Kapitola 1

Množiny

1.1 Základní množinové pojmy

Pojem množiny nedefinujeme, pouze připomínáme, že množina je „souhrn, nebo soubor“ navzájem rozlišitelných objektů, kterým říkáme prvky.

1.1.1 Princip rovnosti. Dvě množiny S a T jsou si rovny (píšeme $S = T$) právě tehdy, když každý prvek množiny S je prvkem množiny T a naopak každý prvek T je také prvkem S.

1.1.2 Zadání množiny. Množinu můžeme zadat buď výčtem, tj. vypíšeme všechny její prvky, nebo naznačíme, které prvky obsahuje. Příkladem je např. množina sudých přirozených čísel $S = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$. Množinu zadáváme vlastností, která charakterizuje její prvky. Je-li $p(x)$ vlastnost, kterou prvek má nebo nemá, pak množinu C všech prvků x s vlastností $p(x)$ a žádných jiných zapisujeme

$$C = \{x \mid p(x)\}.$$

Množina všech sudých přirozených čísel je množina

$$\{m \mid m = 2k, k \text{ je přirozené číslo}\}.$$

Množina všech lichých přirozených čísel je množina

$$\{m \mid m = 2k + 1, k \text{ je přirozené číslo}\}.$$

1.1.3 Podmnožiny. Mějme dvě množiny S a T. Jestliže každý prvek množiny S je také prvkem množiny T, říkáme, že S je *podmnožina* T a píšeme $S \subseteq T$.

Jestliže platí $S \subseteq T$ a S a T jsou různé množiny, říkáme též, že S je *vlastní podmnožina* množiny T.

1.1.4 Tvrzení. $S = T$ právě tehdy, když $S \subseteq T$ a současně $T \subseteq S$.

1.1.5 Prázdná množina. *Prázdná množina* je množina, která nemá žádný prvek; značíme ji $\emptyset$.

$\emptyset \subseteq A$ pro každou množinu A.

1.1.6 Operace s množinami. Mějme dvě množiny A a B. Jejich *sjednocením* je množina

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\};$$

průnikem těchto dvou množin je množina

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ a } x \in B\}.$$

Rozdílem množin A a B (v tomto pořadí) je množina

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ a } x \notin B\}.$$

Je-li $A \subseteq U$, potom *doplňkem množiny A v množině U* je množina $U \setminus A$.

1.1.7 Disjunktní množiny. Je-li $A \cap B = \emptyset$, říkáme, že množiny A a B jsou *disjunktní.*

1.1.8 Kartézský součin. *Kartézský součin* množin A, B (značíme $A \times B$) je definován

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Jestliže se jedná o kartézský součin stejných množin, mluvíme o *kartézských mocninách* množiny A a píšeme A^2 místo $A \times A$, A^3 místo $A \times (A \times A)$, atd.

1.1.9 Potenční množina. *Potenční množina* $P(A)$ množiny A je rovna množině všech podmnožin množiny A; formálně

$$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Potenční množina je vždy neprázdná; obsahuje totiž prázdnou množinu.

1.1.10 Charakteristická funkce podmnožiny. *Charakteristická funkce* χ_A podmožiny $A \subseteq U$ je zobrazení $\chi_A \colon U \to \{0, 1\}$ definované

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in U \setminus A. \end{cases}$$

1.2 Russellův paradox

Russellův paradox. Uvažujme vlastnost „nebýti prvkem sebe sama“. Tuto vlastnost má řada množin: Např. množina $A = \{2\}$ není prvkem sebe sama, protože množina A má jediný prvek a to 2. Jistě byste našli řadu jiných množin, které nejsou prvkem sebe sama. Utvořme tedy tuto množinu:

$$R = \{x \mid x \notin x\}.$$

Podle principu abstrakce se jedná o dobře utvořenou množinu (nebýti prvkem sebe sama jako množiny je vlastnost $\mathcal{K}$). Nyní se můžeme ptát, zda množina R je prvkem sebe sama nebo ne. Jsou pouze dvě možnosti:

