## 1.2 Binární relace

**1.2.1 Příklad.** Následující relace na množině $A$ napište jako množiny uspořádaných dvojic:

a) $A$ je množina všech podmnožin množiny $\{1, 2\}$, relace $R$ je „býti vlastní podmnožinou“, tj. pro $X, Y \in A$ máme $X\ R\ Y$ právě tehdy, když $X \subseteq Y$ a $X \neq Y$.

b) $A = \{2, 4, 5, 8, 45, 60\}$, $R$ je relace „je dělitelem“, tj. $m\ R\ n$ právě tehdy, když $m$ je dělitelem $n$.

**Výsledek.** a) $R = \{(\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, \{1, 2\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{2\}, \{1, 2\})\}$.
b) $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (2, 60), (4, 4), (4, 8), (4, 60), (5, 5), (5, 45), (5, 60), (8, 8), (45, 45), (60, 60)\}$.

**1.2.2 Příklad.** Na množině reálných čísel je dána relace $R$ předpisem:

$$x\ R\ y \quad \text{právě tehdy, když} \quad x^2 - y^2 + xy < 1.$$

Rozhodněte, zda $-2\ R \circ R\ 1$ a zda $-2\ R \circ R^{-1}\ 1$.

**Výsledek.** Platí $-2\ R \circ R^{-1}\ 1$ a neplatí $-2\ R \circ R\ 1$.

**1.2.3 Příklad.** Určete vlastnosti následujících relací na množině $A$:

a) $A$ je množina lidí, $R$ je relace „být rodičem“;

b) $A$ je množina celých čísel a $i\ R\ j$ právě tehdy, když $|i - j| = 1$;

c) $A$ je množina celých čísel a $i\ R\ j$ právě tehdy, když $|i - j| \leq n$ pro dané kladné celé číslo $n$.

**Výsledek.** a) Není reflexivní, není symetrická, není tranzitivní, je antisymetrická. b) Není reflexivní, je symetrická, není tranzitivní, není antisymetrická. c) Je reflexivní, je symetrická, není tranzitivní, není antisymetrická.

**1.2.4 Příklad.** Které vlastnosti mají následující relace na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$?

a) $m\ R\ n$ právě tehdy, když $m$ je dělitelem $n$;

b) $m\ R\ n$ právě tehdy, když $m + n \geq 50$;

c) $m\ R\ n$ právě tehdy, když $m + n$ je sudé;

d) $m\ R\ n$ právě tehdy, když $m \cdot n$ je sudé;

e) $m\ R\ n$ právě tehdy, když $m = n^k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$;

f) $m\ R\ n$ právě tehdy, když $m + n$ je násobek 3;

g) $m\ R\ n$ právě tehdy, když $m > n$.

**Výsledek.** a) Reflexivní, antisymetrická, tranzitivní; jedná se o uspořádání. b) Pouze symetrická. c) Reflexivní, symetrická, tranzitivní; jedná se o ekvivalenci. d) Pouze symetrická. e) Reflexivní, antisymetrická, tranzitivní; jedná se o uspořádání. f) Pouze symetrická. g) Pouze antisymetrická a tranzitivní.

**1.2.5 Příklad.** V následujících příkladech je $S$ relace na množině $A$ a $x, y$ jsou prvky množiny $A$. Rozhodněte, zda relace $S$ je reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní. Je to ekvivalence?

a) $A$ je množina všech komplexních čísel, $x\ S\ y$ právě tehdy, když $|x| = |y|$.

b) $A$ je množina všech komplexních čísel, $x\ S\ y$ právě tehdy, když $|x| < |y|$.

c) $A$ je množina reálných čísel $\mathbb{R}$, $x\ S\ y$ právě tehdy, když $x - y$ je číslo racionální.

d) $A$ je množina všech trojúhelníků dané roviny, dva trojúhelníky jsou v relaci $S$ právě tehdy, když jsou shodné.

e) $A$ je množina všech trojúhelníků dané roviny, dva trojúhelníky jsou v relaci $S$ právě tehdy, když jsou podobné.

f) $A$ je množina všech podmnožin množiny $B$, dvě podmnožiny množiny $B$ jsou v relaci $S$ právě tehdy, když mají stejnou mohutnost, tj. právě tehdy, když existuje prosté zobrazení jedné na druhou.

**Výsledek.** a) Reflexivní, symetrická, tranzitivní; ekvivalence. b) Antisymetrická, tranzitivní; není ekvivalence. c) Reflexivní, symetrická, tranzitivní; ekvivalence. d) Reflexivní, symetrická, tranzitivní; ekvivalence.
e) Reflexivní, symetrická, tranzitivní; ekvivalence. f) Reflexivní, symetrická, tranzitivní; ekvivalence.

**1.2.6 Příklad.** Ve cvičení 1.2.5 a) určete třídu ekvivalence $S$ obsahující komplexní číslo $x = 3 + 4\,j$.

**Výsledek.** Všechna komplexní čísla $z$ taková, že $|z| = 5$. Jinými slovy: Kružnice o středu 0 a poloměru 5.