Relace

= abstraktní pojem

= vztah mezi dvěma objekty - buď jsou v relaci nebo nejsou.

Př $A = \{\text{města}\}$, $B = \{\text{státy}\}$

$a \in A$, $b \in B$

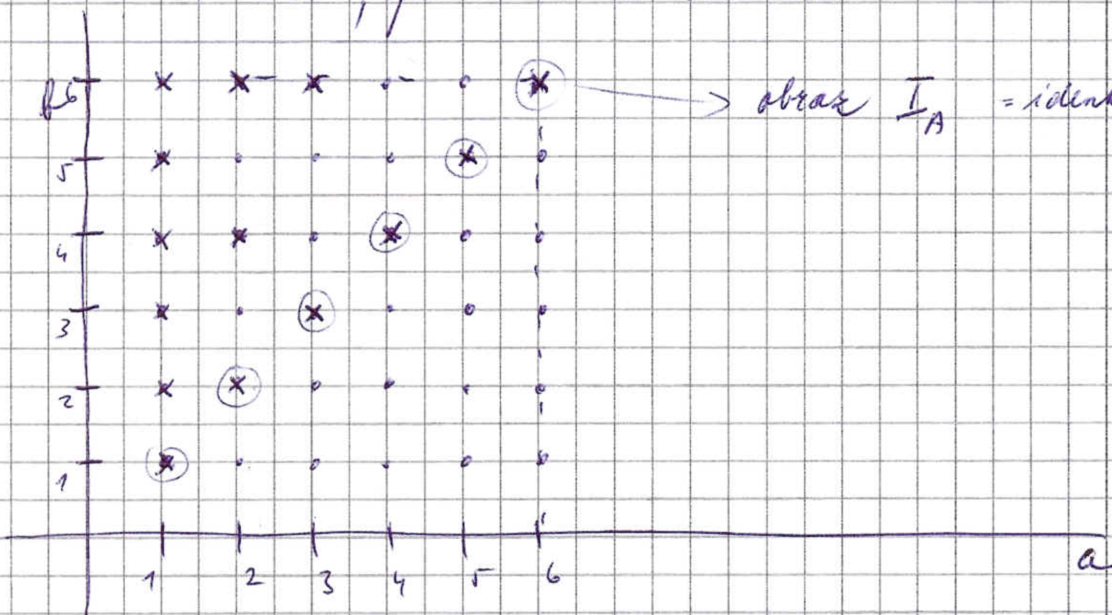
a je v relaci s b — $a R b$, $(a,b) \in R$

= a je v relaci s b jestliže „a leží v b".

Def Relace R z množiny A do množiny B je podmnožina $A \times B$ (kartézského součinu).

Př $A = B = \{1, 2, \dots, 6\}$

$a \, R \, b$, jestliže a dělí b



→ obraz I_A = identické relace

Identická relace na A: I_A

$a \, I_A \, b$ právě, když se rovnají, tzn. $a = b$

Př $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$

Kolik je relací z A do B?

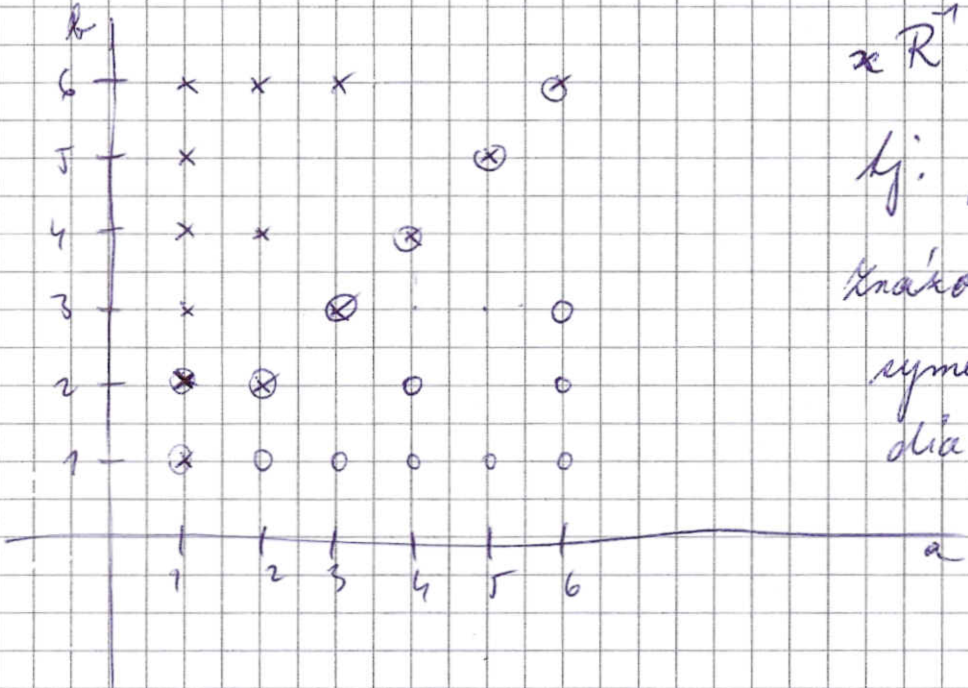
$A \times B = 12 \Rightarrow$ relací je $\underline{\underline{2^{12}}}$

