**4.3.6 Příklad.** Je dán jazyk predikátové logiky $\mathscr{L}$, kde $\mathsf{Pred} = \{P, Q\}$, $\mathsf{Func}\{f, g\}$ a $\mathsf{Kons} = \{a, b, c\}$; $P$ a $f$ jsou unární, $Q$ a $g$ jsou binární. Uvažujme interpretaci $\langle U, [\![-]\!] \rangle$ definovanou takto:

- $U = \mathbb{N}$;
- 1. $[\![a]\!] = 0$, $[\![b]\!] = 1$,
  2. $[\![f]\!]$ je následník, tj. $[\![f]\!](n) = n + 1$,
     $[\![g]\!]$ je součet, tj. $[\![g]\!](m, n) = m + n$;
  3. $[\![P]\!]$ je množina sudých čísel,
     $[\![Q]\!]$ je množina všech dvojic přirozených čísel $(m, n)$, kde $m$ je menší nebo rovno $n$, (tj. $[\![Q]\!]$ je relace $\leq$ na množině $\mathbb{N}$).

Rozhodněte o pravdivosti následujících sentencí

a) $P(g(f(a), g(a, f(b))))$,

b) $Q(g(a, b), f(b))$,

c) $P(b) \Rightarrow (\forall x\, P(x))$,

d) $\exists x\, \forall y\, Q(y, x)$,

e) $\forall y\, \exists x\, Q(y, x)$.

**4.3.7 Řešení.**

a) Nejprve musíme ohodnotit term $g(f(a), g(a, f(b)))$: Máme

$$[\![g(f(a), g(a, f(b))]\!] = [\![f(a)]\!] + [\![g(a, f(b))]\!] = ([\![a]\!] + 1) + ([\![a]\!] + [\![f(b)]\!]) =$$

$$= ([\![a]\!] + 1) + ([\![a]\!] + ([\![b]\!] + 1)) = (0 + 1) + (0 + (1 + 1)) = 1 + (1 + 1) = 3.$$

Formule bude pravdivá, jestliže číslo 3 je sudé. Ale číslo 3 není sudé, tedy celá formule je nepravdivá v interpretaci $\langle U, [\![-]\!] \rangle$.

b) Postupujeme obdobně jako v předchozím případě: Nejprve interpretujeme termy: Zřejmě platí $[\![g(a, b)]\!] = 0 + 1 = 1$ a $[\![f(b)]\!] = 1 + 1 = 2$. Dvojice $(1, 2)$ je prvkem $[\![Q]\!]$, neboť číslo 1 je menší než číslo 2 a tedy naše formule je pravdivá v $\langle U, [\![-]\!] \rangle$.

c) V tomto případě zjistíme pravdivost velmi lehce. Formule $P(b)$ je nepravdivá v interpretaci $\langle U, [\![-]\!] \rangle$, protože $[\![b]\!] = 1$ a to není sudé. Proto implikace $P(b) \Rightarrow \psi$ je pravdivá pro jakoukoli sentenci, tedy i pro $\psi = \forall x\, P(x)$.

d) Nejprve si naši formuli pro danou interpretaci „přečteme“. Formule říká: Existuje přirozené číslo $x$ tak, že pro všechna přirozená čísla $y$ je $y$ menší nebo rovno $x$. Jinými slovy: Existuje přirozené číslo $x$, které je větší nebo rovno všem přirozeným číslům. A to zřejmě není pravda, neboť pro každé přirozené číslo $m$ najdeme přirozené číslo větší, např $m + 1$.

e) Opět si pomůžeme tím, že danou formuli v interpretaci „přečteme“: Ke každému přirozenému číslu $y$ existuje přirozené číslo $x$ tak, že $y$ je menší nebo rovno $x$. Tato formule je pravdivá v dané interpretaci: pro číslo $d \in \mathbb{N}$ (které dosadíme za $y$) stačí zvolit číslo $d + 1$ (to dosadíme za $x$) a opravdu máme $d$ menší nebo rovno $d + 1$. Tedy naše formule je pravdivá v $\langle U, [\![-]\!] \rangle$.

**4.3.8 Model sentence.** Interpretace $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, ve které je sentence $\varphi$ pravdivá, se nazývá *model sentence* $\varphi$.

