Kapitola 4

Predikátová logika

Výroková logika nezahrnuje všechny úsudky, které považujeme za správné. Uvažujme např. úsudek:

Petr hraje na housle.
Každý, kdo hraje na housle, má hudební sluch.

Petr má hudební sluch.

Jeho správnost žádným způsobem z výrokové logiky nevyplývá. První věta totiž ve výrokové logice představuje elementární výrok p. Druhá věta má tvar implikace dvou elementárních výroků: $q \Rightarrow t$, kde q je výrok „Každý kdo hraje na housle." a t je výrok „Má hudební sluch.". Poslední věta je elementární výrok r, kde r je výrok „Petr má hudební sluch.". Ve výrokové logice sémantický důsledek

$$\{p, q \Rightarrow t\} \models r$$

není správný. Správnost úsudku spočívá ve vnitřní struktuře jednotlivých elementárních výroků, a tuto strukturu výroková logika není schopna popsat. Ve výrokové logice jsou totiž elementární výroky dále neanalyzovatelné atomy formálního jazyka.

Abychom předchozí úsudek popsali, musíme uvážit vnitřní strukturu jednotlivých vět. Teprve na základě struktury těchto výroků budeme schopni rozhodnout, který úsudek je správný a který nikoli. A tím se zabývá predikátová logika.

4.1 Neformální zavedení predikátové logiky

Zamysleme se nad tím, co potřebujeme k popsání výroku „Petr hraje na housle.". Výrok se týká „Petra" jakožto „objektu" a vlastnosti, kterou Petr má, tj. vlastnosti „hrát na housle". Obdobnou strukturu má i třetí věta „Petr má hudební sluch.". Vlastností tady je „mít hudební sluch". Prostřední věta navíc mluví o „každém" chápáno jako každém objektu (jednotlivci). Má opravdu alespoň zčásti strukturu implikace: Každý objekt, který má vlastnost „hrát na housle", má i vlastnost „mít hudební sluch".

Označíme H vlastnost „hrát na housle" a S vlastnost „mít hudební sluch". Nyní lze náš úsudek napsat ve zkrácenější podobě takto:

Petr má H.
Každý, kdo má H, má i S.

Petr má S.

I to je však zbytečně dlouhý zápis. Pišme místo „Petr má H." zkráceně $H(p)$, kde p označuje Petra. Obdobně zkrátíme zápis třetí věty na $S(p)$. Abychom obdobným způsobem zkrátili i prostřední větu, zavedeme zkratku za „každý", též „pro všechny". Tuto zkratku označíme symbolem $\forall$ a nazveme ji *obecným* (neboli *universálním*) *kvantifikátorem.* Kvantifikátor je vždy následován proměnnou. Formuli $\forall x$ čteme „pro každé x". Nejde nám totiž o to zachytit jen „každý", ale „každý objekt". Proměnné značíme $x, y, \ldots$, a zastupují nám objekty v případě, že objekty nemáme konkrétně zadané. Prostřední věta bude mít tvar: $\forall x\,(H(x) \Rightarrow S(x))$. Tedy celý úsudek zapíšeme následovně:

$H(p)$
$\forall x\,(H(x) \Rightarrow S(x))$

$S(p)$

Vlastnostem či vztahům budeme říkat *predikáty*, vyznačeným objektům *konstanty.*

4.1.1 Poznámka. Obecný kvantifikátor „$\forall x$" je vlastně zobecnění konjunkce, jakési její „nekonečné rozšíření".

4.1.2 Uvažujme ještě jeden úsudek:

Petr hraje na housle.
Petr má hudební sluch.

Někdo, kdo hraje na housle, má i hudební sluch.

Přitom poslední větu upřesníme: Někdo (ve smyslu existuje aspoň jeden objekt), kdo hraje na housle, má hudební sluch. Formalizujme tento úsudek. První dvě věty už máme zformalizovány: $H(p)$ a $S(p)$. K formalizaci třetí věty potřebujeme symbol pro „aspoň jeden", „někdo" atd. Tímto symbolem je *existenční kvantifikátor* $\exists$ opět následovaný proměnnou. Symbol $\exists x$ čteme „existuje x tak, že. . . ". Poslední věta říká, že někdo (aspoň jeden) objekt má vlastnost „hrát na housle" a současně i vlastnost „mít hudební sluch". Proto její fomalizace je $\exists x\,(H(x) \wedge S(x))$. Celý úsudek má tvar:

$H(p)$
$S(p)$

$\exists x\,(H(x) \wedge S(x))$

4.1.3 Poznámka. Existenční kvantifikátor „$\exists x$" je vlastně zobecnění disjunkce, jakési její „nekonečné rozšíření".

