# Kapitola 3

# Výroková logika

## 3.1 Výroky

Matematická logika se zabývá studiem výroků, jejich vytvářením, jejich pravdivostí a jejich odvozováním. Nedefinujeme, co je to výrok (stejně jako jsme nedefinovali, co je to množina, co je to bod apod.); pouze zhruba popíšeme, co si pod pojmem výrok přestavujeme. Neformálně se dá říci, že výrok je každá věta, o které se dá rozhodnout, zda je pravdivá; nebo též: výrok je každá oznamovací věta. Tedy výrokem nejsou např. věty „Kéž by pršelo!“, „Prší?“ apod. Naopak výrokem jsou věty „Prší.“, „Svítí sluníčko.“, „Jedna a jedna jsou tři.“ apod. Výroková logika pracuje se základními výroky (o jejichž strukturu se dál již nestaráme) a zjišťuje pravdivost či nepravdivost složených výroků na základě pravdivosti základních výroků. K vytváření složitějších výroků používá tzv. logické spojky. Jsou to tyto logické spojky:

- není pravda, že; označujeme ji $\neg$ a nazýváme ji *negace*;
- a; označujeme ji $\wedge$ a nazýváme ji *konjunkce*;
- nebo; označujeme ji $\vee$ a nazýváme ji *disjunkce*;
- jestliže ..., pak; označujeme ji $\Rightarrow$ a nazýváme ji *implikace*;
- právě tehdy, když; označujeme ji $\Leftrightarrow$ a nazýváme ji *ekvivalence*.

**3.1.1 Výrokové formule.** Máme danou neprázdnou množinu $A$ tzv. *elementárních výroků* (též jim říkáme *logické* nebo *výrokové proměnné*). Konečnou posloupnost prvků z množiny $A$, logických spojek a závorek nazýváme *výroková formule* (zkráceně jen *formule*), jestliže vznikla podle následujících pravidel:

1. Každá logická proměnná (elementární výrok) $a \in A$ je výroková formule.
2. Jsou-li $\alpha$, $\beta$ výrokové formule, pak $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ a $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ jsou také výrokové formule.
3. Nic jiného než to, co vzniklo pomocí konečně mnoha použití bodů 1 a 2, není výroková formule.

Všechny formule, které vznikly z logických proměnných množiny $A$, značíme $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.

**3.1.2 Poznámka.** Spojka $\neg$ se nazývá *unární*, protože vytváří novou formuli z jedné formule. Ostatní zde zavedené spojky se nazývají *binární*, protože vytvářejí novou formuli ze dvou formulí.

V dalším textu výrokové (logické) proměnné označujeme malými písmeny např. $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$, výrokové formule označujeme malými řeckými písmeny např. $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varphi, \psi, \ldots$.

**3.1.3 Derivační strom formule.** To, jak formule vznikla podle bodů 1 a 2, si můžeme znázornit na *derivačním stromu* dané formule. Jedná se o kořenový strom, kde každý vrchol, který není listem je ohodnocen logickou spojkou a jedná-li se o binární spojku, má vrchol dva následníky, jedná-li se o unární spojku, má vrchol pouze jednoho následníka. Přitom pro formule tvaru $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ odpovídá levý následník formuli $\alpha$, pravý následník formuli $\beta$. Listy stromu jsou ohodnoceny logickými proměnnými.

**3.1.4 Podformule.** Z derivačního stromu formule $\alpha$ jednoduše poznáme všechny její podformule: *Podformule* formule $\alpha$ jsou všechny formule odpovídající podstromům derivačního stromu formule $\alpha$.

**3.1.5 Hloubka formule.** *Hloubka formule* je definována jako výška stromu této formule. Například formule

$$(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((\neg x \vee y) \wedge (y \Rightarrow \neg x))$$

má hloubku 4. Hloubka derivačního stromu logické proměnné je 0.

## 3.2 Pravdivostní ohodnocení

**3.2.1 Pravdivostní ohodnocení** je zobrazení $u\colon \mathcal{P}(A) \to \{0, 1\}$, které splňuje pravidla

(1) $\neg\alpha$ je pravdivá právě tehdy, když $\alpha$ je nepravdivá;

(2) $\alpha \wedge \beta$ je pravdivá právě tehdy, když $\alpha$ a $\beta$ jsou obě pravdivé;

(3) $\alpha \vee \beta$ je nepravdivá právě tehdy, když $\alpha$ a $\beta$ jsou obě nepravdivé;

(4) $\alpha \Rightarrow \beta$ je nepravdivá právě tehdy, když $\alpha$ je pravdivá a $\beta$ nepravdivá;

(5) $\alpha \Leftrightarrow \beta$ je pravdivá právě tehdy, když buď obě formule $\alpha$ a $\beta$ jsou pravdivé nebo obě jsou nepravdivé.

