Kapitola 1

Množiny a relace

1.1 Mohutnost množin

1.1.1 Příklad. V paralelce je 200 studentů, 140 z nich mluví anglicky, 80 studentů mluví německy, 20 studentů nemluví ani jedním z těchto jazyků. Kolik studentů mluví anglicky i německy?

Výsledek. 40.

1.1.2 Příklad. Ve stejné skupině studentů sledujeme ještě francouzštinu. Víme, že 40 studentů mluví francouzsky a 5 studentů nemluví ani anglicky, ani německy, ani francouzsky. Stačí to k určení počtu studentů, kteří mluví všemi třemi jazyky?

Výsledek. Nestačí; všemi jazyky může mluvit jakýkoli počet studentů mezi 0 a 25.

1.1.3 Příklad. Jsou dány množiny $A = \{0, 1, 2\}$ a $B = \{a, b\}$. Napište všechna zobrazení z A do B. Kolik jich je? Která z nich jsou prostá? Která z nich jsou na?

Výsledek. Všech zobrazení je 2^3, žádné z nich není prosté, dvě z nich nejsou zobrazení na množinu B.

1.1.4 Příklad. Najděte příklad zobrazení $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, které

a) je prosté a není na,

b) je na a není prosté,

c) je prosté i na,

d) není ani prosté ani na.

Výsledek. Každá z úloh má nekonečně mnoho řešení, uveďme některá: a) $f(n) = n^2$ pro $n \in \mathbb{N}$;
b) $f(2n) = f(2n + 1) = n$ pro $n \in \mathbb{N}$; c) $f(n) = n$ pro $n \in \mathbb{N}$; d) $f(n) = 1$ pro $n \in \mathbb{N}$.

1.1.5 Příklad. Ukažte, že nemůže existovat prosté zobrazení z konečné množiny A do konečné množiny B, má-li množina A více prvků než B.

1.1.6 Příklad. Využijte příkladu 1.1.5 k tomu, abyste ukázali, že vybereme-li libovolně 5 bodů ze čtverce o straně 2, pak alespoň 2 body mají vzdálenost nejvýše $\sqrt{2}$.

Výsledek. Řešení: Rozdělme čtverec na čtyři stejné čtverce o straně 1. Vybereme-li 5 bodů, musí aspoň dva z těchto bodů ležet v jednom čtverci. Největší vzdálenost dvou bodů ve čtverci o straně 1 je $\sqrt{2}$.

1.1.7 Příklad. Využijte příkladu 1.1.5 k tomu, abyste ukázali, že vybereme-li alespoň 4 z čísel $\{1, 2, \ldots, 6\}$, pak součet některých dvou je přesně 7.

Výsledek. Řešení: Rozdělme čísla $1, 2, \ldots, 6$ do tří podmnožin: $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$ a $\{3, 4\}$. Vybereme-li 4 čísla, musíme z jedné podmnožiny vybrat obě čísla. Ta pak mají součet 7.

1.1.8 Příklad. Totéž jako v příkladu 1.1.7, pouze vybíráme alespoň k čísel, kde $k \geq \frac{n}{2}+1$, z čísel $\{1, \ldots, n\}$, n sudé. Ukažte, že součet některých dvou z nich je přesně $n + 1$.

1.1.9 Příklad. Ukažte, že zobrazení $f\colon A \to B$ je prosté právě tehdy, když pro všechna $C, D \subseteq A$ je

$$f(C \cap D) = f(C) \cap f(D),$$

kde $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ pro $X \subseteq A$.

Výsledek. Řešení: Pro každé zobrazení $f\colon A \to B$ platí $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap$ $\cap f(D)$.

Předpokládejme nejprve, že zobrazení f je prosté. Vezměme $y \in f(C) \cap f(D)$. Pak existují prvky $x_1 \in C$ a $x_2 \in D$ tak, že $f(x_1) = y = f(x_2)$. Protože f je prosté, platí $x_1 = x_2$ a $y \in f(C \cap D)$.