podmnožin je 2^n

Relace inverzní R^{-1}

Def Máme relaci z A do B. Inverzní relace R^{-1} je relace z B do A taková, že $b R^{-1} a$ právě, když $a R b$.

Př Jaká je R^{-1} k relaci „a dělí b"?



$x R^{-1} y \overset{\text{právě tehdy když}}{\Leftrightarrow} y R x$

tj: „y dělí x"

Znázornění R^{-1} je symetrické podle diagonály.

Skládání relací $R_1 \circ R_2$

Def Mějme relace R_1 z A do B a
R_2 z B do C.

Složená relace $R_1 \circ R_2$ je definována

$a(R_1 \circ R_2)c$ = a a C budou v relaci ~~∀ existuje~~ právě, když existuje $b \in B$, že $a R_1 b$ a $b R_2 c$.

Př Relace R na $\mathbb{N}$ je daná $n R m$ právě, když $m = n^2$. Co je $R \circ R$?

$n(R \circ R)k$ jestliže existuje m, že $n R m$ a $m R k$, tj.
$\underbrace{m = n^2 \text{ a } k = m^2}$. Tedy $k = n^4$.

~~$n R m$ a $m R k$~~

$n R m \qquad m = n^2$
$m R k \qquad k = m^2$

Ekvivalence

Def Řekneme, že relace R na množině A je

1) reflexivní = pro každé $a \in A$ je aRa.
2) symetrická = je-li aRb, pak bRa.
3) tranzitivní = je-li aRb a bRc, pak aRc.

Relace splňující podmínky 1) - 3) se nazývá <u>ekvivalence</u>.

Př Relace R na reálných číslech: xRy, jestliže $x \leq y$.

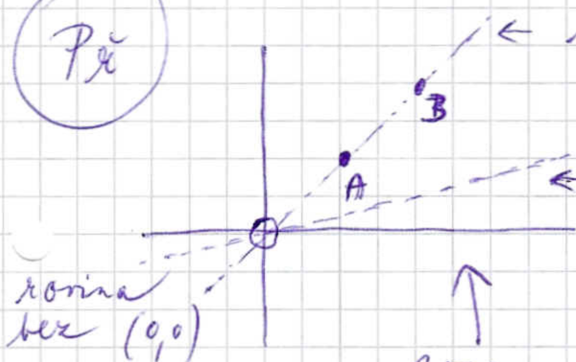
- je reflexivní
- není symetrická - neplatí $\underset{x \leq y}{aRb}$ a $\underset{y \leq x}{bRa}$ neplatí
- ~~tranziti~~ je tranzitivní
- není to ekvivalence, protože neplatí symetrie

MLO 21. 4. 2010

Ekvivalence – dokončení

Def Mějme relaci ekvivalence R (= ekvivalenci R) na množině A. Je-li ~~...~~ $a \in A$, pak $\langle a \rangle = \{ b \in A \mid aRb \}$ se tato množina ~~...~~ nazývá **třída ekvivalence**.

Př

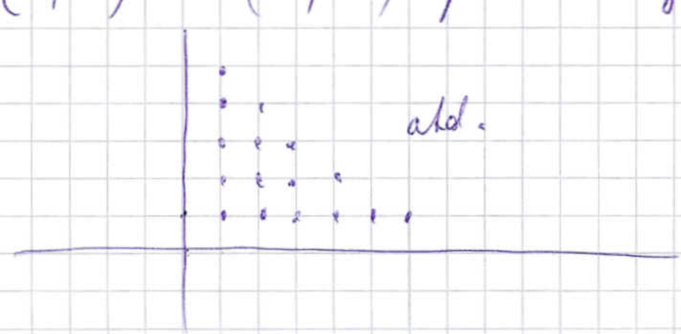


← všechny body na přímce jsou body třídy A.

