4.2 Syntaxe predikátové logiky

V tomto oddíle zavedeme syntaxi predikátové logiky, tj. uvedeme pravidla, podle nichž se tvoří syntakticky správné formule predikátové logiky. Význam a pravdivostní hodnota nás bude zajímat až dále.

Správně utvořené formule budou posloupnosti symbolů tzv. *jazyka predikátové logiky*.

4.2.1 Jazyk predikátové logiky $\mathscr{L}$. *Jazyk predikátové logiky* se skládá z

1. *logických symbolů*, tj.:
   a) spočetné množiny individuálních proměnných: $\mathsf{Var} = \{x, y, \ldots, x_1, x_2, \ldots\}$
   b) výrokových logických spojek: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
   c) obecného kvantifikátoru $\forall$ a existenčního kvantifikátoru $\exists$
2. *speciálních symbolů*, tj.:
   a) množiny Pred predikátových symbolů (nesmí být prázdná)
   b) množiny Kons konstantních symbolů (může být prázdná)
   c) množiny Func funkčních symbolů (může být prázdná)
3. pomocných symbolů, jako jsou závorky „(, [,) ,]“ a čárka „,“.

Pro každý predikátový i funkční symbol máme dáno přirozené číslo n větší nebo rovné 1, které nám udává, kolika objektů se daný predikát týká, nebo kolika proměnných je daný funkční symbol. Tomuto číslu říkáme *četnost* nebo též *arita* predikátového symbolu nebo funkčního symbolu.

4.2.2 Poznámka. Predikátové symboly budeme většinou značit velkými písmeny, tj. např. $P, Q, R, \ldots, P_1, P_2, \ldots$; konstantní symboly malými písmeny ze začátku abecedy, tj. $a, b, c, \ldots, a_1, \ldots$, a funkční symboly většinou $f, g, h, \ldots, f_1, f_2, \ldots$. Formule predikátové logiky budeme označovat malými řeckými písmeny (obdobně, jako jsme to dělali pro výrokové formule). Kdykoli se od těchto konvencí odchýlíme, tak v textu na to upozorníme.

Poznamejme, že přestože často budeme mluvit o n-árních predikátových symbolech a n-árních funkčních symbolech, v běžné praxi se setkáme jak s predikáty, tak funkcemi arity nejvýše tři. Nejběžnější jsou predikáty a funkční symboly arity 1, těm říkáme též *unární*, nebo arity 2, těm říkáme též *binární*. Doporučujeme čtenáři, aby se na tomto místě vrátil k příkladům z minulého oddílu a pro každý predikát i funkci určil, jakou má aritu.

Poznamenejme ještě, že někteří autoři konstantní symboly zahrnují pod nulární funkční symboly (tj. funkční symboly arity 0).

4.2.3 Termy. Množina *termů* je definována těmito pravidly:

1. Každá proměnná a každý konstantní symbol je term.
2. Jestliže f je funkční symbol arity n a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je také term.
3. Nic, co nevzniklo konečným použitím pravidel 1 a 2, není term.

4.2.4 Poznámka. Term je zhruba řečeno objekt, pouze může být složitěji popsán než jen proměnnou nebo konstantou. V jazyce predikátové logiky termy vystupují jako „podstatná jména“.

4.2.5 Atomické formule. *Atomická formule* je predikátový symbol P aplikovaný na tolik termů, kolik je jeho arita. Jinými slovy, pro každý predikátový symbol $P \in \mathsf{Pred}$ arity n a pro každou n-tici termů $t_1, t_2, \ldots, t_n$ je $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ atomická formule.

4.2.6 Formule. Množina *formulí* je definována těmito pravidly:

1. Každá atomická formule je formule.
2. Jsou-li φ a ψ dvě formule, pak $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ jsou opět formule.
3. Je-li φ formule a x proměnná, pak $(\forall x\, \varphi)$ a $(\exists x\, \varphi)$ jsou opět formule.
4. Nic, co nevzniklo pomocí konečně mnoha použití bodů 1 až 3, není formule.

4.2.7 Poznámka. Formule predikátové logiky jsme definovali obdobně jako výrokové formule: Nejprve jsme definovali „ty nejjednodušší“ formule (atomické formule) a potom pomocí logických spojek a kvatifikátorů konstruujeme složitější formule. Ve výrokové logice byl první krok daleko jednodušší, protože elementární výroky nebyly strukturované. Vlastní konstrukce formulí je však v obou případech podobná.

