2.3 Relace na množině

Relace $R \subseteq A \times A$ se nazývá relace na množině A.

2.3.1 Vlastnosti relací na množině Řekneme, že relace R na množině A je

1. *reflexivní*, jestliže pro všechna $a \in A$ platí $a\ R\ a$;
2. *symetrická*, jestliže pro všechna $a, b \in A$ platí: je-li $a\ R\ b$, pak také $b\ R\ a$;
3. *antisymetrická*, jestliže pro všechna $a, b \in A$ platí: je-li $a\ R\ b$ a $b\ R\ a$, pak nutně $a = b$;
4. *tranzitivní*, jestliže pro všechna $a, b, c \in A$ platí: je-li $a\ R\ b$ a $b\ R\ c$, pak nutně $a\ R\ c$.

2.3.2 Uvažujme relaci nerovnosti R na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$ (tj. $n\ R\ m$ právě tehdy, když n a m jsou různá přirozená čísla). Tato relace není reflexivní, protože pro žádné $n \in \mathbb{N}$ neplatí $n \neq n$. Zato je symetrická: Je-li $n \neq m$, pak také $m \neq n$. Relace R není antisymetrická, protože např. $2 \neq 3$, $3 \neq 2$ a 2 a 3 jsou různá čísla (tj. $2\ R\ 3$ a $3\ R\ 2$ a přesto $2 \neq 3$). Tato relace také není tranzitivní, protože např. $2 \neq 3$ a $3 \neq 2$ a přesto $2 = 2$ (tj. $2\ R\ 3$ a $3\ R\ 2$ a přesto není $2\ R\ 2$).

Relace menší nebo rovno $\leq$ na množině $\mathbb{R}$ je reflexivní, neboť $a \leq a$ pro všechna reálná a. Je i antisymetrická, neboť jakmile pro dvě reálná čísla a, b platí $a \leq b$ a $b \leq a$, pak $a = b$. Je také tranzitivní, neboť je-li $a \leq b$ a $b \leq c$, pak i $a \leq c$.

2.3.3 Relace ekvivalence. Relace R na množině A se nazývá *ekvivalence*, jestliže je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

2.3.4 Příklad. Relace R na množině všech celých čísel $\mathbb{Z}$ definovaná předpisem:

$$m\ R\ n \quad \text{právě tehdy, když} \quad m - n \text{ je sudé}, \quad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

je ekvivalence.

Relace R je reflexivní, protože pro každé $m \in \mathbb{Z}$ je $m - m = 0$ a nula je sudé číslo. Tedy $m\ R\ m$.

Relace R je symetrická protože, je-li $m\ R\ n$, tj. $m - n = 2k$ pro nějaké k, je i $n - m$ sudé ($n - m = -2k$) a proto $n\ R\ m$.

Navíc R je tranzitivní: Máme-li tři čísla $m, n, p \in \mathbb{Z}$ taková, že $m\ R\ n$ a $n\ R\ p$, tj. $m - n = 2k$ a $n - p = 2l$ pro nějaká k a l, potom $m - p = (m - n) + (n - p) = 2k + 2l = 2(k + l)$. Odtud plyne $m\ R\ p$.

2.3.5 Příklad. Na množině $A = \{(p, q) \mid q \neq 0,\ p, q \in \mathbb{Z}\}$ je relace S definována předpisem:

$$(p, q)\ S\ (m, n) \quad \text{právě tehdy, když} \quad pn = qm.$$

Ukažme, že S je ekvivalence.

S je reflexivní: Pro všechny $(p, q) \in A$ máme $(p, q)\ S\ (p, q)$, protože $pq = qp$.

S je symetrická: je-li $(p,q)\ S\ (m,n)$, pak $pn = qm$ a tedy i $mq = np$. To znamená, že $(m,n)\ S\ (p,q)$.

S je tranzitivní: Předpokládejme $(p,q)\ S\ (m,n)$ a $(m,n)\ S\ (r,s)$, tj. $pn = qm$ a $ms = nr$. K tomu, abychom ukázali, že S je tranzitivní relace, potřebujeme ověřit, že $(p,q)\ S\ (r,s)$, tj., že $ps = qr$. Protože $pn = qm$ a n je nenulové, máme $p = \frac{qm}{n}$. Odtud $ps = \frac{qm}{n} s = \frac{q}{n} ms = \frac{q}{n} nr = qr$. (Užili jsme rovnost $ms = nr$.) Tedy S je tranzitivní relace.

2.3.6 Třídy ekvivalence. Je dána relace ekvivalence R na množině A. *Třídou ekvivalence* R odpovídající prvku $a \in A$ nazýváme množinu $R[a] = \{b \in A \mid a\ R\ b\}$.

Množinu všech tříd dané ekvivalence, tj. množinu $\{R[a] \mid a \in A\}$ často nazýváme *faktorovou množinou podle ekvivalence* R a značíme A/R.

2.3.7 Příklady. Uvažujme relaci ekvivalence R z příkladu 2.3.4. Tato relace má dvě třídy ekvivalence, a to $R[a] = \{b \in A \mid a\ R\ b\}$. množinu všech sudých čísel a množinu všech lichých čísel.

Hledejme třídy ekvivalence S z příkladu 2.3.5 ke dvojicím $(p,q) \in A$. Např. s dvojicí $(1,2)$ jsou v relaci všechny dvojice (s,t) pro něž $1 \cdot t = s \cdot 2$, tj. $t = 2s$. Kdybychom si dvojice představili jako zlomky, byly by to všechny zlomky, které po zkrácení dávají racionální číslo $\frac{1}{2}$. Platí, že $(s,t)\ S\ (p,q)$ právě tehdy, když $\frac{s}{t} = \frac{p}{q}$. Tedy třídy ekvivalence odpovídají jednotlivým racionálním číslům.

