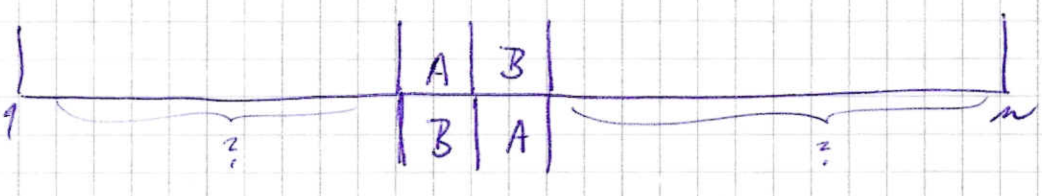
$n!$ = faktoriál = počet uspořádání n objektů do řady

$$\boxed{0! = 1}$$

- kolika ..., aby os. A a B nestály vedle sebe?

důkaz sporem ⇒ kolik je možností, aby stály vedle sebe

počet uspořádání, kde A a B jsou vedle sebe



$$N = 2\cdot(n-1)\cdot(n-2)! = 2(n-1)!$$

možnosti A,B nebo B,A

poloha bloku A,B v řadě

zaplnění zbylých míst

Počet uspořádání, že A,B nejsou vedle sebe

$$= n! - 2(n-1)! = n(n-1)! - 2(n-1)! = (n-2)(n-1)!$$

dostačující ⟷ pouze úpravy

Základní pravidlo:

počet uspořádaných k-tic takových, že ~~ne~~

na 1. místo máme n_1 možností

na 2. místo -"- n_2 -"-

⋮

na k-té -"- n_k -"-

počet je roven ~~násob~~ násobku $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$

Př Kolik je přirozených čísel mezi 10^6 a 10^7 takových, v jejichž zápise se neopakují číslice?

čísla budou 7mi ciferná = 10^6

možnosti $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ => $N = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

nelze 0

nelze čísla z n_1 a z n_2

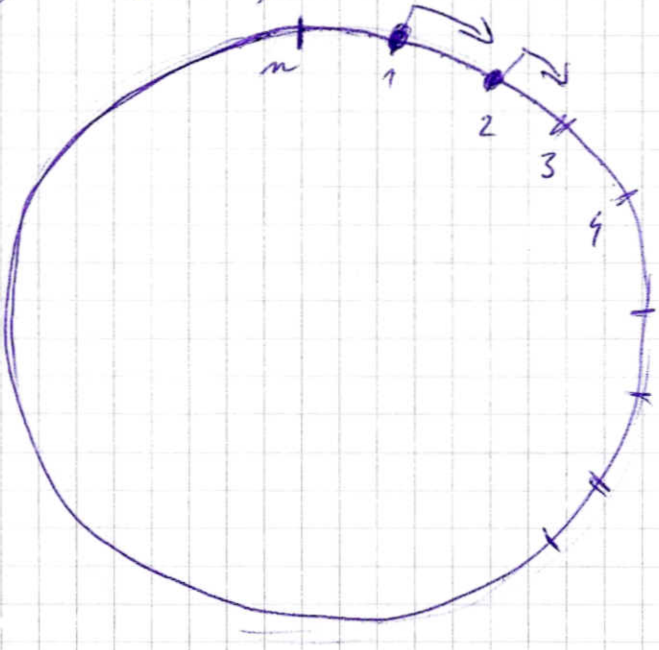
nelze číslo z n_1

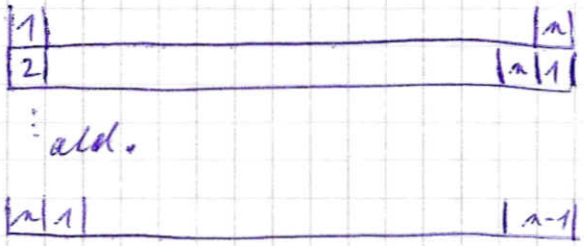
Př Kolik je takových, že 2 stejné číslice nejsou vedle sebe?