4.2.8 Konvence.

1. Úplně vnější závorky nepíšeme. Píšeme tedy např. $(\exists x P(x)) \vee R(a,b)$ místo $((\exists x\, P(x)) \vee R(a,b))$.
2. Spojka „negace“ má vždy přednost před výrokovými logickými spojkami a proto píšeme např. $\forall x\, (\neg P(x) \Rightarrow Q(x))$ místo $\forall x\, ((\neg P(x)) \Rightarrow Q(x))$.

4.2.9 Derivační strom formule. Ke každé formuli predikátové logiky můžeme přiřadit její *derivační strom* podobným způsobem jako jsme to udělali v případě výrokových formulí. Rozdíl je v tom, že kvantifikátory považujeme za unární (tj. mají pouze jednoho následníka) a také pro termy vytváříme jejich derivační strom. Listy derivačního stromu jsou vždy ohodnoceny buď proměnnou nebo konstantou. Poznamenejme, že derivačnímu stromu se též říká *syntaktický strom.*

4.2.10 Podformule. *Podformule* formule φ je libovolný podřetězec φ, který je sám formulí. Jinými slovy: Podformule formule φ je každý řetězec odpovídající podstromu derivačního stromu formule φ, určeného vrcholem ohodnoceným predikátovým symbolem, logickou spojkou nebo kvantifikátorem.

4.2.11 Volný a vázaný výskyt proměnné. Máme formuli φ a její derivační strom. List derivačního stromu obsazený proměnnou x je výskyt proměnné x ve formuli φ. Výskyt proměnné x je *vázaný* ve formuli φ, jestliže při postupu od listu ohodnoceného tímto x ve směru ke kořeni derivačního stromu narazíme na kvantifikátor s touto proměnnou. V opačném případě mluvíme o *volném* výskytu proměnné x.

4.2.12 Sentence. Formule, která má pouze vázané výskyty proměnné, se nazývá *sentence*, též *uzavřená formule*. Formuli, která má pouze volné výskyty proměnné, se říká *otevřená formule*.

4.2.13 Legální přejmenování proměnné. Přejmenování výskytů proměnné x ve formuli φ je *legálním* přejmenováním proměnné, jestliže

- jedná se o výskyt vázané proměnné ve φ;
- přejmenováváme všechny výskyty x vázané daným kvantifikátorem;
- po přejmenování se žádný dříve volný výskyt proměnné nesmí stát vázaným výskytem.

4.2.14 Rovnost formulí. Dvě formule považujeme za *stejné*, jestliže se liší pouze legálním přejmenováním vázaných proměnných.

Každou formuli φ lze napsat tak, že každá proměnná má ve formuli buď jen volné výskyty nebo jen vázané výskyty.

4.3 Sémantika predikátové logiky

Nyní se budeme zabývat sémantikou formulí, tj. jejich významem a pravdivostí.

4.3.1 Interpretace jazyka predikátové logiky. *Interpretace* predikátové logiky s predikátovými symboly Pred, konstantními symboly Kons a funkčními symboly Func je dvojice $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, kde

- U je neprázdná množina nazývaná *universum*;
- $[\![-]\!]$ je přiřazení, které
    1. každému predikátovému symbolu $P \in \mathsf{Pred}$ arity n přiřazuje podmnožinu $[\![P]\!]$ množiny U^n, tj. n-ární relaci na množině U.
    2. každému konstantnímu symbolu $a \in \mathsf{Kons}$ přiřazuje prvek z U, značíme jej $[\![a]\!]$,
    3. každému funkčnímu symbolu $f \in \mathsf{Func}$ arity n přiřazuje zobrazení množiny U^n do U, značíme je $[\![f]\!]$,

Množina U se někdy nazývá *domain* a označuje D.

4.3.2 Kontext proměnných. Je dána interpretace $\langle U, [\![-]\!]\rangle$. *Kontext proměnných* je zobrazení ρ, které každé proměnné $x \in \mathsf{Var}$ přiřadí prvek $\rho(x) \in U$. Je-li ρ kontext proměnných, $x \in \mathsf{Var}$ a $d \in U$, pak

$$\rho[x := d]$$

označuje kontext proěnných, který má stejné hodnoty jako ρ pouze v proměnné x má hodnotu d. Kontextu proměnných $\rho[x := d]$ říkáme *update* kontextu ρ o hodnotu d v x.

