Tabulka, v jejíchž řádcích jsou kombinační čísla $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ pro různá n, tj. tabulka

$$\begin{array}{cl}
1 & \text{pro } n = 0, \\
1 \quad 1 & n = 1, \\
1 \quad 2 \quad 1 & n = 2, \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 & n = 3, \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 & n = 4, \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 & n = 5, \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 & n = 6, \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 & n = 7, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots
\end{array}$$

se nazývá **Pascalův trojúhelník.** Z uvedených vlastností kombinačních čísel vyplývá, že každý řádek začíná a končí číslem 1, v každém řádku čísla stejně vzdálená od začátku a konce jsou si rovna, libovolné číslo uvnitř Pascalova trojúhelníku lze dostat sečtením dvojice čísel ležících bezprostředně nad ním. Součet kombinačních čísel v n-tém (nultém, prvním atd.) řádku Pascalova trojúhelníku je roven 2^n (viz úlohu 13.30).

Úlohy

13.1 Množina A obsahuje $n(A)$ prvků, množina B $n(B)$ prvků. Určete počet prvků, které obsahuje jejich sjednocení $A \cup B$.

Řešení.

a) Jsou-li množiny A, B disjunktní, tj. $A \cap B = \emptyset$, je podle kombinatorického pravidla součtu

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

b) Nejsou-li množiny A, B disjunktní, tj. $A \cap B \neq \emptyset$, vyjádříme každou z množin A, B jako sjednocení disjunktních množin (obr. 13.1)

$$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B), \qquad B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B),$$

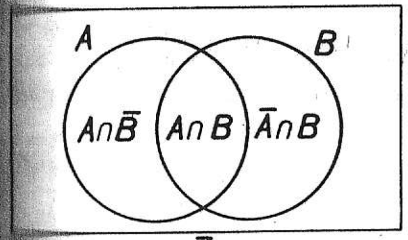
kde $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou doplňky množin A, B (vzhledem k základní množině Z). Podle kombinatorického pravidla je pak

$$n(A) = n(A \cap \bar{B}) + n(A \cap B),$$
$$n(B) = n(\bar{A} \cap B) + n(A \cap B),$$
$$n(A \cup B) = n(A \cap \bar{B}) + n(A \cap B) + n(\bar{A} \cap B).$$

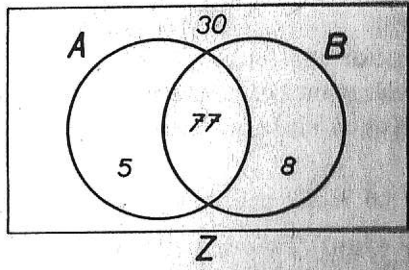
Z těchto rovností plyne, že

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Objasněte si též platnost tohoto výsledného vzorce podle Vennova diagramu v obr. 13.1.



Obr. 13.1



Obr. 13.2

13.2 120 studentů absolvovalo zkoušku z matematiky a z fyziky. 82 studentů udělalo zkoušku z matematiky, 85 zkoušku z fyziky. Z nich 77 udělalo obě zkoušky.

Určete:

a) Kolik studentů udělalo zkoušku z fyziky nebo z matematiky?
b) Kolik studentů neudělalo zkoušku z matematiky?
c) Kolik studentů neudělalo zkoušku z fyziky?
d) Kolik studentů udělalo zkoušku z matematiky a neudělalo zkoušku z fyziky?
e) Kolik studentů udělalo zkoušku z fyziky a neudělalo zkoušku z matematiky?

Řešení. Označme Z množinu všech 120 studentů, A množinu 82 studentů, kteří udělali zkoušku z matematiky, B množinu 85 studentů, kteří udělali zkoušku z fyziky. Pro počet prvků množin užijeme označení z předchozí úlohy, tedy $n(Z) = 120$, $n(A) = 82$, $n(B) = 85$, $n(A \cap B) = 77$.

Při řešení užijeme Vennova diagramu (obr. 13.2) a výsledku předchozí úlohy.

Dostáváme:

a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 90$,
b) $n(\bar{A}) = n(Z) - n(A) = 38$,
c) $n(\bar{B}) = n(Z) - n(B) = 35$,
d) $n(A \cap \bar{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 5$,
e) $n(\bar{A} \cap B) = n(B) - n(A \cap B) = 8$.