**4.3.9 Tautologie, kontradikce, splnitelná sentence.** Sentence $\varphi$ se nazývá *tautologie*, jestliže je pravdivá v každé interpretaci. Sentence se nazývá *kontradikce*, jestliže je nepravdivá v každé interpretaci. Nazývá se *splnitelná*, jestliže je pravdivá v aspoň jedné interpretaci.

Také jsme mohli formulovat předchozí definice pomocí pojmu „model“. Tautologie je sentence, pro kterou je každá interpretace jejím modelem; sentence je splnitelná, má-li model; sentence je kontradikce, nemá-li model.

**4.3.10** Následující sentence jsou tautologie. ($P$ je unární predikátový symbol, $Q$ je binární predikátový symbol a $a$ je konstantní symbol.)

1. $(\forall x\, P(x)) \Rightarrow P(a)$;
2. $P(a) \Rightarrow (\exists x\, P(x))$;
3. $\neg(\forall x\, P(x)) \Leftrightarrow (\exists x\, \neg P(x))$;
4. $\neg(\exists x\, P(x)) \Leftrightarrow (\forall x\, \neg P(x))$;
5. $(\forall x\, \forall y\, Q(x,y)) \Leftrightarrow (\forall y\, \forall x\, Q(x,y))$;
6. $(\exists x\, \exists y\, Q(x,y)) \Leftrightarrow (\exists y\, \exists x\, Q(x,y))$.

**4.3.11** Následující sentence jsou splnitelné formule:

1. $\forall x\, \exists y\, Q(x,y)$,
2. $\forall x\, \forall y\, (x + y = y + x)$,

kde $Q$ a $=$ jsou binární predikátové symboly, $+$ je binární funkční symbol. (Opět upozorňujeme, že místo zápisu $=(t_1,t_2)$ a $+(x,y)$ používáme čitelnější zápis $t_1 = t_2$ a $x + y$.)

**4.3.12** Zvláštní příklady kontradikcí neuvádíme. Kontradikce jsou přesně ty formule, jejichž negace je tautologie. Tak např. formule $(\forall x\, P(x) \wedge \neg(\forall x\, P(x))$ je kontradikce. Je dobré si uvědomit, že jde o „dosazení“ formule $\forall x\, P(x)$ do výrokové kontradikce $p \wedge \neg p$.

**4.3.13 Splnitelné množiny sentencí.** Množina sentencí $M$ je *splnitelná* právě tehdy, když existuje interpretace $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, v níž jsou všechny sentence z $M$ pravdivé. Takové interpretaci pak říkáme *model* množiny sentencí $M$.

Množina sentencí $M$ je *nesplnitelná*, jestliže ke každé interpretaci $\langle U, [\![-]\!]\rangle$ existuje formule z $M$, která je v $\langle U, [\![-]\!]\rangle$ nepravdivá.

Z poslední definice vyplývá, že prázdná množina sentencí je splnitelná. (Porovnejte s výrokovou logikou.)

**4.3.14 Příklad.** Rozhodněme, zda následující množiny jsou splnitelné nebo nesplnitelné.

1. $M = \{\forall x\, (P(x) \Rightarrow Q(x)), P(a), \exists x\, (\neg Q(x))\}$,
2. $N = \{\forall x\, (P(x) \Rightarrow Q(x)), P(a), \neg(\exists x\, Q(x))\}$,

kde $P$ a $Q$ jsou unární predikátové symboly, $a$ je konstantní symbol.

**4.3.15 Řešení.** Má-li množina model, je splnitelná; nemá-li model, je nesplnitelná. Proto se buď budeme snažit najít model dané množiny, nebo se budeme snažit ukázat, že model neexistuje. Uvědomte si, že se jedná o dvě rozdílné strategie.

Ad. 1. Zkusme nejprve formule dané množiny „přečíst". Dostáváme
„Každý prvek, který má vlastnost $P$, má i vlastnost $Q$.",
„Prvek $a$ má vlastnost $P$.",
„Existuje prvek, který nemá vlastnost $Q$.".
Mohou být všechna tato tvrzení pravdivá současně? Zdá se, že ano. Z prvních dvou tvrzení vyplývá, že prvek $a$ musí mít vlastnost $Q$, ale můžeme mít ještě nějaký jiný prvek, který vlastnost $Q$ nemá (pak ale nesmí mít ani vlastnost $P$). To nás vede k této interpretaci:

$$U = \{c, d\},\ [\![a]\!] = c,\ [\![P]\!] = \{c\},\ [\![Q]\!] = \{c\}.$$

(tj. náš „svět" $U$ má dva prvky $c, d$, z nichž prvek $c$ má obě vlastnosti $[\![P]\!]$ a $[\![Q]\!]$, prvek $d$ nemá žádnou z těchto vlastností; konstanta $[\![a]\!] = c$).

