Výroky

Výrokový počet

Výrok = tvrzení, u kterého zjišťujeme pravdivost nebo nepravdivost. Nemůže platit současně.

„Def" Výrok je tvrzení, o kterém lze k principu rozhodnout je-li pravdivý či nikoli. Požadujeme, aby:
1) výrok je buď pravdivý nebo nepravdivý, třetí možnost není.
2) výrok nemůže být současně pravdivý i nepravdivý.

Formální definice:

Abeceda je množina následujících symbolů:

logické spojky

(,)	závorky
$\neg$	negace, reprezentuje zápor
$\wedge$	konjunkce, reprezentuje „a"
$\vee$	disjunkce, — " — „nebo"
$\Rightarrow$	implikace, — " — „je-li ..., pak"
$\Leftrightarrow$	ekvivalence — " — „právě, když"
$P, Q, R_1, R_2 \dots$	logické proměnné

Déf

Formule je konečná posloupnost znaků abecedy vytvořená následující indukční konstrukcí:

1) logické proměnné jsou formule.
2) jsou-li φ a ψ formule, pak i $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$ a $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ jsou formule.

P, Q, R

$(\neg P) \quad (R \Leftrightarrow Q)$

$(P \wedge (R \Leftrightarrow Q))$ .... atd. lze sestavovat složitější a složitější formule

Někdy lze závorky vynechat:

$(((P \vee Q) \vee R) \vee R)$ ..... $P \vee Q \vee R \vee R$

1) vnější závorky vypustíme (resp. můžeme vypustit)
2) nejsilnější preferenci má $\neg$, pak $\wedge, \vee$ a naposledy $\Rightarrow, \Leftrightarrow$.

$\neg P \wedge Q \Rightarrow R$ ..... $(((\neg P) \wedge Q) \Rightarrow R)$

Pravdivostní ohodnocení

symbol 1 = pravdivost

0 = nepravdivost

řecké písmeno „ný" ν

Pravdivostní ohodnocení je zobrazení ν z množiny všech formulí do dvouprvkové množiny $\{0,1\}$ takové, že

	fí φ	ψ	„AND" $\varphi \wedge \psi$	„OR" $\varphi \vee \psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$	$\neg \varphi$
	0	0	0	0	1	1	1
	0	1	0	1	1	0	1
ν	1	0	0	1	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	0

PŘ

$$\underbrace{\underbrace{(\overset{0}{P} \Rightarrow \overset{1}{Q})}_{1} \Leftrightarrow \underbrace{(\underbrace{\overset{1}{R} \wedge \overset{1}{Q}}_{1} \Rightarrow \underbrace{\neg \overset{1}{R}}_{0})}_{0}}_{0} = \varphi$$

$\nu(P) = 0$

$\nu(Q) = 1$

$\nu(R) = 1$

Závěr $\nu(\varphi) = 0$.

Booleovské funkce

Def Bool funkce je každá funkce $B : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

má n-proměnných
$x_1, \dots, x_n \in \{0,1\}$

def. obor = kartézský součin n množin = n-tice čísel

hodnota fce

Př

$B(0,0) = 1$
$B(0,1) = 0$
$B(1,0) = 0$
$B(1,1) = 0$

PŘ formule $\varphi = (P_1 \wedge \neg P_2)$
Bool funkce, která realizuje φ je definována $B_\varphi(x_1, x_2) = v(\varphi)$, když $v(P_1) = x_1$, $v(P_2) = x_2$

$B_\varphi(0,0) = 0$
$B_\varphi(0,1) = 0$
$B_\varphi(1,0) = 1$
$B_\varphi(1,1) = 0$

MLO

28. 4. 2010

$\varphi = P \Rightarrow (R \vee Q)$

$B_\varphi(x_1, x_2, x_3)$ = booleovská fce je realizovaná formulí φ.

Př. $B(0,0,0)$ = máme 3 proměnné a hledáme fci, která by jí realizovala

$B(0,0,0) = 1$
$B(0,0,1) = 0$
$B(0,1,0) = 0$
$B(0,1,1) = 1$
$B(1,0,0) = 1$
$B(1,0,1) = 0$
$B(1,1,0) = 0$
$B(1,1,1) = 0$

Jak najít formuli?

metoda A:
hodnotu 1 má

0 0 0	$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3$
0 1 1	$\neg P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
1 0 0	$P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3$

Pak formule

$$\varphi = (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3)$$

realizuje funkci B.

(spojeno disjunkcí)

Metoda B:

vypíšeme řádky s hodnotou 0

0 0 1	$\cancel{P_1 \land P_2 \land \neg P_3}$	$P_1 \lor P_2 \lor \neg P_3$
0 1 0	$\cancel{P_1 \land \neg P_2 \land P_3}$	$P_1 \lor \neg P_2 \lor P_3$
1 0 1	$\cancel{\neg P_1 \land P_2 \land \neg P_3}$	$\neg P_1 \lor P_2 \lor \neg P_3$
1 1 0	$\cancel{\neg P_1 \land \neg P_2 \land P_3}$	$\neg P_1 \lor \neg P_2 \lor P_3$
1 1 1	$\cancel{\neg P_1 \land \neg P_2 \land \neg P_3}$	$\neg P_1 \lor \neg P_2 \lor \neg P_3$

Pak formule

$$\varphi = (P_1 \lor P_2 \lor \neg P_3) \land \ldots\ldots \land (\neg P_1 \lor \neg P_2 \lor \neg P_3)$$

realizuje funkci B.