13.3 Ze 120 studentů v ročníku ovládá 55 studentů angličtinu, 34 němčinu a 26 oba jazyky. Kolik studentů neovládá žádný z obou jazyků?

[Nakreslete příslušný Vennův diagram a řešte obdobně jako úlohu 13.2. Výsledek: Žádný z obou jazyků neovládá $120 - (55 + 34 - 26) =$ $= 57$ studentů.]

13.4 Určete počet všech možných tanečních párů z 15 chlapců a 10 děvčat.

Řešení. Každé z 10 děvčat může požádat o tanec jeden z 15 chlapců, s každým děvčetem lze tedy vytvořit 15 tanečních párů. Celkový počet tanečních párů je proto podle kombinatorického pravidla součinu roven $10 \cdot 15 = 150$.

Poznámka. Úlohu 13.4 lze též řešit užitím kombinací (viz úlohu 13.25).

13.5 Tříčlenná posádka kosmické lodi se skládá z velitele a dvou dalších kosmonautů. Pro funkci velitele přicházejí v úvahu 3 kandidáti, na místo prvního z dalších dvou kosmonautů je 5 jiných kandidátů, na místo druhého jiní 4 kandidáti. Kolika možnými způsoby je možno sestavit posádku kosmické lodi?

[60 způsobů]

13.6 Kolik permutací n prvků obsahuje určitý prvek p jako první?

Řešení. Takové permutace vzniknou tím, že k danému prvku p přidáváme postupně všechny permutace zbývajících $n-1$ prvků. Je jich proto $(n-1)!$

13.7 Upravte

a) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$, b) $\dfrac{[(n-1)!]^2}{(n+1)!}$.

Řešení.

a) $\dfrac{(n+2)!}{n!} = \dfrac{n!(n+1)(n+2)}{n!} = n^2 + 3n + 2.$

$\left[\text{Obdobně b) } \dfrac{(n-1)!}{n^2+n}.\right]$

13.8 Určete součet všech čtyřciferných čísel sestavených z číslic 1, 3, 5 a 7 (bez opakování číslic).

Řešení. Všechna taková čísla jsou vlastně permutace daných 4 číslic; je jich $P(4) = 4! = 24$. Na místě jednotek se každá číslice opakuje tolikrát, kolik je permutací zbývajících tří číslic, tj. $P(3) = 3! = 6$krát. Proto součet na místě jednotek bude $6(1 + 3 + 5 + 7) = 96$. Stejně tomu bude na ostatních místech, takže součet všech takto utvořených čísel bude $(1000 + 100 + 10 + 1) . 96 = 106\,656$.

13.9 V urně je šest lístků téhož tvaru očíslovaných 1, 2, ..., 6. Kolika různými způsoby je lze postupně vytáhnout, jestliže se tažený lístek do urny nevrací a přihlíží se k pořadí, v jakém byly lístky taženy?

Řešení. V jednotlivých tazích dostaneme permutace šesti tažených lístků, počet všech těchto permutací je $P(6) = 6! = 720$.

13.10 a) Kolik různých pěticiferných čísel lze napsat číslicemi 0, 1, 4, 7, 9, nemá-li se žádná číslice opakovat? b) Kolik z nich je sudých? [a) 96, b) 42]

13.11 Kolik permutací s opakováním lze vytvořit z písmen slova PRAHA?

Řešení. Všech písmen je pět, A se opakuje dvakrát, počet všech permutací s opakováním je tedy

$$P'_{2,1,1,1}(5) = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60.$$

13.12 Kolik permutací lze vytvořit z písmen slova Mississippi?

$[P'_{4,4,2,1}(11) = 34\,650]$

13.13 Kolika způsoby může 36 členů organizace zvolit ze svého středu předsedu, místopředsedu, kulturního referenta a sportovního referenta?

Řešení. Z 36 prvků lze vybrat 4 prvky, přičemž záleží na pořadí (první zvolený bude předsedou, druhý kulturním referentem atd.), tolika způsoby, kolik je variací 4. třídy z 36 prvků:

$$V_4(36) = 36 . 35 . 34 . 33 = 1\,413\,720 \text{ způsoby.}$$

13.14 Kolik různých čísel je možno utvořit z číslic 0, 1, 2, 3, 4, smí-li každá tato číslice být v čísle obsažena nejvýš jednou?

