1.3.18 Věta. Pro žádnou množinu S neexistuje zobrazení $f\colon S \to P(S)$, které je na $P(S)$.

1.3.19 Zdůvodnění. Předpokládejme, že f je zobrazení množiny S do $P(S)$. Definujme

$$C = \{x \in S \mid x \notin f(x)\}.$$

Uvědomte si, že $f(x) \in P(S)$, tj. $f(x) \subseteq S$.

Tím jsme definovali podmnožinu C množiny S. Ukážeme, že C není f-obrazem žádného prvku $y \in S$ [tj. $C \neq f(y)$ pro žádné $y \in S$]. Tím bude ukázáno, že zobrazení f není na.

Pro každý prvek $a \in S$ platí buď $a \in C$ nebo $a \notin C$. Jestliže $a \in C$, pak podle definice množiny C platí $a \notin f(a)$. Tudíž $C \neq f(a)$. Jestliže $a \notin C$, pak podle definice množiny C platí $a \in f(a)$. Tudíž i v tomto případě $C \neq f(a)$. Tedy množina C není rovna žádnému obrazu $f(a)$. Ukázali jsme, že zobrazení f není na celé $P(S)$.

Protože f bylo libovolné zobrazení S do $P(S)$, ukázali jsme, že neexistuje zobrazení množiny S na $P(S)$.

1.3.20 Poznámka. Ukázali jsme, že pro žádnou množinu S neexistuje zobrazení množiny S *na* množinu všech jejích podmnožin $P(S)$. To intuitivně říká, že S „má méně prvků“ než $P(S)$. Povšimněte si přitom podobnosti předchozí úvahy s Russellovým paradoxem. (Cantor ovšem takto uvažoval více než 10 let před Russellem!)

Kapitola 2

Relace

2.1 Binární relace z množiny do množiny

2.1.1 Definice. *Relace* (přesněji *binární relace*) *z množiny A do množiny B* je libovolná množina uspořádaných dvojic $R \subseteq A \times B$. Jestliže $A = B$, mluvíme o *relaci na množině A*.

2.1.2 Příklady.

1. Být dědečkem. Jedná se o relaci R na množině A všech lidí. Dvojice (a, b) patří do R právě tehdy, když osoba a je dědečkem osoby b.

2. Být stejně dlouhé. Jedná se o relaci na množině všech objektů (tady se musíte rozhodnout, které objekty chcete uvažovat); pro dva objekty a, b platí $(a, b) \in R$ právě tehdy, když oba objekty jsou stejně dlouhé.

3. Být podmnožinou. Jedná o relaci R na množině všech podmnožin množiny U. Pro dvě množiny X, Y, $X \subseteq U$, $Y \subseteq U$ platí: (X, Y) je v relaci R právě tehdy, když množina X je podmnožinou množiny Y.

4. Být větší nebo rovno. Jedná se např. o relaci R na množině všech přirozených čísel $\mathbb{N}$, kde $(m, n) \in R$ právě tehdy, když $m \leq n$.

5. Být studentem studijní skupiny. Jedná se o relaci R z množiny A všech studentů prvého ročníku (např. FEL) do množiny B všech studijních skupin. Dvojice (a, K), kde $a \in A$ a K je studijní skupina, patří do relace R právě tehdy, když je student a zapsán do skupiny K.

6. Funkce sinus. Jedná o relaci R na množině reálných čísel $\mathbb{R}$ definovanou: $(x, y) \in R$ právě tehdy, když $y = \sin x$.

2.1.3 Konvence. Zápis $(a, b) \in R$ je často nepříliš šťastný; nikoho by nenapadlo psát $(X, Y) \in \subseteq$, či dokonce $(2, 3) \in \leq$. Proto v dalším budeme místo zápisu $(a, b) \in R$ psát $a\ R\ b$.

2.1.4 Každé zobrazení $f : A \to B$ je relace (nebo přesněji definuje relaci); a to relace f z A do B definovaná $x\ f\ y$ právě tehdy, když $y = f(x)$. Ne každá relace z A do B je zobrazením množiny A do množiny B; k tomu, aby relace R byla zobrazením je třeba (a stačí), aby pro každé $a \in A$ existovalo právě jedno $b \in B$ takové, že $a\ R\ b$.

Pro relace přejímáme také termíny, které jsou běžné, když mluvíme o zobrazení. *Definičním oborem* relace R je množina všech $a \in A$, pro něž existuje $b \in B$ takové, že $a\ R\ b$; *oborem hodnot* relace R je množina všech $b \in B$, pro něž existuje $a \in A$ takové, že $a\ R\ b$.