- $R \in R$; ale v tomto případě R musí splňovat vlastnost $\mathcal{K}$, a tedy $R \notin R$. Tedy má současně platit $R \in R$ a $R \notin R$ a to nastat nemůže.
- $R \notin R$; v tomto případě R nesplňuje vlastnost $\mathcal{K}$, a tedy není pravda, že $R \notin R$, tj. $R \in R$. Opět má současně platit $R \in R$ a $R \notin R$, takže ani tato situace nastat nemůže.

Chyba spočívá v tom, že jsme předpokládali, že R je množina.

1.2.1 Princip vydělení. Mějme vlastnost $\mathcal{K}$, kterou každý prvek má nebo nemá. Pak pro každou množinu U existuje množina skládající se právě ze všech prvků množiny U splňujících vlastnost $\mathcal{K}$. Tuto množinu zapisujeme $\{x \mid x \in \in U, x \text{ má vlastnost } \mathcal{K}\}$, nebo kratčeji $\{x \in U \mid \mathcal{K}\}$.

1.2.2 Uvědomte si, že existence množiny vytvořené podle tohoto principu

$$R = \{x \mid x \in U, x \notin x\}$$

již nevede ke sporu. Na otázku, zda R je prvkem sebe sama můžeme dát tuto odpověď:

- $R \notin R$; to znamená, že není pravda tvrzení $R \in U$ a současně $R \notin R$. Tedy buď není pravda $R \in U$ nebo není pravda $R \notin R$. Protože $R \notin R$, dostáváme, že $R \notin U$. Tato situace nastat může.

1.3 Mohutnost množin

1.3.1 Vzájemně jednoznačné zobrazení. Zobrazení f množiny A do množiny B je *vzájemně jednoznačné* právě tehdy, když je prosté a na.

Prosté zobrazení je takové, které dvěma různým prvkům x, y množiny A přiřazuje různé prvky $f(x)$, $f(y)$ množiny B.

Zobrazení je na B, jestliže pro každý prvek $y \in B$ existuje prvek $x \in A$ takový, že $f(x) = y$.

1.3.2 Mohutnost množin. Řekneme, že dvě množiny A, B mají *stejnou mohutnost*, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A na množinu B. Tento fakt značíme $|A| = |B|$.

1.3.3 Poznámka. Poznamenejme, že existuje-li vzájemně jednoznačné zobrazení f množiny A na množinu B, pak také existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny B na množinu A — inversní zobrazení k zobrazení f.

1.3.4 Příklad. Množina všech sudých čísel $S = \{0, 2, 4, \ldots\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a množina všech lichých čísel $L = \{1, 3, 5, \ldots\} = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ mají stejnou mohutnost.

Definujme zobrazení $f\colon S \to L$ předpisem:

$$f(2n) = 2n + 1 \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Toto zobrazení je prosté, protože z rovnosti $f(2n) = f(2m)$ pro dvě přirozená čísla n, m vyplývá $2n + 1 = 2m + 1$ a tedy $n = m$. Z popisu množiny L vyplývá, že zobrazení f je také na: Ano, každé liché přirozené číslo je tvaru $2m + 1$ a je tedy obrazem sudého čísla $2m$.

1.3.5 Spočetné a nespočetné množiny. Řekneme, že množina A je *spočetná*, má-li stejnou mohutnost jako množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$. Jestliže množina A je nekonečná a není spočetná, řekneme, že je *nespočetná*.

Pro množinu, která je buď spočetná nebo konečná, se často používá termín *nejvýše spočetná množina*.

1.3.6 Tvrzení. Množina A je spočetná právě tehdy, když ji lze uspořádat do prosté nekonečné posloupnosti (tj. neopakují se v ní prvky).