**3.2.2 Pravdivostní tabulky.** Vlastnosti, které pravdivostní ohodnocení musí mít, znázorňujeme též pomocí tzv. pravdivostních tabulek logických spojek. Jsou to:

| $\alpha$ | $\neg\alpha$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \wedge \beta$ | $\alpha \vee \beta$ | $\alpha \Rightarrow \beta$ | $\alpha \Leftrightarrow \beta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**3.2.3 Věta.** Každé zobrazení $u_0\colon A \to \{0,1\}$ jednoznačně určuje pravdivostní ohodnocení $u : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}$ takové, že $u_0(a) = u(a)$ pro všechna $a \in A$. Ohodnocení $u, v\colon \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}$ jsou totožná právě tehdy, když pro všechny logické proměnné $x \in A$ platí $u(x) = v(x)$.

**3.2.4 Pravdivostní tabulka formule.** Víme, že pravdivostní hodnocení formule závisí pouze na ohodnocení těch logických proměnných, které obsahuje, a těch je konečně mnoho. Proto pravdivostní hodnotu dané formule dostáváme z pravdivostní tabulky takto:

Pravdivostní tabulka obsahuje sloupec pro každou logickou proměnnou a danou formuli. Pomáháme si i sloupci pro některé podformule dané formule. Tabulka obsahuje tolik řádků, kolik máme různých možností pravdivostních hodnot logických proměnných. Jestliže tedy formule obsahuje právě $n$ proměnných, pak její tabulka má $2^n$ řádků. V každém řádku pak na základě vlastností a konstrukce formule dostáváme jednoznačně pravdivostní hodnotu (tj. 1 nebo 0) celé formule.

**3.2.5 Příklad.** Zde je pravdivostní tabulka formule $\varphi = (x \Rightarrow y) \Rightarrow ((\neg x \vee \vee y) \wedge (y \Rightarrow \neg x))$:

| $x$ | $y$ | $x \Rightarrow y$ | $\neg x \vee y$ | $y \Rightarrow \neg x$ | $(\neg x \vee y) \wedge (y \Rightarrow \neg x)$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

**3.2.6 Tautologie, splnitelná formule, kontradikce.** Formule se nazývá *tautologie*, jestliže je pravdivá ve všech pravdivostních ohodnoceních; nazývá se *kontradikce*, jestliže je nepravdivá ve všech pravdivostních ohodnoceních. Formule je *splnitelná*, jestliže existuje aspoň jedno pravdivostní ohodnocení, ve kterém je pravdivá.

**3.2.7 Příklady.** Formule $\alpha = (x \Rightarrow (y \wedge \neg y)) \Rightarrow \neg x$ je tautologie.

Formule $\beta = (\neg x \vee y) \Leftrightarrow (y \Rightarrow x)$ je splnitelná, ale není tautologie.

Formule $\gamma = \neg((x \Rightarrow \neg x) \Leftrightarrow \neg x)$ je kontradikce.

**3.2.8 Souvislost s logickými obvody** Každá výroková formule, která obsahuje pouze logické spojky $\neg$, $\wedge$ a $\vee$ se dá realizovat jako logický obvod s hradly odpovídajícími těmto spojkám, kde na vstupech jsou logické proměnné, vstupy se nevětví a obvody neobsahují cykly. Přidáme-li k použitelným prvkům i hradla realizující implikaci $\Rightarrow$ a ekvivalenci $\Leftrightarrow$, pak každé výrokové formuli odpovídá logický obvod. Máme-li danou formuli a odpovídající logický obvod, pak pravdivostní ohodnocení této formule je jednoznačně dáno hodnotami nula nebo jedna na vstupech a jeho hodnota je přesně hodnota na výstupu daného logického obvodu. Tautologii odpovídá logický obvod, který při všech kombinacích vstupů dává vždy na výstupu jedničku; kontradikci odpovídá takový logický obvod, který naopak vždy na výstupu dává nulu. Splnitelné formuli odpovídá logický obvod, který pro aspoň jednu kombinaci vstupů dává na výstupu jedničku.

