MLO

Př) máme „n" párů bot. Vybereme z nich „2 k" bot

a) kolik je možností, aby ve výběru nebyl žádný pár?

$\underset{1}{\sqcup} \; \sqcup \; \sqcup \; \sqcup \; \dots \; \underset{n}{\sqcup}$ ← n krabic s páry bot

můžeme vybrat z $\binom{n}{2k}$ krabic

$$\binom{n}{2k} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \dots 2}_{2k} = \binom{n}{2k} 2^{2k}$$

2k → vybrané krabice

~~možnost~~ počet výběrů z každé krabice

Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném výběru 2 k bot nedostaneme žádný pár?

$$P = \frac{\binom{n}{2k} 2^{2k}}{\binom{2n}{2k}}$$

čitatel = příznivé možnosti, tj. nedostaneme žádný pár

jmenovatel = počet všech možných výběrů

b) Kolik je možností, kde bude alespoň jeden pár?

Protože b) je doplněk a), dostaneme

$$\binom{2n}{2k} - \binom{n}{2k} 2^{2k}$$

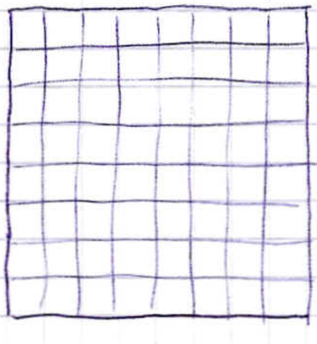
c) Kolik je výběrů, kde bude přesně jeden pár?

$$n \binom{n-1}{2k-2} 2^{2k-2}$$

výběr jednoho páru

případ a) pro $(n-1)$ a $(k-1)$

Př a) ~~máme ?~~ Kolika způsoby lze rozmístit 8 (stejných) věží na šachovnici (8×8 polí) tak, aby se neohrožovaly?



8 na každém řádku může být jen 1 věž

7

6 možností

⋮

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1 = 8!$$

b) … věže jsou navzájem různé …?

pokud máme ~~8! uspořádání~~ jedno uspořádání ($= 8!$), můžeme ho $8!$ modifikovat

$$8! \cdot 8!$$

c) ... 4 bílé a 4 černé růže tak aby bílá a černá nebyly vedle sebe ...?

$$\frac{8! \cdot 8!}{4! \cdot 4!}$$

promíchání bílých

promíchání černých

Princip inkluze a exkluze

Př V osadě je 24 🧍 a každý je členem nějakého z následujících spolků:

T = tenisový = 10 členů
F = filatelistický = 7 členů
Š = šachový = 7 členů
D = divadelní = ?

Žádný T nehraje šachy ani nesbírá známky.
Nikdo není členem 3 spolků.
8 🧍 je členy 2 spolků. ./.

Kolik má divadelní spolek členů?

V: Mějme konečné množiny $A_1, A_2, \dots A_n$
Počet prvků jejich sjednocení

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_i \cap \dots A_n|$$

$|T| = 10$

$|F| = 7$

$|Š| = 7$

$|D| = ?$

nikdo není členem 3 spolků $\Rightarrow$ $\cap$ 3 množin $= 0$

$|T \cup F \cup Š \cup D| = 24$

$$24 = 10 + 7 + 7 + |D| - \underbrace{|T \cap F|}_{=0} - \underbrace{|T \cap Š|}_{=0} - \underbrace{|T \cap D| - |F \cap Š| - |F \cap D| - |Š \cap D|}_{-8}$$

nikdo není současně T a F nebo T a Š

8 je členem 2 spolků

$\underline{\underline{|D| = 8}}$

Grafy

Př Na party je 31 účastníků.
Pak tam existuje člověk, který si podal ruku se sudým počtem lidí.

Silnější verze: na party je lichý počet účastníků.
Pak existuje ✱ jako výše.

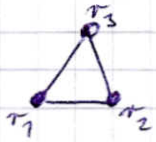
Def Graf $G = \underbrace{(V, E)}_{\text{množiny}}$ je dvojice, kde

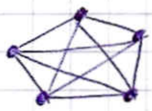
V je neprázdná množina (tzv. vrcholy grafu)

$\underbrace{E \subset \{ \{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V \}}_{\text{prostě je to spojnice 2 vrcholů}}$ (tzv. hrany)

Úplný graf ~~je takový~~ K_n je takový, kde

$E = \{ \{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V \}$

Př K_3 = 

K_5 = 

Stupeň vrcholu v je $d_{(v)}$ = ~~velikost množiny hran~~ ~~tak~~ počet hran příslušných vrcholu v

$d_{(v)} = |\{ e \in E \mid v \in e \}|$

Věta: Mějme graf $G = (V, E)$.
Je-li $|V| = n$ (= počet vrcholů je „n"), pak
$|E| \leq \binom{n}{2}$.

Dále $\sum_{v \in V} d_{(v)} = 2|E|$

Dk: první tvrzení je triviální

druhé tvrzení je také triviální

Z druhého tvrzení vyplývá, že speciálně počet vrcholů ~~speciálně~~ s lichým stupněm je sudý

$$\sum d_{(v)} = 2|E|$$

Máme-li lichý počet vrcholů, pak musí být v grafu lichý počet vrcholů se sudým stupněm.