Řešení. Z daných 5 číslic lze takto vytvořit čísla jednociferná až pěticiferná. Protože na pořadí číslic v čísle záleží, půjde tu o variace, resp. (při číslech pěticiferných) o permutace. Jednociferná čísla jsou čtyři (totiž 1, 2, 3, 4). Dvojciferných čísel z 5 číslic je $V_2(5) = 5 . 4 = 20$, z nich však čísla 01, 02, 03, 04 jsou vlastně jednociferná, takže skutečně dvojciferných čísel je jen 16. Trojciferných čísel je $V_3(5) = 5 . 4 . 3 = 60$, z nich však čísla 012, 013, ..., 043 jsou dvojciferná; je jich $V_2(4) = 4 . 3 = 12$, takže skutečně trojciferných čísel je $60 - 12 = 48$. Podobně čísel čtyřciferných je $V_4(5) - V_3(4) = 5 . 4 . 3 . 2 - 4 . 3 . 2 = 120 - 24 = 96$ a čísel pěticiferných je $P(5) - P(4) = 5! - 4! = 120 - 24 = 96$. Všech žádaných čísel lze tedy z daných číslic utvořit $4 + 16 + 48 + 96 + 96 = 260$.

13.15 Kolik různých převodů lze vytvořit sadou 6 ozubených koleček o různém počtu zubů? $[V_2(6) = 30.]$

13.16 Kolik různých vrhů lze provést a) dvěma, b) třemi kostkami, je-li na každé ze šesti stěn 1 až 6 teček?

Řešení.

a) Jde o variace s opakováním 2. třídy ze šesti prvků, jejichž počet je $V'_2(6) = 6^2 = 36$,

[b) $V'_3(6) = 6^3 = 216$.]

13.17 V urně je šest stejných lístků označených čísly 1 až 6. Kolika různými způsoby lze postupně s přihlížením k pořadí tahů vytáhnout tři z nich, jestliže se tažené lístky do urny a) nevracejí, b) vracejí? c) Kolika způsoby se v obou případech vytáhnou jen lichá čísla?

[a) $V_3(6) = 6 . 5 . 4 = 120$, b) $V'_3(6) = 6^3 = 216$, ca) $P(3) = 3! = 6$, cb) $V'_3(3) = 3^3 = 27$.]

13.18 Kolik je všech možných trojciferných přirozených čísel?

Řešení. Trojciferná čísla jsou variace s opakováním (v čísle se číslice mohou opakovat) 3. třídy z 10 prvků (z číslic 0, 1, 2, ..., 9), jichž je $V'_3(10) = 10^3 = 1000$; z nich však čísla začínající nulou nejsou trojciferná, je jich $V'_2(10) = 10^2 = 100$. Čísel trojciferných tedy je $V'_3(10) - V'_2(10) = 900$; jsou to čísla od 100 do 999.

13.19 Kolikrát více je variací než kombinací k-té třídy z n prvků?

$$\frac{V_k(n)}{C_k(n)} = \frac{\dfrac{n!}{(n-k)!}}{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}} = k!$$

Variací k-té třídy z n prvků je $k!$-krát víc než kombinací k-té třídy z n prvků, protože z každé kombinace k-té třídy lze utvořit permutováním jejích prvků $k!$ variací téže třídy.

13.20 Kolik z kombinací k-té třídy z n prvků $p_1, p_2, \ldots, p_n$ obsahuje určitý prvek p_m?

Řešení. Takové kombinace vzniknou tím, že k uvažovanému prvku p_m postupně přidáváme všechny kombinace $(k-1)$-ní třídy ze zbývajících $n-1$ prvků. Je jich tedy

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

Jiný způsob řešení. Počet uvažovaných kombinací, které neobsahují prvek p_m, je $\binom{n-1}{k}$. Kombinací, které obsahují prvek p_m, je proto

$$\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} - \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} =$$
$$= \frac{(n-1)!(n-n+k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

13.21 Ze šesti kandidátů je třeba vybrat do komise tři. Kolika způsoby je to možné?

Řešení. Ze šesti prvků lze vybrat tři prvky, přičemž nezáleží na pořadí, tolika způsoby, kolik je kombinací 3. třídy ze 6 prvků:

$$C_3(6) = \binom{6}{3} = \frac{6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3} = 20 \text{ způsoby.}$$

13.22 V podniku pracuje 18 mužů a 16 žen. Kolika způsoby je možno vybrat 7 zaměstnanců podniku na rekreaci tak, aby na rekreaci šli a) 4 muži a 3 ženy, b) 6 mužů a 1 žena?