4.3.3 Interpretace termů při daném kontextu proměnných. Je dána interpretace $\langle U, [\![-]\!]\rangle$ a kontext proměnných ρ. Pak termy interpretujeme následujícím způsobem.

1. Je-li term konstatní symbol $a \in \mathsf{Kons}$, pak jeho hodnota je prvek $[\![a]\!]_\rho = [\![a]\!]$. Je-li term proměnná x, pak jeho hodnota je $[\![x]\!]_\rho = \rho(x)$.
2. Je-li $f(t_1, \ldots, t_n)$ term. pak jeho hodnota je

$$[\![f(d_1, \ldots, d_n)]\!]_\rho = [\![f]\!]([\![t_1]\!]_\rho, \ldots, [\![t_n]\!]_\rho).$$

[Jinými slovy, hodnota termu $f(t_1, \ldots, t_n)$ je funkční hodnota funkce $[\![f]\!]$ provedené na n-tici prvků $[\![t_1]\!]_\rho, \ldots, [\![t_n]\!]_\rho$ z U.]

Poznamenejme, že neobsahuje-li term t proměnnou, pak jeho hodnota nezáleží na kontextu proměnných ρ, ale pouze na interpretaci.

Tuto formální definici si můžete přiblížit ještě takto. Vezmeme term t a utvoříme jeho derivační strom. Listy stromu ohodnotíme tak, jak nám říká interpretace (pro konstantní symboly) a kontext proměnných. Pak jdeme v derivačním stromu směrem ke kořeni. Vrchol, který odpovídá n-árnímu funkčnímu symbolu f a má následníky ohodnoceny prvky d_1, d_2, …, d_n (v tomto pořadí zleva doprava), ohodnotíme prvkem $[\![f]\!](d_1, \ldots, d_n)$, tj. obrazem n-tice $(d_1, \ldots, d_n)$ v zobrazení $[\![f]\!]$. Prvek, kterým je ohodnocen kořen, je hodnota celého termu v dané interpretaci a daném kontextu. Uvědomte si, že se jedná o přesně stejný postup jako např. při vyhodnocování algebraických výrazů.

4.3.4 Pravdivostní hodnota formule v dané interpretaci a daném kontextu. Nejprve definujeme *pravdivost formulí v dané interpretaci* $\langle U, [\![-]\!]\rangle$ při daném kontextu proměnných ρ:

1. Nechť φ je atomická formule. Tj. $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$, kde P je predikátový symbol arity n a $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy. Pak φ je pravdivá v interpretaci $\langle U, [\![-]\!]\rangle$ a kontextu ρ právě tehdy, když

$$([\![t_1]\!]_\rho, \ldots, [\![t_n]\!]_\rho) \in [\![P]\!].$$

Jinými slovy: φ je v naší interpretaci pravdivá právě tehdy, když n-tice hodnot termů $([\![t_1]\!]_\rho, \ldots, [\![t_n]\!]_\rho)$ má vlastnost $[\![P]\!]$.

2. Jsou-li φ a ψ formule, jejichž pravdivost v interpretaci $\langle U, [\![-]\!]\rangle$ a kontextu ρ již známe, pak

   - $\neg\varphi$ je pravdivá právě tehdy, když φ není pravdivá.

- $\varphi \wedge \psi$ je pravdivá právě tehdy, když φ i ψ jsou pravdivé.
- $\varphi \vee \psi$ je nepravdivá právě tehdy, když φ i ψ jsou nepravdivé.
- $\varphi \Rightarrow \psi$ je nepravdivá právě tehdy, když φ je pravdivá a ψ je nepravdivá.
- $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je pravdivá právě tehdy, když buď obě formule φ a ψ jsou pravdivé, nebo obě formule φ a ψ jsou nepravdivé.

3. Je-li φ formule a x proměnná, pak

   - $\forall x \varphi(x)$ je pravdivá právě tehdy, když fromule φ je pravdivá *v každém* kontextu $\rho[x := d]$, kde d je prvek U.
   - $\exists x\, \varphi(x)$ je pravdivá právě tehdy, když fromule φ je pravdivá *v aspoň jednom* kontextu $\rho[x := d]$, kde d je prvek U..

4.3.5 Pravdivostní hodnota sentence. Sentence φ je *pravdivá v interpretaci* $\langle U, [\![-]\!] \rangle$ právě tehdy, když je pravdivá v každém kontextu proměnných ρ.

Poznamenejme, že pro sentence v předchozí definici jsme mohli požadovat pravdivost v alespoň jednom kontextu.