Předpokládejme nyní, že zobrazení f není prosté. Tedy existují prvky $x_1 \neq$ $\neq x_2$ tak, že $y = f(x_1) = f(x_2)$. Položme $C = \{x_1\}$ a $D = \{x_2\}$. Pak $f(C \cap$ $\cap D) = f(\emptyset) = \emptyset$ a $y \in f(C) \cap f(D)$. Tedy $f(C \cap D) \neq f(C) \cap f(D)$.

1.1.10 Příklad. Nechť A je definiční obor zobrazení f. Jakou podmínku musí splňovat množina $f(A)$, aby zobrazení f bylo zobrazením na množinu B?

Výsledek. $B = f(A)$.

1.1.11 Příklad. Ukažte, že předpis

$$(m, n) \mapsto 2^m(2n + 1) - 1 \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

definuje prosté zobrazení množiny $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$.

Výsledek. Řešení: Ukážeme, že zobrazení je prosté: Jestliže $2^m\,(2n+1)-1 =$ $= 2^k\,(2l+1)-1$ pro nějaké dvojice (m, n) a (k, l), pak $2^m\,(2n+1) = 2^k\,(2l+1)$.

Čísla $2n + 1$ a $2l + 1$ jsou lichá, proto $2^m = 2^k$ a $m = k$. Navíc z rovnosti $2n + 1 = 2l + 1$ plyne $n = l$.

Zobrazení je na: Vezměme libovolné přirozené číslo p. Číslo p je buď sudé nebo liché. Jestliže je p sudé, tj. $p = 2k$, je $p + 1$ liché a platí

$$(0, k) \mapsto 2^0 (2k + 1) - 1 = 2k = p.$$

Jestliže je p liché, pak $p + 1$ je sudé. Označme m největší přirozené číslo takové, že $p + 1$ je dělitelné 2^m. Tj. $p + 1 = 2^m (2n + 1)$ pro vhodné n. Pak

$$(m, n) \mapsto 2^m (2n + 1) - 1 = p.$$

1.1.12 Příklad. Je dána spočetná množina A. Ukažte, že množina všech konečných posloupností prvků z A kladné délky k je spočetná pro každé k.

Výsledek. Jedná se o množinu A^k. Spočetnost A^k se ověří matematickou indukcí takto: Pro $k = 2$ je $A^2 = A \times A$ a to je spočetná množina. Předpokládejme, že A^k je spočetná množina. Pak $A^{k+1} = A \times A^k$, tj. kartézský součin dvou spočetných množin a tudíž spočetná množina.

1.1.13 Příklad. Označme P_k množinu všech polynomů stupně k, jejichž koeficienty jsou pouze celá čísla. Ukažte, že množina P_k je spočetná pro každé k. (Návod: Použijte výsledek předchozího příkladu.)

1.1.14 Příklad. S využitím předchozího příkladu ukažte, že množina všech polynomů, jejichž koeficienty jsou celá čísla, je spočetná množina.

1.1.15 Příklad. Nechť $\mathbb{N}^+$ je posloupnost všech neprázdných konečných posloupností přirozených čísel, a nechť

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

je prostá posloupnost všech lichých prvočísel.

a) Ukažte, že předpisem

$$a_1 \ldots a_n \mapsto 2^n p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$$

pro $a_1 \ldots a_n \in \mathbb{N}^+$ je definováno prosté zobrazení množiny $\mathbb{N}^+$ do množiny $\mathbb{N}$.

b) Najděte nějaké prosté zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{N}^+$.

c) S pomocí Cantorovy-Bernsteinovy věty a s pomocí a) a b) ukažte, že $\mathbb{N}^+$ je spočetná množina.

Výsledek. b) Jedná se o zobrazení f, které přiřazuje $n \mapsto (n)$ pro $n \in \mathbb{N}$.

1.1.16 Příklad. Je dána neprázdná množina S. Najděte nějaké prosté zobrazení množiny S do potenční množiny $P(S)$. (Tím současně ukážete, že mohutnost množiny S není větší než mohutnost množiny $P(S)$.

Výsledek. Takovým prostým zobrazením je např. zobrazení f definované $f(x) = \{x\}$ pro $x \in S$.