## 3.3 Sémantický důsledek

V matematické logice nás nejvíce zajímá otázka: Jsou dány výroky (předpoklady našeho odvozování), co z těchto výroků vyplývá (na co z nich můžeme usoudit)?

**3.3.1 Splnitelné množiny formulí.** Řekneme, že množina formulí $S$ je *pravdivá* v ohodnocení $u$, jestliže každá formule z $S$ je pravdivá v $u$, tj. je-li $u(\varphi) = 1$ pro všechna $\varphi \in S$.

Řekneme, že množina formulí $S$ je *splnitelná* jestliže existuje pravdivostní ohodnocení $u$, ve kterém je $S$ je pravdivá.

**3.3.2 Sémantický důsledek.** Řekneme, že formule $\varphi$ je *sémantickým*, též *konsekventem* nebo *tautologickým důsledkem* množiny formulí $S$, jestliže $\varphi$ je pravdivá v každém ohodnocení $u$, v němž je pravdivá $S$.

Fakt, že formule $\varphi$ je konsekventem množiny $S$, označujeme $S \models \varphi$.

**3.3.3** Formule $\varphi$ *není sémantický důsledek* množiny $S$, jestliže existuje pravdivostní ohodnocení $u$ takové, že množina $S$ je pravdivá v $u$ a $u(\varphi) = 0$.

**3.3.4 Příklady.** Pro libovolné formule $\alpha$, $\beta$ platí:
1) $\{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha\} \models \beta$;
2) $\{\alpha \wedge \beta\} \models \alpha$.

1) Má-li být množina formulí $\{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha\}$ pravdivá v nějakém ohodnocení $u$, pak v $u$ je pravdivá formule $\alpha$. Navíc, je-li $u(\alpha) = 1$ a formule $\alpha \Rightarrow \beta$ je pravdivá v $u$, musí být v $u$ pravdivá i formule $\beta$. Odtud plyne, že $\{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha\} \models \beta$.

2) Je-li v nějakém pravdivostním ohodnocení $u$ pravdivá formule $\alpha \wedge \beta$, pak jsou v $u$ pravdivé obě formule $\alpha$, $\beta$. Tedy platí $\{\alpha \wedge \beta\} \models \alpha$.

**3.3.5 Konvence.** Pro jednoduchost píšeme $\alpha \models \beta$ místo $\{\alpha\} \models \beta$ a $\models \varphi$ místo $\emptyset \models \varphi$.

**3.3.6 Tvrzení.**

1. Je-li $S$ množina formulí a $\varphi \in S$, pak $\varphi$ je konsekventem $S$, tj. $S \models \varphi$ pro každou $\varphi \in S$.

   Jestliže v nějakém pravdivostním ohodnocení $u$ je pravdivá celá množina $S$, pak je v něm pravdivá i formule $\varphi \in S$.

2. Tautologie je konsekventem každé množiny formulí $S$.

   Tautologie je formule, která je pravdivá v každém pravdivostním ohodnocení. Nemůže se tedy stát, že bychom měli pravdivostní ohodnocení $u$, v němž by byla pravdivá množina $S$ a nebyla pravdivá naše tautologie.

3. Formule $\varphi$ je tautologie právě tehdy, když $\models \varphi$.

   Z vlastnosti 2 už víme, že pro tautologii $\varphi$ platí $\models \varphi$. Předpokládejme, že formule $\varphi$ není tautologie. Ukážeme, že v tomto případě $\varphi$ není konsekventem prázdné množiny $\emptyset$: Protože $\varphi$ není tautologie, existuje ohodnocení $u$ takové, že $u(\varphi) = 0$. V ohodnocení $u$ jsou všechny formule z prázdné množiny pravdivé (žádné formule totiž v $\emptyset$ nejsou) a přitom $u(\varphi) = 0$. Tedy neplatí $\models \varphi$.

4. Každá formule je konsekventem množiny formulí $\{\alpha, \neg\alpha\}$.

   Označme $S = \{\alpha, \neg\alpha\}$. Vezměme libovolnou formuli $\varphi$. Kdyby $\varphi$ nebyla konsekventem množiny $S$, pak by existovalo pravdivostní ohodnocení $u$ takové, že $S$ je v $u$ pravdivá a $\varphi$ je v $u$ nepravdivá. Ale množina $S$ nemůže být v žádném pravdivostním ohodnocení pravdivá, vždyť $\alpha$ a $\neg\alpha$ nemohou být pravdivé současně! Proto platí $S \models \varphi$.