4.1.4 Uvedeme ještě jeden úsudek, který je typický pro predikátovou logiku.

Je-li přirozené číslo sudé, pak jeho následník je číslo liché.
Číslo 2 je sudé.

Následník čísla 2 je číslo liché.

Vlastnosti (predikáty), které nás zajímají v tomto úsudku jsou: „být sudým přirozeným číslem", označíme ji S, a „být lichým přirozeným číslem", označíme ji L. Dále máme jeden objekt (konstantu), a to číslo 2. Pak je tu ještě „následník přirozeného čísla". Tady následníka nechápeme jako vlastnost; neptáme se, zda nějaký objekt je následník jiného nebo ne. Tady s následníkem přirozeného čísla pracujeme jako s přirozeným číslem, tj. jako s objektem. Ovšem tento objekt je zadán nepřímo — pomocí čísla, které mu předchází. Budeme se proto na „následníka“ dívat jako na funkci, označíme ji f, která každému přirozenému číslu přiřadí opět přirozené číslo a to $f\colon n \mapsto n+1$.

Nyní již můžeme zformalizovat druhou a třetí větu: $S(2)$ a $L(f(2))$. První věta bude obsahovat kvantifikátor. Z české formulace na první pohled není úplně jasné který. Tato nepřesnost ve vyjádření, zda náš výrok má platit pro všechny objekty nebo jen pro některé z nich, je vlastní téměř všem přirozeným jazykům. Přeformulujeme proto větu „trochu jiným způsobem“ tak, aby byla kvantifikace jasnější. V našem případě má první věta stejný smysl jako tvrzení „Kdykoli je číslo sudé, pak jeho následník je číslo liché.“ Proto formalizace první věty má tvar: $\forall x\,(S(x) \Rightarrow L(f(x)))$. Celý úsudek je

$$\begin{array}{l} \forall x\,(S(x) \Rightarrow L(f(x))) \\ S(2) \\ \hline L(f(2)) \end{array}$$

4.1.5 Další příklady. Zformalizujme následující věty. Vždy uvedeme, které vlastnosti (predikáty), konstanty a funkce používáme.

a) Petrův otec je varhaník.

b) Něčí otec je varhaník.

c) Každý čtverec reálného čísla je nezáporný.

d) Každé celé číslo má předchůdce.

e) Je-li přirozené číslo větší než 0, je jeho následník větší než 1.

4.1.6 Řešení.

a) Naše objekty jsou lidé. Dále potřebujeme jeden predikát (vlastnost) $V(\_)$, a to vlastnost „být varhaníkem“. Rovněž potřebujeme funkci o, která každému člověku přiřadí jeho otce a nakonec potřebujeme konstantu p pro Petra. Formule má tvar:

$$V(o(p)).$$

b) Tady si vystačíme s predikátem a funkcí z minulého příkladu; „něčí“ popíšeme existenčním kvantifikátorem:

$$\exists x\, V(o(x)).$$

c) Objekty jsou reálná čísla. Potřebujeme jeden predikát $K(\_)$, který označuje vlastnost „být nezáporné číslo“, a funkci f, která každému reálnému číslu přiřadí jeho čtverec, tj. $f\colon x \mapsto x^2$. Formule má tvar

$$\forall x\, K(f(x)).$$

d) Objekty jsou celá čísla. Pro formalizaci této věty potřebujeme vztah mezi dvěma celými čísly. (Vztahu, který se týká dvou objektů, budeme říkat *binární predikát.*) Dvě čísla a, b jsou ve vztahu Q, jestliže první z nich, a, je předchůdcem čísla druhého, b. Fakt, že dvojice čísel a, b je ve vztahu Q zapíšeme $Q(a, b)$. Věta „Každé celé číslo má předchůdce.“ odpovídá významem větě „Pro každé celé číslo existuje jeho předchůdce.“ a můžeme ji zformalizovat:

$$\forall x\, \exists y\, Q(y, x).$$

e) Objekty jsou přirozená čísla. Mohli bychom sice zavést dva predikáty: Jeden, který znamená vlastnost být větší než 0, a druhý, který znamená vlastnost být větší než 1, ale srozumitelnosti formalizace bychom tím neprospěli. Zavedeme raději jeden binární predikát a to „být větší než“. Tato vlastnost je dobře známá a značí se symbolem „>“. Aby naše formalizace byla co nejsrozumitelnější v případě predikátu „být větší“ zvolíme zápis $a > b$ místo přesného leč nesmyslně těžkopádného zápisu $>(a, b)$. Použijeme dvě konstanty a to číslo 0 a číslo 1 a funkci následníka f. Formule má tvar:

$$\forall x\, ((x > 0) \Rightarrow (f(x) > 1)).$$