Kapitola 5

Rezoluční metoda v predikátové logice

Rezoluční metoda v predikátové logice je, jak napovídá její název, obdobná stejnojmenné metodě ve výrokové logice. Ovšem vzhledem k bohatší vnitřní struktuře formulí predikátové logiky je složitější. Používá se v logickém programování a je základem programovacího jazyka Prolog.

Nejprve zavedeme literály a klausule v predikátové logice.

5.0.8 Literál. *Literál* je atomická formule (tzv. *pozitivní literál*), nebo negace atomické formule (tzv. *negativní literál*). *Komlementární literály* jsou dva literály, z nichž jeden je negací druhého.

5.0.9 Klausule. *Klausule* je sentence taková, že všechny kvantifikátory jsou obecné a stojí na začátku sentence (na jejich pořadí nezáleží) a za nimi následují literál nebo disjunkce literálů.

Tedy např. $R(a,b)$, $\forall x\,(\neg P(x) \vee Q(a,b))$, $\forall x\,\forall y\,(R(x,y) \Rightarrow P(x))$ jsou klausule; $\exists x\,P(x)$, $\forall x\,\neg(P(x) \Rightarrow Q(x))$ *nejsou* klausule.

5.1 Převedení sentence na klausální tvar

Nejprve vyřešíme, jak pro danou množinu formulí M najít množinu klausulí S takovou, že množina M je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná množina S. (Všimněte si, že tentokrát nepožadujeme, aby množiny S a M byly tautologicky ekvivalentní — to totiž obecně není možné.)

Jedná se o obdobu konjunktivní normální formy pro danou formuli ve výrokové logice. Toto nám následně pomůže využít rezoluční metodu pro zjištění, zda daná množina sentencí je splnitelná i zda daná sentence sémanticky vyplývá z dané množiny sentencí.

5.1.1 Tvrzení. Pro každou sentenci φ existuje množina klausulí S_φ taková, že sentence φ je splnitelná právě tehdy, když S_φ je splnitelná.

5.1.2 Uvedeme postup, kterým pro danou sentenci φ zkonstruujeme množinu klausulí S_φ.

1. Přejmenujeme proměnné formule φ tak, aby každý vstup kvantifikátoru vázal jinou proměnnou. (Tj. např. formuli $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x,a)$ nahradíme formulí $\forall x\, P(x) \vee \forall y\, Q(y,a)$.)

2. Spojky $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ nahradíme spojkami $\neg$, $\vee$ a $\wedge$ na základě známých tautologických rovností
$$\begin{array}{rcl} \alpha \Rightarrow \beta & \models\!\!\!\!\dashv & \neg\alpha \vee \beta \\ \alpha \Leftrightarrow \beta & \models\!\!\!\!\dashv & (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta) \end{array}$$

3. Přesuneme spojku $\neg$ „co nejníže“ v derivačním stromu formule, tj. až před atomické formule. Použijeme k tomu vztahy
$$\begin{array}{rcl} \neg\exists x\, \alpha & \models\!\!\!\!\dashv & \forall x\, \neg\alpha \\ \neg\forall x\, \alpha & \models\!\!\!\!\dashv & \exists x\, \neg\alpha \\ \neg(\alpha \vee \beta) & \models\!\!\!\!\dashv & \neg\alpha \wedge \neg\beta \\ \neg(\alpha \wedge \beta) & \models\!\!\!\!\dashv & \neg\alpha \vee \neg\beta \\ \neg\neg\alpha & \models\!\!\!\!\dashv & \alpha \end{array}$$

4. Přesuneme spojku $\vee$ „co nejníže“ v derivačním stromu formule pomocí vztahů
$$\begin{array}{rcl} \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) & \models\!\!\!\!\dashv & (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \\ \alpha \vee (\forall x\, \beta) & \models\!\!\!\!\dashv & \forall x\, (\alpha \vee \beta) \\ \alpha \vee (\exists x\, \beta) & \models\!\!\!\!\dashv & \exists x\, (\alpha \vee \beta) \end{array}$$
Přitom dáváme přednost první rovnosti. Teprve v případě, že první rovnost nelze aplikovat, používáme další dvě rovnosti. Uvědomte si, že druhá rovnost je opravdu tautologická ekvivalence pouze proto, že formule α neobsahuje proměnnou x (viz krok 1).