Jiný model je např. $U = \mathbb{N}$, $[\![a]\!] = 0$, vlastnost $P$ interpretujeme jako „být dělitelný 6" a vlastnost $Q$ jako být „sudý". Pak opravdu každé číslo dělitelné 6 je sudé; číslo 0 je dělitelné 6; a existuje přirozené číslo, které není sudé (např. číslo 3).

Ještě jiný model by byl např. tento: $U$ je množina všech studentů elektrofakulty, $a$ je Petr Vopršálek, vlastnost $P$ interpretujeme jako student „má zkoušku z fyziky", vlastnost $Q$ interpretujeme jako student „má zápočet z fyziky". Pak všechny sentence jsou v této interpretaci pravdivé za předpokladu, že na fakultě je aspoň jeden student, který nemá zápočet z fyziky, a že Petr Vopršálek je studentem elektrofakulty a zkoušku z fyziky má.

Tedy množina $M$ je splnitelná.

Ad 2. Množina $N$ má první dvě sentence stejné jako množina $M$, pouze třetí sentence je

„Není pravda, že existuje prvek, který má vlastnost $Q$."

Z minulého rozboru víme, že první dvě sentence zajišťují, že prvek $a$ má vlastnost $Q$. Tedy v žádné interpretaci, v níž jsou pravdivé první dvě sentence, nemůže být $[\![Q]\!] = \emptyset$. Tudíž třetí sentence nemůže být pravdivá. Ukázali jsme, že množina $N$ je nesplnitelná.

## 4.4 Tautologická ekvivalence

**4.4.1 Tautologická ekvivalence sentencí.** Řekneme, že dvě sentence $\varphi$ a $\psi$ jsou *tautologicky ekvivalentní* právě tehdy, když mají stejné modely, tj. jsou pravdivé ve stejných interpretacích. Jinými slovy, mají stejnou pravdivostní hodnovu ve všech interpretacích.

Někdy se říká, že sentence jsou *sémanticky* ekvivalentní místo, že jsou tautologicky ekvivalentní.

**4.4.2 Poznámka.** Dá se jednoduše dokázat, že tautologická ekvivalence je relace ekvivalence na množině všech sentencí daného jazyka $\mathscr{L}$ a že má podobné vlastnosti jako tautologická ekvivalence formulí výrokové logiky.

**4.4.3 Tvrzení.** Nechť $\varphi$ a $\psi$ jsou sentence. Pak platí:

$$\varphi \models\!\!\!\!\dashv \psi \quad \text{právě tehdy, když} \quad \varphi \Leftrightarrow \psi \text{ je tautologie.}$$

**4.4.4 Příklad.**

1. $\forall x \forall y\, Q(x,y) \models\!\!\!\!\dashv \forall y \forall x\, Q(x,y)$,
2. $\exists x \exists y\, Q(x,y) \models\!\!\!\!\dashv \exists y \exists x\, Q(x,y)$.

**4.4.5** Ukážeme ještě několik tautologických ekvivalencí typických pro predikátovou logiku.

Platí následující tautologické ekvivalence ($P$ a $Q$ jsou unární predikátové symboly).

1. $(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x)) \models\!\!\!\!\dashv \forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$;
2. $(\exists x\, P(x)) \vee (\exists x\, Q(x)) \models\!\!\!\!\dashv \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$;
3. $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall y\, Q(y)) \models\!\!\!\!\dashv \forall x \forall y\, (P(x) \vee Q(y))$;
4. $(\exists x\, P(x)) \wedge (\exists y\, Q(y)) \models\!\!\!\!\dashv \exists x \exists y\, (P(x) \wedge Q(y))$.

## 4.5 Sémantický důsledek

Obdobně jako ve výrokové logice definujeme i v predikátové logice pojem *sémantický důsledek* (též *konsekvent*, *tautologický důsledek*); tentokrát však jen pro množiny sentencí.