(spojeno konjunkcí)

(V) Každá booleovská ~~fukc~~ funkce je realizována nějakou formulí.

(Def) Formule φ má konjunktivní normální tvar (CNF), jestliže $\varphi = \psi_1 \land \ldots \psi_n$, kde ψ_i jsou disjunkce log. proměnných a jejich negací (Metoda B).

Formule φ má disjunktivní normální tvar (DFN), jestliže $\varphi = \psi_1 \land \ldots \psi_n$, kde ψ_i jsou konjunkce log. proměnných a jejich negací (Metoda A).

Def Mějme množinu ~~formulí M~~ formulí M a formuli φ. Řekneme, že φ je logickým důsledkem formulí z M, jestliže φ je pravdivá při každém ohodnocení, při kterém jsou pravdivé všechny formule z M.

Píšeme $\underbrace{M \models \varphi}$.

= φ je logickým důsledkem M.

Př $M = \{P, P \Rightarrow Q\}$, $\varphi = Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\Rightarrow$ implikace

$M \models \varphi$

V $M \models \varphi$ právě, když existuje pravdivostní ohodnocení, že všechny formule z ~~$M\{$~~ $M \cup \{\neg\varphi\}$ nejsou pravdivé.

Tj: $M \cup \{\neg\varphi\}$ ~~je~~ není splnitelná.

Dk

Mějme $M \models \varphi$. Uvažujme ohodnocení, kde všechny formule z M jsou pravdivé.

Pak $v(\varphi) = 1$ a tedy ~~hodnota~~ hodnota $v(\neg\varphi) = 0$ a $M \cup \{\neg\varphi\}$ není splnitelná.

„v" = hodnota

Víme, že $M \cup \{\neg\varphi\}$ není splnitelná.
Mějme ohodnocení, kde všechny formule z M jsou pravdivé.
V tomto ohodnocení musí být $v(\neg\varphi) = 0$ (tzn. není pravdivá).
Tedy $v(\varphi) = 1$.

Rezoluční metoda

Klauzule

Rezolventa

Klauzule . . . CNF $(\dots) \wedge (\dots) \dots$

Klauzule ~~daná~~ je formule daná disjunkcí proměnných nebo jejich negací.

(CNF = konjunkce klauzulí).

Rezolventa

Mějme dvě klauzule φ_1 a φ_2 takové, že ve φ_1 je proměnná P a ve φ_2 je $\neg P$.

Rezolventa klauzulí φ_1 a φ_2 (podle proměnné P) je nová klauzule $(\varphi_1 \setminus \{P\}) \vee (\varphi_2 \setminus \{\neg P\})$.

Př $\varphi_1 = P \vee Q \vee \neg R \vee S \qquad \varphi_2 = T \vee \neg Q \vee S$

lze dělat rezolventu pouze podle Q

rezolventa $= P \vee \neg R \vee S \vee T$

Př $\varphi_1 = P \qquad \varphi_2 = \neg P$

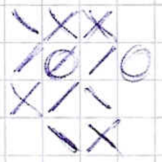
rezolventa $= \emptyset$ (prázdná množina)

Rezoluční metoda pro splnitelnost množiny M:
(má 3 kroky)

1) Mějme množinu formulí, kterou upravíme tak, že všechny formule budou v CNF (tzn. konjunkce formulí).

~~(tzn $(\varphi_1) \wedge (\varphi_2) \wedge (\varphi_3) \wedge \ldots$)~~

(tzn. $(\ldots)\cancel{\wedge}, (\ldots)\cancel{\wedge}, (\ldots)\cancel{\wedge}, \ldots$)



Dále budeme za formule ~~H~~ v M považovat všechny klauzule vyskytující se v daných formulích.

2) Vypustíme klauzule, které jsou vždy pravdivé, tzv. tautologie.

(Např. $(\underbrace{\ldots \vee \cancel{P \vee} \ldots \vee \cancel{\neg P \vee} \ldots}_{\text{za jakýchkoli hodnot budou vždy pravdivé}})$

3) Vyrábíme rezolventy, pokud to lze.

Pokud se vyskytne prázdná klauzule, pak je to ekvivalentní, že M nebyla splnitelná.

Př

$M = \{P \lor Q,\ \neg R \lor S,\ \neg Q \lor S,\ \neg Q \lor R,\ \neg S\}$

rezolventa podle	$P \lor Q$	$\neg R \lor S$	$\neg Q \lor S$	$\neg Q \lor R$	$\neg S$					
Q	1		0	0		$P \lor S$	$P \lor R$			
S		1			0	1		$\neg R$	P	
R							1	0		P
									1	1

$\Rightarrow v(P) = 1$

vždy se hodnotí JEN nehodnocené sloupce

$v(P) = 1$

$v(R) = 0$

$v(Q) = 0$

$v(S) = 0$