1.3.7 Příklad. Množina všech celých čísel je spočetná.

Množinu celých čísel uspořádáme do nekonečné prosté posloupnosti takto:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots, n, -n, \ldots$$

Přesněji číslo 0 je na 0-tém místě (tj. je to prvek a_0), číslo 1 je na prvním místě (prvek a_1), číslo -1 je na druhém místě (prvek a_2), číslo 2 je na místě $2 \cdot 2 - 1 = 3$ (prvek a_3), číslo -2 je na místě $2 \cdot 2 = 4$ (prvek a_4), atd. Obecně: celé kladné číslo n je na místě $2n - 1$ (prvek a_{2n-1}) a číslo $-n$ je na místě $2n$ (prvek a_{2n}).

Takto jsme uspořádali množinu $\mathbb{Z}$ do prosté nekonečné posloupnosti, a tedy je spočetná.

1.3.8 Tvrzení. Nekonečná podmnožina spočetné množiny je opět spočetná množina.

Tedy např. množina všech kladných přirozených čísel je spočetná.

1.3.9 Tvrzení. Sjednocení dvou nejvýše spočetných množin je nejvýše spočetná množina. Sjednocení dvou množin z nichž jedna je spočetná a druhá je nejvýše spočetná je spočetná množina.

1.3.10 Tvrzení. Kartézský součin dvou nejvýše spočetných množin je nejvýše spočetná množina.

1.3.11 Ukážeme, že množinu $C = A \times B$, kde A a B jsou spočetné množiny ($A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ a $B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$), lze uspořádat do prosté posloupnosti podle následujícího schematu:

$$\begin{array}{ccccccc}
(a_0, b_0) & & (a_0, b_1) & & (a_0, b_2) & & \ldots \\
& \swarrow & & \swarrow & & & \\
(a_1, b_0) & & (a_1, b_1) & & (a_1, b_2) & & \ldots \\
& \swarrow & & \swarrow & & & \\
(a_2, b_0) & & (a_2, b_1) & & (a_2, b_2) & & \ldots \\
& \swarrow & & \swarrow & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Na schematu je naznačeno, jak množinu C uspořádat. Máme

$$C = \{(a_0, b_0), (a_0, b_1), (a_1, b_0), (a_0, b_2), (a_1, b_1), (a_2, b_0), (a_0, b_3), \ldots\}.$$

Přesný popis je tento: dvojice (a_i, b_j) bude v posloupnosti na místě $k = i + \frac{(i+j)(i+j+1)}{2}$.

1.3.12 Příklad. Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná.

Každé racionální číslo lze reprezentovat jako zlomek $\frac{p}{q}$, kde q je nenulové přirozené číslo a p je celé číslo. Tedy zlomky můžeme chápat jako uspořádané dvojice (p, q), kde p je čitatel a q jmenovatel racionálního čísla $\frac{p}{q}$. Navíc množina celých čísel je spočetná, stejně jako množina všech nenulových přirozených čísel. Proto množina M všech dvojic (p, q) je spočetná. Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je nyní nekonečná podmnožina množiny M která obsahuje pouze ty dvojice (p, q), kde p a q jsou nesoudělné. Proto je množina $\mathbb{Q}$ spočetná.

1.3.13 Tvrzení. Sjednocení spočetně mnoha nejvýše spočetných množin je nejvýše spočetná množina.

Jinak řečeno: Jsou-li $A_0, A_1, \ldots A_n, \ldots$ nejvýše spočetné množiny, pak jejich sjednocení $A_0 \cup A_1 \cup \ldots = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ je nejvýše spočetná množina.

Pro zdůvodnění je možné použít stejného schematu jako pro kartézský součin.

1.3.14 Příklad. Mějme neprázdnou množinu A, která je nejvýše spočetná. Množina $A^\star$ všech konečných posloupností prvků z A, je spočetná.