$N = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \ldots = 9^7$

~~1 0~~
~~2 1~~
~~3 2~~
~~4 3~~
~~5 4~~
~~6 5~~
~~7 6~~
~~8 7~~
~~9 8~~
9

A kolik ..., ~~aby A, B neseděly vedle sebe~~
u kulatého stolu





dostaneme
n různých řad
které dávají stejné
uspořádání kolem
kulatého stolu

Počet uspořádání řady je n-krát větší než
počet rozesazení u kulatého stolu, tj:

$$N = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

B kolik je způsobů ...., aby A a B neseděly
vedle sebe

- kolik je způsobů, kdy A, B sedí vedle sebe

$$2 \cdot (n-2)!$$

A, B nebo B, A → zaplnění n-2 židlí zbylými lidmi

Závěr (A, B nesedí vedle sebe):

$$(n-1)! - 2(n-2)! = (n-2)!\,[n-1-2] = \underline{\underline{(n-2)! \cdot (n-3)}}$$

Kolik k-prvkových podmnožin má n-prvková množina?

1. krok: počet uspořádaných k-tic:

$$n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)) =$$
$$= n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

2. krok: každou k-prvkovou podmnožinu můžeme uspořádat k! způsoby

3. krok: počet k-prvkových podmn.

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

kombinační číslo „n nad k“

~~jiný zápis~~ $\cancel{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Binomická věta:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots \binom{n}{n} a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Počet všech podmnož. n prvkové množiny =

$$= \underset{=1}{\binom{n}{0}} + \underset{=n}{\binom{n}{1}} + \binom{n}{2} + \dots \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k$$

$$= (1+1)^n = 2^n$$

$$0 = (1-1)^n \underset{\text{rozvoj dle binomické věty}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot (-1)^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots$$

převedeme záporné členy na L stranu rovnice

$$\underbrace{\sum_{k=\text{liché}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=\text{sudé}}^{n} \binom{n}{k}}$$

tj. počet podmn. s lichým počtem prvků je stejný jako podmn. se sudým počtem prvků

Věta: Počet nezáporných celočíselných řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \dots x_k = n$$

je $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Dk: Zavedeme si nové proměnné

$$y_1 = 1 + x_1$$
$$y_2 = 2 + x_1 + x_2$$
$$y_3 = 3 + x_1 + x_2 + x_3$$
$$\vdots$$
$$y_k = k + x_1 + x_2 + \dots x_k = k + n$$

$$1 \le y_1 < y_2 < y_3 < \dots < \underbrace{y_{k-1} < y_k \cancel{(=n+k)}}_{\le n+k-1}$$
$$< n+k$$

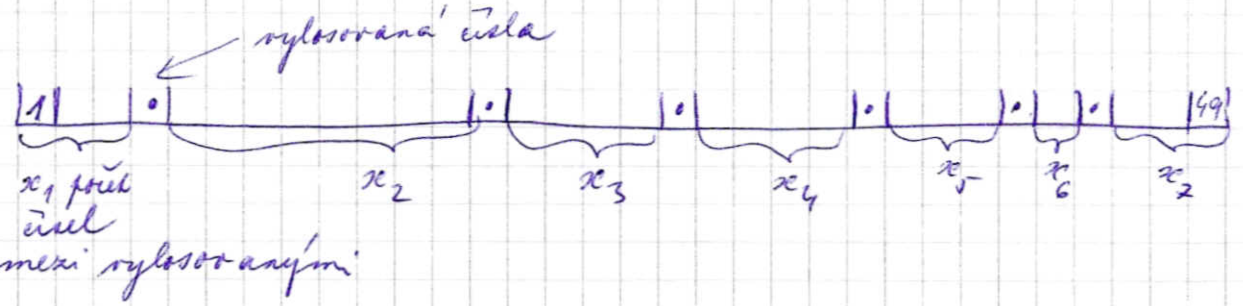
Počet řešení je stejný jako počet výběrů čísel $y_1, \dots y_{k-1}$ s podm. viz výše a to ~~...~~ $\binom{n+k-1}{k-1}$

Př:

Sportka: 6 čísel ze 49.

Všech výsledků je $\binom{49}{6} = 13{,}983.816$

Kolik je šestic, kde nestojí žádná 2 čísla vedle sebe?



$$x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 49 - 6 = 43$$

Zavedeme si
$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_2 - 1$$
$$y_3 = x_3 - 1$$
$$\vdots$$
$$\cancel{y_7 = x_7}$$
$$y_6 = x_6 - 1$$
$$y_7 = x_7$$

Pak $y_1 + y_2 + \dots + y_7 = x_1 + \dots x_7 - 5 = 43 - 5 = 38$

Počet řešení je $\binom{38+7-1}{7-1} = 7{,}059.052$

Porovnání pravděpodobnosti