**4.5.1 Sémantický důsledek.** Řekneme, že sentence $\varphi$ je *sémantickým důsledkem*, též *konsekventem* množiny sentencí $S$ právě tehdy, když každý model množiny $S$ je také modelem sentence $\varphi$. Tento fakt značíme

$$S \models \varphi.$$

Můžeme též říci, že sentence $\varphi$ *není* konsekventem množiny sentencí $S$, jestliže existuje model množiny $S$, který není modelem sentence $\varphi$. To znamená, že existuje interpretace $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, v níž je pravdivá každá sentence z množiny $S$ a není pravdivá formule $\varphi$. Jedná se tedy o obdobný pojem jako ve výrokové logice, pouze místo o pravdivostním ohodnocení mluvíme o interpretaci.

**4.5.2 Příklad.** Zjistěme, zda platí $N \models \varphi$, kde $N = \{\forall x\, (P(x) \Rightarrow Q(x)), P(a)\}$ a $\varphi = \exists x\, Q(x)$.

Vezměme libovolnou interpretaci $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, v níž jsou pravdivé obě sentence $\forall x\, (P(x) \Rightarrow Q(x))$ a $P(a)$. Protože formule $P(a)$ je pravdivá, prvek $c = [\![a]\!]$ má vlastnost $[\![P]\!]$. Protože i formule $\forall x\, (P(x) \Rightarrow Q(x))$ je pravdivá a prvek $c$ má vlastnost $[\![P]\!]$, musí prvek $c$ mít taky vlastnost $[\![Q]\!]$, tj. $c \in [\![Q]\!]$. Proto sentence $\exists x\, Q(x)$ je pravdivá.

**4.5.3 Konvence.** Jestliže množina sentencí $S$ je jednoprvková, tj. $S = \{\psi\}$, pak píšeme $\psi \models \varphi$ místo $\{\psi\} \models \varphi$. Je-li množina $S$ prázdná, píšeme $\models \varphi$ místo $\emptyset \models \varphi$.

**4.5.4** Obdobně jako pro výrokovou logiku, dostáváme řadu jednoduchých prozorování. Pro množiny sentencí $M$, $N$ a sentenci $\varphi$ platí:

1. Je-li $\varphi \in M$, je $M \models \varphi$.

   Protože sentence $\varphi$ leží v $M$, musí každý model množiny $M$ být i modelem $\varphi$.

2. Je-li $N \subseteq M$ a $N \models \varphi$, je i $M \models \varphi$.

   Předpokládejme, že $N \models \varphi$. Každý model množiny $M$ je také modelem množiny $N$ a proto je modelem $\varphi$. Ukázali jsme $M \models \varphi$.

3. Je-li $\varphi$ tautologie, pak $M \models \varphi$ pro každou množinu sentencí $M$.

   Je-li $\varphi$ tautologie, je pravdivá v každé interpretaci, tedy i v těch interpretacích, které jsou modelem množiny $M$.

4. Je-li $\models \varphi$, pak $\varphi$ je tautologie.

   Každá interpretace je modelem prázdné množiny sentencí. Proto $\models \varphi$ znamená, že každá interpretace musí být modelem $\varphi$. Tedy $\varphi$ je tautologie.

5. Je-li $M$ nesplnitelná množina, pak $M \models \varphi$ pro každou sentenci $\varphi$.

   Kdyby předchozí tvrzení nebylo pravdivé, pak by existovala interpretace, která by byla modelem množiny $M$ a sentence $\varphi$ by v ní byla nepravdivá. Ale množina $M$ model nemá; naše tvrzení tedy platí.

**4.5.5 Tvrzení.** Nechť $\varphi$ a $\psi$ jsou sentence. Pak platí:

$$\varphi \models\!\!\!\dashv \psi \quad \text{právě tehdy, když} \quad \varphi \models \psi \text{ a } \psi \models \varphi.$$

**4.5.6 Tvrzení.** Nechť $\varphi$ a $\psi$ jsou sentence. Pak platí:

$$\varphi \models \psi \quad \text{právě tehdy, když} \quad \varphi \Rightarrow \psi \text{ je tautologie.}$$

**4.5.7 Věta.** Pro každou množinu sentencí $S$ a každou sentenci $\varphi$ platí:

$$S \models \varphi \quad \text{právě tehdy, když} \quad S \cup \{\neg\varphi\} \quad \text{je nesplnitelná množina.}$$

Tato věta i obě předcházející tvrzení se dají zdůvodnit stejným způsobem jako obdobná tvrzení ve výrokové logice. Pouze místo pojmu pravdivostní ohodnocení používáme pojem interpretace.