← body na této přímce jsou body jiné třídy.

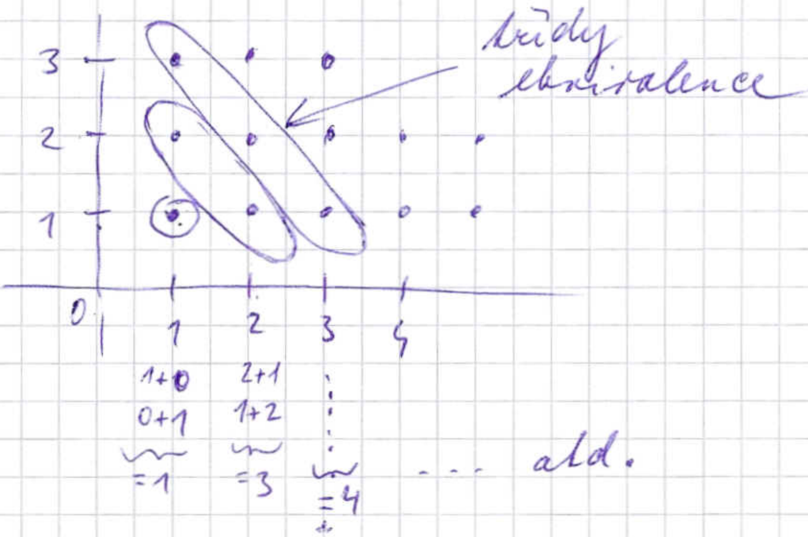
Příklad z minulé hodiny.

Př Relace R na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je dána $(a,b)\, R\, (c,d)$ právě když $a+b = c+d$



Je R ekvivalence? Ano je - platí všechny 3 podmínky ekvivalence.

Třídy ekvivalence

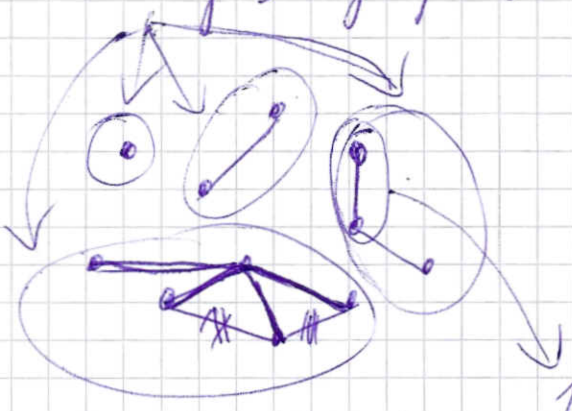


Př

Třídy ~~v graf~~ ekvivalence v grafu

= největší souvislé podgrafy

R je ekvivalence.



je relace, ale není třída

Def

Relace na vrcholech grafu G: $v_1 R v_2$ právě když existuje cesta z v_1 do v_2.

~~R je ekvivalence~~ Třídy ekvivalence jsou maximální souvislé podgrafy.

Uspořádání

Def Relace R na množině A se nazývá <u>uspořádání</u>, je-li
- reflexivní
- antisymetrická
- tranzitivní

R je antisymetrická, když platí:
aRb a bRa, pak $a = b$.

Zápis uspořádání $a \leq b$.

NENÍ $\leq$ = to je matematický ekvivalent

Př Je-li A systém všech podmnožin množiny M. Pak relace inkluze ($\subseteq$ = je podmnožinou) je uspořádání.
(= Dvě množiny jsou v relaci, když jedna je podmnožinou druhé.)

Def Mějme uspořádání $\preceq$ na množině A.

Prvek $a_0 \in A$ nazveme:

1) největší, jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \preceq a_0$.
2) maximální, jestliže neexistuje $a \in A$ takový, že $a_0 \preceq a$, $a \neq a_0$.

Př $A = \{\underbrace{\emptyset}_{\text{prázdná množina}}, \underbrace{\{1\}, \{2\}, \{3\}}_{\text{jednoprvkové množiny}}, \underbrace{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}}_{\text{dvouprvkové množiny}}\}$

uspořádání = inkluze

největší prvek neexistuje.

Maximální prvky jsou $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$.

Maximální prvek je i největší, ALE největší může být jen jeden.

Stejné je to i s nejmenším a minimálním prvkem.