5. Použijeme tautologickou ekvivalenci
$$\forall x\, (\alpha \wedge \beta) \quad \models\!\!\!\!\dashv \quad (\forall x\, \alpha) \wedge (\forall x\, \beta)$$
k distribuci obecného kvantifikátoru. Jestliže nyní formule neobsahuje existenční kvantifikátor, máme formuli ψ, která je konjunkcí klausulí. Tuto formuli tedy nahradíme množinou S_φ jejích klausulí.
V případě, že formule ψ obsahuje existenční kvantifikátor, provedeme skolemisaci, která je vysvětlena v další části.

5.2 Skolemizace

Poznamenejme, že termíny „skolemizace“, „skolemizační konstanta“ a „skolemizační funkční symbol“ jsou odvozeny od jména norského matematika — logika Thoralfa Skolema.

Ve všech předchozích krocích uvedeného postupu jsme vždy nahrazovali formuli formulí s ní tautologicky ekvivalentní; v posledním kroku pak formuli ψ množinou klausulí opět s ψ tautologicky ekvivalentní. To už není pravda pro skolemizaci. Zde nahradíme formuli ψ formulí ψ' takovou, že formule ψ je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná formule ψ' (obecně ale ne pro stejnou interpretaci). Dříve než ukážeme obecný postup, uvedeme dva příklady.

5.2.1 Příklad 1. Najděme klausuli ψ', která je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná sentence $\psi = \exists x\, P(x)$.

5.2.2 Řešení příkladu 1. Vezměme sentenci $\psi' = P(a)$, kde a je nějaký nový konstantní symbol. Není obtížné nahlédnout, že formule ψ je tautologickým důsledkem formule ψ'. Kdykoli v nějaké interpretaci $\langle U, [\![-]\!]\rangle$ je pravdivá formule ψ', pak je v této interpretaci pravdivá i formule ψ. Naopak to však neplatí, může existovat interpretace, která konstantní symbol a interpretuje tak, že $[\![a]\!]$ je zrovna některý prvek z U, který neleží v $[\![P]\!]$ (tj. nemá vlastnost P). Na druhé straně, kdykoli formule ψ je pravdivá v interpretaci $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, pak existuje prvek $d_0 \in U$ takový, že $d_0 \in [\![P]\!]$. To znamená, že změníme-li přiřazení $[\![-]\!]$ tak, že konstantní symbol a interpretujeme jako d_0, pak v této nové interpretaci je formule ψ' pravdivá.

Proto formuli $\exists x\, P(x)$ nahradíme formulí $P(a)$.

Konstantní symbol a použitý v minulém příkladě, se nazývá *skolemizační konstanta*.

5.2.3 Příklad 2. Najděme klausuli ψ', která je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná sentence $\psi = \forall x\, \exists y\, Q(x, y)$.

5.2.4 Řešení příkladu 2. Kdybychom položili $\psi' = \forall x Q(x, a)$, dostaneme klausuli, která je podstatně „silnější“ než původní formule ψ [uvědomte si, že formule ψ' by podle předchozího příkladu odpovídala formuli $\exists y\, \forall x\, Q(x, y)$]. Doporučujeme čtenáři, aby si zjistil význam obou formulí při interpretaci, kdy U je množina přirozených čísel a $Q(x, y)$ znamená, že přirozené čislo x je menší nebo rovno přirozenému čislu y.

Formuli ψ nahradíme formulí $\psi' = \forall x Q(x, f(x))$, kde f je nový unární funkční symbol. Nyní již opět platí, že formule ψ je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná formule ψ'. Podrobné zdůvodnění je podobné jako v předchozím příkladě.

