5.3 Rezolventy klausulí

5.3.1 Připomeňme, že:

- Literál je atomická formule nebo negace atomické formule.
- Klasule je sentence taková, že všechny kvantifikátory jsou obecné a stojí na začátku formule a za nimi pak následuje literál nebo disjunkce literálů.
- Prázdná klausule je klausule, která neobsahuje žádný literál a je tedy kontradikce.
- Dva literály jsou komplementární, jestliže jeden je negací druhého.

Při zápisu klausulí budeme vynechávat kvantifikátory; to můžeme proto, že víme že všechny kvantifikátory jsou obecné a na jejich pořadí nezáleží.

Ve výrokové logice jsme rezolventy vytvářeli tak, že jsme si vždy vzali dvě klausule, které obsahovaly dvojici komplementárních literálů a výsledná rezolventa byla disjunkcí všech ostatních literálů z obou klausulí. Situace v predikátové logice je složitější. Postup, jak vytváříme rezolventy v predikátové logice, si ukážeme na příkladech.

5.3.2 Příklad. Pokusme se najít rezolventu klausulí $K_1 = P(x) \vee \neg Q(x,y)$ a $K_2 = Q(x,y) \vee R(y)$, kde P a R jsou unární predikátové symboly a Q je binární predikátový symbol, x, y jsou proměnné.

5.3.3 Řešení. Rezolventu najdeme snadno: Klausule K_1 a K_2 obsahují dvojici komplementárních literálů, totiž $\neg Q(x,y)$ je literál K_1 a $Q(x,y)$ je literál K_2. Rezolventou klausulí K_1 a K_2 je tedy klausule $K = P(x) \vee R(y)$, přesněji $K = \forall x \, \forall y \, (P(x) \vee R(y))$.

5.3.4 Poznámka. Ukážeme, že klausule K je sémantickým důsledkem klausulí K_1 a K_2. Tím současně ukážeme, že množina $S = \{K_1, K_2\}$ je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná množina $M = \{K_1, K_2, K\}$. (V tomto případě platí dokonce, že množiny S a M mají stejné modely.)

Ukažme, že každý model klausulí K_1 a K_2 je také modelem klausule K. Všechny tři klausule přepišme do tvaru sentencí: $K_1 = \forall x \, \forall y \, (P(x) \vee \neg Q(x,y))$, $K_2 = \forall x \, \forall y \, (Q(x,y) \vee R(y))$ a $K = \forall x \, \forall y (P(x) \vee R(y))$.

Uvažujme libovolnou interpretaci $\langle U, [\![-]\!] \rangle$, v níž jsou obě klausule K_1 a K_2 pravdivé. Vybereme libovolné prvky $d, d' \in U$. Pak formule $Q(x,y)$ po dosazení prvku d za proměnnou x a prvku d' za proměnnou y je buď 1) pravdivá nebo 2) nepravdivá v interpretaci $\langle U, [\![-]\!] \rangle$.

Ad 1) Protože formule $\neg Q(x,y)$ je nepravdivá pro $x := d$ a $y := d'$, musí být (z důvodů pravdivosti klausule K_1) pro $x := d$ pravdivá formule $P(x)$. Tedy formule $P(d)$ je pravdivá.

Ad 2) Protože formule $Q(x,y)$ je nepravdivá pro $x := d$ a $y := d'$, musí být (z důvodů pravdivosti klausule K_2) pro $y := d'$ pravdivá formule $R(y)$. Tedy formule $R(d')$ je pravdivá.

Ukázali jsme, že pro každé $d, d' \in U$ platí: Dosadíme-li prvek d za proměnnou x a prvek d' za proměnnou y, dostáváme pravdivou formuli $P(d) \vee R(d')$. To znamená, že klausule K je pravdivá v $\langle U, [\![-]\!] \rangle$.

Ukázali jsme, že $\{K_1, K_2\} \models K$.

V dalších příkladech již nebudeme podrobně ukazovat, že rezolventa dvou klausulí je konsekventem klausulí, z nichž vznikla. Úvahy jsou vždy obdobné.

5.3.5 Příklad. Hledejme rezolventu klausulí $K_1 = P(x) \vee \neg Q(x)$ a $K_2 = Q(a) \vee R(b)$, kde P, Q jsou unární predikátové symboly a a, b jsou konstanty.

5.3.6 Řešení. Klausule K_1 a K_2 neobsahují dvojici komplementárních literálů, neboť negace literálu $Q(a)$ není literál $\neg Q(x)$ a naopak. Přitom však literál $\neg Q(x)$ odpovídá formuli $\forall x \neg Q(x)$, a tedy zahrnuje i $\neg Q(a)$. Proto při substituci konstanty a za proměnnou x dostáváme klausule

$$K_1' = P(a) \vee \neg Q(a) \quad \text{a} \quad K_2' = Q(a) \vee R(b)$$

a jejich rezolventa je klausule $P(a) \vee R(b)$.