2.3.8 Tvrzení. Nechť R je ekvivalence na množině A. Množina tříd ekvivalence $\{R[a] \mid a \in A\}$ má tyto vlastnosti:

1. Každý prvek $a \in A$ leží v $R[a]$ a platí rovnost $\bigcup\{R[a] \mid a \in A\} = A$.
2. Třídy ekvivalence $R[a]$ jsou po dvou disjunktní, tj. jestliže $R[a] \cap R[b] \neq \emptyset$, pak $R[a] = R[b]$.

2.3.9 Rozklad množiny. Mějme neprázdnou množinu A. Množina $\mathcal{S}$ neprázdných podmnožin množiny A se nazývá *rozklad množiny* A, jestliže jsou splněny následující podmínky:

1. Každý prvek $a \in A$ leží v některé podmnožině z $\mathcal{S}$, tj. $\bigcup \mathcal{S} = A$.
2. Prvky množiny $\mathcal{S}$ jsou po dvou disjunktní; tj. jestliže $X \cap Y \neq \emptyset$, pak $X = Y$ pro všechna $X, Y \in \mathcal{S}$.

2.3.10 Tvrzení. Nechť $\mathcal{S}$ je rozklad množiny A. Pak relace $R_{\mathcal{S}}$ definovaná:

$$a\ R_{\mathcal{S}}\ b \quad \text{právě tehdy, když} \quad a, b \in X \text{ pro nějaké } X \in \mathcal{S}$$

je ekvivalence na množině A.

2.3.11 Poznámka. Je dobré si uvědomit, že vyjdeme-li od ekvivalence R, utvoříme k ní rozklad na její třídy ekvivalence, načež k tomuto rozkladu utvoříme (podle předchozího tvrzení) opět ekvivalenci, pak dostaneme původní ekvivalenci R. Podobně, kdybychom vyšli od rozkladu, utvořili k němu ekvivalenci a k této ekvivalenci rozklad na její třídy, dostali bychom původní rozklad. Je proto jedno, zda se na ekvivalenci díváme jako na vztah (tj. relaci) nebo s ní pracujeme jako s rozkladem na množiny těch prvků, které jsou pro nás „stejné“. Jedná se tedy o dva různé pohledy na tutéž matematickou realitu.

2.3.12 Uspořádání. Relaci R na množině A nazveme *uspořádání (částečné uspořádání)*, jestliže je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

2.3.13 Příklady uspořádání.

1. Známé uspořádání reálných čísel je uspořádání ve smyslu předchozí definice, neboť pro všechna reálná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí: $a \leq a$; jestliže $a \leq b$ a také $b \leq a$, pak nutně $a = b$; jestliže $a \leq b$ a $b \leq c$, pak také $a \leq c$.

2. Označme A množinu všech podmnožin množiny U. Pak relace $\subseteq$ „být podmnožinou“ je relace uspořádání na A. Ověření reflexivity, antisymetrie a tranzitivity přenecháme čtenáři.

3. Položme $A = \mathbb{N}$, kde $\mathbb{N}$ je množina přirozených čísel. Pak relace dělitelnosti definovaná $m \mid n$ právě tehdy, když m je dělitel čísla n (tj. když $n = k \cdot m$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$) je relace uspořádání. Ano, pro každá tři přirozená čísla m, n, k platí $m \mid m$; jestliže $m \mid n$ a $n \mid m$, pak $m = n$; jestliže $m \mid n$ a $n \mid k$, pak také $m \mid k$.

2.3.14 Největší a maximální prvek. Mějme množinu A a na ní relaci uspořádání $\preceq$. Řekneme, že prvek a množiny A je *největší prvek* množiny A, jestliže pro všechny prvky $x \in A$ platí $x \preceq a$. Řekneme, že prvek b množiny A je *maximální prvek* množiny A, jestliže neexistuje prvek $y \in A$, $y \neq b$, takový, že $b \preceq y$.

2.3.15 Tvrzení. Mějme množinu A a na ní uspořádání $\preceq$. Množina A má nejvýše jeden největší prvek; navíc, je-li a největší prvek množiny A, pak je jediným maximálním prvkem množiny A. Nemá-li množina A největší prvek, může mít několik maximálních prvků, anebo žádný.

2.3.16 Nejmenší a minimální prvek. Mějme množinu A a na ní relaci uspořádání $\preceq$. Řekneme, že prvek a množiny A je *nejmenší prvek* množiny A, jestliže pro všechny prvky $x \in A$ platí $a \preceq x$. Řekneme, že prvek b množiny A je *minimální prvek* množiny A jestliže neexistuje prvek $y \in A$, $y \neq b$, takový, že $y \preceq b$.

2.3.17 Tvrzení. Mějme množinu A a na ní uspořádání $\preceq$. Množina A má nejvýše jeden nejmenší prvek. Pokud nejmenší prvek existuje, je jediným minimálním prvkem. Nemá-li množina A nejmenší prvek, může mít několik minimálních prvků, anebo žádný.

2.3.18 Nesrovnatelné prvky. Mějme množinu A a na ní uspořádání $\preceq$. Řekneme, že prvky $a, b \in A$ jsou *nesrovnatelné*, jestliže neplatí ani $a \preceq b$, ani $b \preceq a$.

2.3.19 Poznámka. Má-li uspořádání několik maximálních prvků, pak jsou tyto prvky nesrovnatelné. Totéž platí o minimálních prvcích.