Funkčnímu symbolu f z minulého příkladu se říká *skolemizační funkce*.

5.2.5 Obecný postup (pokračování bodů 1 – 5 z postupu 5.1.2

6. Obsahuje-li formule existenční kvantifikátor, nahradíme každou uzavřenou podformuli tvaru $\forall x_1 \dots \forall x_n\, \exists y\, \alpha(y)$ formulí $\forall x_1 \dots \forall x_n\, \alpha(f(x_1, \dots, x_n))$, kde f je libovolný *nový* funkční symbol arity n. Je-li $n = 0$, použijeme *nový* konstantní symbol a. Tomuto procesu se říká *skolemizace*, funkčnímu symbolu f *skolemizační funkce*, konstantě a *skolemizační konstanta*. Pokračujeme podle kroku 5 z 5.1.2.

Uvědomte si, že proměnné $x_1, \dots, x_n$ jsou právě všechny proměnné vázané obecným kvantifikátorem, na které narazíme při postupu derivačním stromem od $\exists y$ směrem ke kořeni.

5.2.6 Příklad 3. Převeďme na klausální tvar následující formuli

$$\varphi = \neg\forall x\, [\exists y\, Q(x, y) \Rightarrow \forall y\, \exists z\, \neg P(x, y, z)].$$

Jinými slovy, najděte množinu klausulí S_φ, která je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná sentence φ.

5.2.7 Řešení příkladu 3. Krok 1. Přejmenujeme proměnnou y na t v podformuli $\forall y\, \exists z\, \neg P(x,y,z)$, dostaneme

$$\varphi = \neg\forall x\, [\exists y\, Q(x,y) \Rightarrow \forall t\, \exists z\, \neg P(x,t,z)].$$

Krok 2. Nahradíme spojku $\Rightarrow$:

$$\neg\forall x\, [\neg(\exists y\, Q(x,y)) \vee \forall t\, \exists z\, \neg P(x,t,z)].$$

Krok 3. Přesuneme spojku $\neg$ až před atomické formule:

$$\begin{gathered}\neg\forall x\, [\neg(\exists y\, Q(x,y)) \vee \forall t\, \exists z\, \neg P(x,t,z)] \quad \models\!\!\!\dashv \\ \models\!\!\!\dashv \quad \exists x\, \neg[\neg(\exists y\, Q(x,y)) \vee \forall t\, \exists z\, \neg P(x,t,z)] \quad \models\!\!\!\dashv \\ \models\!\!\!\dashv \quad \exists x\, [\exists y\, Q(x,y) \wedge \neg(\forall t\, \exists z\, \neg P(x,t,z))] \quad \models\!\!\!\dashv \\ \models\!\!\!\dashv \quad \exists x\, [\exists y\, Q(x,y) \wedge \exists t\, \forall z\, P(x,t,z)].\end{gathered}$$

Krok 4 a 5 není potřeba. Protože sentence obsahuje existenční kvantifikátory, provedeme skolemizaci.

Postupně odstraňujeme existenční kvantifikátory a to v pořadí, v jakém se objevují v derivačním stromu.

$$\exists x\, [\exists y\, Q(x,y) \wedge \exists t\, \forall z\, P(x,t,z)] \leadsto \exists y\, Q(a,y) \wedge \exists t\, \forall z\, P(a,t,z),$$

zavedli jsme nový konstantní symbol a místo proměnné x a dosadili ho za *všechny* výskyty proměnné x.

$$\exists y\, Q(a,y) \wedge \exists t\, \forall z\, P(a,t,z) \leadsto Q(a,b) \wedge \exists t\, \forall z\, P(a,t,z) \leadsto Q(a,b) \wedge \forall z\, P(a,c,z).$$

Zavedli jsme nové konstantní symboly b, c; b místo proměnné y, c místo proměnné t. Dostali jsme formuli, která je konjunkcí dvou klausulí, proto

$$S_\varphi = \{Q(a,b), \forall z\, P(a,c,z)\}.$$