Množinu všech konečných posloupností rozdělíme do množin A_i, $i \in \mathbb{N}$, tak, že množina A_i obsahuje přesně všechny konečné posloupnosti délky i. Pak platí:

$$A^\star = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i.$$

Přitom každá z množin A_i je nejvýše spočetná. Je tedy $A^\star$ spočetné sjednocení neprázdných nejvýše spočetných množin A_i splňujících

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{pro různá} \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Proto je $A^\star$ spočetná množina.

1.3.15 Věta. Množina všech podmnožin množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ není spočetná.

1.3.16 Cantorova diagonální metoda. Každou podmnožinu množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ si můžeme představit jako její charakteristickou funkci, tj. jako nekonečnou posloupnost nul a jedniček. Cantorova diagonální metoda ukazuje (sporem), že množina všech nekonečných posloupností nul a jedniček je nespočetná.

Předpokládejme, že množina všech nekonečných posloupností nul a jedniček je spočetná, tudíž ji můžeme uspořádat do prosté nekonečné posloupnosti. Znázorněme si to schematicky — v prvním řádku máme posloupnost s_0, v druhém řádku posloupnost s_1, ve třetím řádku posloupnost s_2, atd.

$$\begin{array}{ccccccccc}
s_0 & = & \boxed{s_0(0),} & s_0(1), & s_0(2), & s_0(3), & s_0(4), & s_0(5), & \ldots \\
s_1 & = & s_1(0), & \boxed{s_1(1),} & s_1(2), & s_1(3), & s_1(4), & s_1(5), & \ldots \\
s_2 & = & s_2(0), & s_2(1), & \boxed{s_2(2),} & s_2(3), & s_2(4), & s_2(5), & \ldots \\
s_3 & = & s_3(0), & s_3(1), & s_3(2), & \boxed{s_3(3),} & s_3(4), & s_3(5), & \ldots \\
s_4 & = & s_4(0), & s_4(1), & s_4(2), & s_4(3), & \boxed{s_4(4),} & s_4(5), & \ldots \\
s_5 & = & s_5(0), & s_5(1), & s_5(2), & s_5(3), & s_5(4), & \boxed{s_5(5),} & \ldots \\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

Vytvoříme novou posloupnost nul a jedniček a ukážeme o ní, že nebyla vypsána. Je to posloupnost $\overline{s}$ definovaná takto: Bylo-li v prvním rámečku schematu číslo 1, začíná $\overline{s}$ číslem 0; bylo-li v prvním rámečku číslo 0, začíná posloupnost číslem 1. Jinými slovy, posloupnost $\overline{s}$ má na nultém místě to druhé z čísel 0 a 1, než které má posloupnost s_0. Dále postupujeme obdobně: Jestliže v druhém rámečku má posloupnost s_1 číslo 0, položíme $\overline{s}(1)$ rovno 1; je-li $s_1(1) = 1$, položíme $\overline{s}(1) = 0$. Hodnota $\overline{s}(2)$ bude číslo $1 - s_2(2)$, atd.

Formálně zápis vypadá takto: $\overline{s} = \{\overline{s}(0), \overline{s}(1), \overline{s}(2), \ldots, \overline{s}(n), \ldots\}$, kde $\overline{s}(n) = 1 - s_n(n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\overline{s}$ mezi posloupnostmi $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ není, neboť od posloupnosti s_0 se liší na nultém místě, od posloupnosti s_1 se liší na prvním místě, od posloupnosti s_2 se liší na druhém místě, ... od n-té posloupnosti s_n se liší na n-tém místě. Dospěli jsme ke sporu s předpokladem, že jsme na začátku vypsali všechny posloupnosti. Tedy množina všech nekonečných posloupností nul a jedniček není spočetná.

1.3.17 Poznámka. Obdobně jako jsme ukázali, že množina všech podmnožin množiny přirozených čísel je nespočetna, je možné ukázat, že množina všech reálných čísel v otevřeném intervalu $(0, 1)$ je také nespočetná.