Řešení. Protože na pořadí ve skupině vybraných nezáleží, jde tu o kombinace.

a) 4 z 18 mužů lze vybrat $C_4(18) = \binom{18}{4}$ způsoby, 3 ze 16 žen $C_3(16) = \binom{16}{3}$ způsoby. Protože kterákoli skupina 4 vybraných mužů může být přidružena ke kterékoli skupině 3 vybraných žen, je výběr možný celkem $\binom{18}{4} \cdot \binom{16}{3} =$

$$= \frac{18\,.\,17\,.\,16\,.\,15}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \cdot \frac{16\,.\,15\,.\,14}{1\,.\,2\,.\,3} = 3\,060\,.\,560 = 1\,713\,600 \text{ způsoby.}$$

[b) Obdobně určíme, že výběr je možný 297 024 způsoby.]

13.23 Kolik různých kapacit lze získat spojením čtyř různých kondenzátorů? [52.]

13.24 V sérii 12 výrobků jsou 3 vadné. Kolika způsoby lze z nich vybrat

a) 6 výrobků,
b) 6 výrobků vesměs bezvadných,
c) 6 výrobků, z nichž právě 1 je vadný,
d) 6 výrobků, z nichž právě 2 jsou vadné,
e) 6 výrobků, z nichž právě 3 jsou vadné.

Řešení.

a) Mohu vybrat kterýchkoli 6 výrobků ze všech 12: $C_6(12) = \binom{12}{6} = 924$ způsobů.

b) Musím vybrat 6 výrobků z 9 bezvadných: $C_6(9) = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$ způsoby.

c) Musím vybrat 1 vadný ze 3 vadných a 5 bezvadných z 9 bezvadných:

$$C_1(3)\,.\,C_5(9) = \binom{3}{1} \cdot \binom{9}{5} = 3\,.\,126 = 378 \text{ způsobů.}$$

d) $C_2(3)\,.\,C_4(9) = \binom{3}{2} \cdot \binom{9}{4} = 3\,.\,126 = 378$ způsobů.

e) $C_3(3)\,.\,C_3(9) = \binom{3}{3} \cdot \binom{9}{3} = 1\,.\,84$ způsoby. Podle kombinatorického pravidla součtu je $924 = 84 + 378 + 378 + 84$.

13.25 Úlohu 13.4 řešte pomocí kombinací.

Řešení. 1 hocha z 15 hochů lze vybrat $\binom{15}{1}$ způsoby, 1 dívku z 10 dívek $\binom{10}{1}$ způsoby; podle kombinatorického pravidla součinu je tedy možno utvořit celkem $\binom{15}{1} \cdot \binom{10}{1} = 15\,.\,10$ různých tanečních párů. Můžeme však uvažovat také takto: Všech možných dvojic z 25 lidí je $\binom{25}{2} = 300$. Z toho je však $\binom{15}{2}$ dvojic chlapeckých a $\binom{10}{2}$ dvojic dívčích. Tanečních párů je tedy celkem

$$\binom{25}{2} - \binom{15}{2} - \binom{10}{2} = 300 - 105 - 45 = 150.$$

13.26 Kolik je možno utvořit součinů dělitelných třemi a obsahujících libovolné tři činitele z těchto čísel: 1, 2, 3, 5, 7, 9.

Řešení. Protože na pořadí činitelů v součinu nezáleží, jde tu o kombinace. Součinů obsahujících činitele 3 a 9 a jednoho z činitelů 1, 2, 5, 7 je $C_1(4) = 4$. Součinů obsahujících činitele 3 nebo 9 a dva z činitelů 1, 2, 5, 7 je $C_1(2)\,.\,C_2(4) = 2\,.\,6 = 12$. V jiných případech by součin nebyl dělitelný třemi. Žádaných součinů dělitelných třemi je tedy $4 + 12 = 16$.