K7

(13.14) Kolik různých čísel lze utvořit z čísel $\{0,1,2,3,4\}$ bez opakování čísel

vyhledat možné rozdělení počtu:

1 cif., 2 cif., 3 cif., 4 cif., 5 cif.

1 cif. ~~s nulou~~ bez nuly A_1 ... $n(A_1) = \cancel{5}\ 4$

2 cif. → 1. poz. 4 možnosti · 2. poz. 4 možnosti : A_2 ... $n(A_2) = 16$

3 cif. → 1. poz. 4 možn. + 2. poz. 4 možn. + 3. poz. 3 možn. : A_3 ... $n(A_3) = 48$

4 cif. → 1. poz. 4 možn. + 2. poz. 4 možn. + 3. poz. 3 možn. + 4. poz. 2 možn. $n(A_4) = 96$

5 cif. → 1. poz. 4 možn. + 2. poz. 4 možn. + 3. poz. 3 možn. + 4. poz. 2 možn. + 5. poz. 1 možn. =

$n(A_5) = 96$

$$\begin{array}{r} 20 \\ 48 \\ 96 \\ 96 \\ \hline 260 \end{array}$$

Všech čísel je:

$4 + 16 + 48 + 96 + 96 = \underline{\underline{260}}$

(13.15) Kolik různých pořadí lze vytvořit pomocí 6-ti různých koleček?

pořadí = dvojice ; záleží na pořadí ⇒ Variace bez opakování

$V_k(n) = n(n-1)\dots(n-k+1)$

$V_2(6) = 6\cdot 5 \cdot \cancel{4} = \underline{\underline{30}}$

(13.16) Kolik různých vrhů lze provést a) dvěma b) třemi } barevnými kostkami

záleží na pořadí, dvojice s opakováním

$V'_k(n) = n^k$

b) $V'_3(6) = 6^3 = \underline{\underline{216}}$

a) $V'_2(6) = 6^2 = \underline{\underline{36}}$

13.17 Šest kostek 1 – 6, kolik čísel → trojice

a) bez vracení (bez opakování), s pořadím

⇒ Variace 3. třídy ze 6-ti prvků $V_k(n) = n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)$

$V_3(6) = 6\cdot5\cdot4 = \underline{\underline{120}}$

b) s vracením (s opakováním), s pořadím

⇒ Variace 3. třídy ze 6-ti prvků s opak. $V'_k(n) = n^k$

$V'_3(6) = 6^3 = \underline{\underline{216}}$

ac) lichá čísla bez vracení s pořadím (bez opakování)

$\{1, 3, 5\}$

⇒ Permutace 3. třídy ze 3 prvků $P(n) = n!$

$P(3) = 3! = \underline{\underline{6}}$

bc) lichá čísla s vracením s pořadím (opakování)

$\{1, 3, 5\}$

⇒ ~~Permutace~~ Variace 3. třídy ze 3 prvků s opak. $V'_k(n) = n^k$

$V'_3(3) = 3^3 = \underline{\underline{27}}$

K9

13.18 Kolik je všech možných trojciferných přirozených čísel?

trojice, uspořádané, s opakováním

1\. číslice (1-9) $n(A_1)=9$

2\. číslice (0-9) $n(A_2)=10$

3\. číslice (0-9) $n(A_3)=10$

$$\left.\begin{array}{l} n(A_1)=9 \\ n(A_2)=10 \\ n(A_3)=10 \end{array}\right\} \; n(A_1)\cdot n(A_2)\cdot n(A_3) = 9\cdot 10\cdot 10 = \underline{\underline{900}}$$

13.19 Kolikrát více je variací než kombinací k-té třídy z n prvků (bez opak.)

$$V_k(n) = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\underline{\underline{\frac{V_k(n)}{C_k(n)}}} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n(n-1)\dots(n-k+1)}\cdot k! = \underline{\underline{k!}}$$

13.20 Kolik z kombinací k-té třídy z n prvků $p_1, p_2, \dots, p_n$ obsahuje určitý prvek p_m?

kombinace → skupina k prvků z n bez pořadí (a opak.)

1 prvek fixní, pak ~~kombinace~~ skupina (k-1) z (n-1) prvků

$$C_{k-1}(n-1) = \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

alternativně: počet kombinací neobsahujících p_m je $\binom{n-1}{k}$

celkový počet všech kombinací je $\binom{n}{k}$, tj. kombinace obsahující p_m:

$$\binom{n}{k}-\binom{n-1}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} - \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} =$$

(13.20)

$$\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} - \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} =$$

$$(n-k-1)!$$

$$= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} - \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)(n-k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} - \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!(n-n+k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$$

(13.21) Ze šesti kandidátů je třeba vybrat 3 do komise (bez pořadí, bez opak.)

⇒ výběr ~~skupiny~~ podmnožiny 3 prvkové kombinace

$$\underline{\underline{C_3(6)}} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(3!)} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = \underline{\underline{20}} \qquad C_k(n) = \binom{n}{k}$$

(13.22)

$n(M) = 18$, $n(F) = 16$ } podmnožina 7 zaměst.

a) 4 muži, 3 ženy

b) 6 mužů, 1 žena

a) 4 muži ze $n(M) = 18 \rightarrow C_4(18) = \frac{18\cdot17\cdot16\cdot15}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$

3 ženy ze $n(F) = 16 \rightarrow C_3(16) = \frac{16\cdot15\cdot14}{3\cdot2\cdot1}$

celkem kombinatorické součinové pravidlo (dvojice o složkách množinách) $= \binom{18}{4}\cdot\binom{16}{3} = \underline{\underline{\frac{18\cdot17\cdot16\cdot15}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{16\cdot15\cdot14}{3\cdot2\cdot1}}}$

b) 6 mužů z $n(M) = 18$, 1 žena z $n(F) = 16$ } celkem kombinator. součin.

$$\binom{18}{6}\cdot\binom{16}{1} = \frac{18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot16$$