2.1.5 Poznámka. Jestliže obě množiny A a B jsou konečné, pak relaci $R \subseteq$ $\subseteq A \times B$ můžeme representovat maticí takto:

Označme $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ a $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$. Položme

$$M_R = (m_R(i,j))_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,k},$$

kde $m_R(i,j) = 1$ pro $(a_i, b_j) \in R$ a $m_R(i,j) = 0$ pro $(a_i, b_j) \notin R$.

Uvědomte si, že se vlastně jedná o charakteristickou funkci relace R jakožto podmnožiny množiny všech uspořádaných dvojic $A \times B$.

2.2 Operace s relacemi

2.2.1 Podrelace. Řekneme, že relace R je *podrelací* relace S, jestliže $R \subseteq S$; tj. je-li $a\ R\ b$, pak také platí $a\ S\ b$.

Např. „býti menší než" je podrelací relace „býti menší nebo rovno".

2.2.2 Množinové operace s relacemi. Mějme dvě relace R a S z množiny A do množiny B. Pak *průnikem* relací R a S je relace $R \cap S$; *sjednocením* těchto relací je relace $R \cup S$; *doplňkem* relace R je relace $\overline{R} = (A \times B) \setminus R$.

Např. označíme-li T relaci rovnosti na množině reálných čísel $\mathbb{R}$ a S relaci býti ostře menší také na množině $\mathbb{R}$, pak $T \cap S = \emptyset$ a $T \cup S$ je relace býti menší nebo roven. Doplňkem relace T je nerovnost, tj. relace $\overline{T} = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq$ $\neq b\}$.

2.2.3 Inversní relace. Mějme relaci R z množiny A do množiny B. Pak *inversní relací* k relaci R je relace R^{-1} z množiny B do množiny A definovaná takto:

$$x\ R^{-1}\ y \quad \text{právě tehdy, když} \quad y\ R\ x.$$

2.2.4 Poznámka. Uvědomte si, že inversní relace k relaci z příkladu 6 na straně 8 existuje: Je to relace R^{-1}, kde $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ a platí $x\ R^{-1}\ y$ právě tehdy, když $y\ R\ x$, tj. právě tehdy, když $x = \sin y$. Přesto z matematiky víte, že inversní funkce k funkci $y = \sin x$ existuje pouze tehdy, když se omezíme na funkci $f(x) = \sin x$ definovanou na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Je to proto, že inversní relace sice existuje, ale není již zobrazením; není totiž pravda, že pro každé $-1 \leq x \leq 1$ existuje právě jedno $y \in \mathbb{R}$ tak, že $x = \sin y$.

2.2.5 Poznámka. Jsou-li množiny A, B konečné a representujeme-li relaci R maticí M_R, pak matice inversní relace R^{-1} je matice transponovaná k matici M_R. Tj.
$$m_{R^{-1}}(j,i) = m_R(i,j),\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,k.$$

2.2.6 Skládání relací. Mějme relaci R z množiny A do množiny B a S relaci z množiny B do množiny C. Pak *složená relace* $R \circ S$ je relace z množiny A do množiny C definovaná předpisem:

$$a\ R \circ S\ c \quad \text{právě tehdy, když existuje } b \in B \text{ takové, že} \quad a\ R\ b \ \text{ a } \ b\ S\ c.$$

2.2.7 Poznámka. Je-li M_R matice relace R a M_S matice relace S, pak matice relace $R \circ S$ je rovna součinu

$$M_{R \circ S} = M_R \cdot M_S,$$

s tím, že „počítáme“ $1 + 1 = 1$.

2.2.8 Tvrzení. Skládání relací je asociativní. Přesněji, je-li R relace z množiny A do množiny B, relace S z množiny B do množiny C a relace T z množiny C do množiny D, pak platí

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T.$$

2.2.9 Poznámka. Skládání relací **není** komutativní, tj. neplatí $R \circ S = S \circ R$. To je vidět z následujícího příkladu:

Uvažujme množinu A všech lidí v České republice a dvě relace R, S definované na A:

$$a\ R\ b \quad \text{právě tehdy, když } a \text{ je sourozenec } b \text{ a } a \neq b$$
$$c\ S\ d \quad \text{právě tehdy, když } c \text{ je dítětem } d.$$

Ukažme, že $R \circ S \neq S \circ R$.

Abychom ukázali, že $R \circ S \neq S \circ R$, stačí najít dva lidi x, y tak, že platí $x\ R \circ S\ y$ a neplatí $x\ S \circ R\ y$. Uvažujme dvojici synovec a a strýc b. Platí $a\ S \circ R\ b$, protože jeden z rodičů a je sourozencem strýce b. Neplatí ale, že $a\ R \circ S\ b$ protože to by znamenalo, že některý ze sourozenců a by byl rodičem strýce b.