5.3.7 Příklad. Hledejme rezolventu klausulí

$$K_1 = \neg P(x,y) \vee Q(x,y,a) \quad \text{a} \quad K_2 = \neg Q(g(v),z,z) \vee R(v,z),$$

kde P, R jsou binární predikátové symboly, Q je predikátový symbol arity 3 a a je konstanta.

5.3.8 Řešení. Nejprve se pokusíme vhodnou substitucí vytvořit z $Q(x,y,a)$ a $\neg Q(g(v),z,z)$ dvojici komplementárních literálů. Je zřejmé, že toho můžeme dosáhnout jedině tehdy, když za proměnnou z dosadíme konstantu a. Tím dostaneme literály

$$Q(x,y,a) \qquad \neg Q(g(v),a,a).$$

Volba další substituce je opět zřejmá. Nyní musíme konstantu a dosadit i za proměnnou y. Dostaneme

$$Q(x,a,a) \qquad \neg Q(g(v),a,a).$$

Zbývá za proměnnou x dosadit term $g(v)$ a dostaneme komplementární literály

$$Q(g(v),a,a) \qquad \neg Q(g(v),a,a).$$

Uvědomte si, že k tomu, abychom dostali rezolventu, je nutné provést zvolenou substituci na celé klausule K_1 a K_2. Tím dostaneme klausule K_1' a K_2', jejichž rezolventa bude i rezolventou klausulí K_1, K_2. Tedy $K_1' = \neg P(g(v),a) \vee Q(g(v),a,a)$, $K_2' = \neg Q(g(v),a,a) \vee R(v,a)$ a hledaná rezolventa je $K = \neg P(g(v),a) \vee R(v,a)$.

5.3.9 Poznámka. Poznamenejme, že hledáme „nejobecnější“ substituci, po jejíž aplikaci dostaneme dvojici komplementárních literálů. V předchozím příkladě můžeme volit také tuto substituci: Za proměnné y, z, v dosadíme konstantu a a za proměnnou x term $g(a)$. Provedením této substituce na klausule K_1 a K_2 dostaneme klausule

$$K_1'' = \neg P(g(a),a) \vee Q(g(a),a,a) \quad \text{a} \quad K_2'' = \neg Q(g(a),a,a) \vee R(a,a).$$

Tyto klasule mají rezolventu $K' = \neg P(g(a),a) \vee R(a,a)$. Je dobré si uvědomit, že rezolventu K' dostaneme z rezolventy K dosazením konstanty a za proměnnou v. Aby platil rezoluční princip analogický rezolučnímu principu ve výrokové logice, musíme však k množině klausulí vždy přidávat ty nejobecnější rezolventy.

5.3.10 Příklad. Hledejme rezolventu klausulí

$$K_1 = \neg P(x) \vee Q(f(x), a) \quad \text{a} \quad K_2 = \neg Q(y, y) \vee R(f(y), z),$$

kde P je unární predikátový symbol, Q a R jsou binární predikátové symboly, f je unární funkční symbol a a je konstanta.

5.3.11 Řešení. Postupujeme obdobně jako v minulém příkladě: Snažíme se najít takovou substituci, abychom z literálů $Q(f(x), a)$ a $\neg Q(y, y)$ dostali dvojici komplementárních literálů. Je zřejmé, že za proměnnou y musíme dosadit konstantu a. Dostaneme

$$Q(f(x), a) \qquad \neg Q(a, a).$$

Nyní jsme v situaci, kdy nemůžeme další substituci provést. Existují zřejmě interpretace funkčního symbolu f a konstanty a tak, že pro žádné dosazení za proměnnou x nedostaneme hodnotu konstanty a. Tudíž hledaná substituce neexistuje a klausule K_1 a K_2 nemají rezolventu.

5.4 Rezoluční princip

Nejprve uvedeme příklad a teprve potom zformulujeme vlastní princip.

5.4.1 Příklad. Rozhodněme, zda je splnitelná množina klausulí

$$S = \{\neg P(x, y) \vee Q(x, y, a), \neg Q(g(v), z, z) \vee R(v, z), \neg R(b, a), P(x, a)\},$$

kde P, Q, R jsou predikátové symboly odpovídajících arit, g je unární funkční symbol a a je konstanta.

5.4.2 Řešení. Z příkladu 5.3.7 víme, že rezolventou klausulí

$$\neg P(x, y) \vee Q(x, y, a) \quad \text{a} \quad \neg Q(g(v), z, z) \vee R(v, z)$$

je klausule $K = \neg P(g(v), a) \vee R(v, a)$. Klausule K a klausule $P(x, a)$ mají rezolventu $K' = R(v, a)$ (při substituci termu $g(v)$ za proměnnou x). Provedeme-li v klausuli $K' = R(v, a)$ substituci konstanty b za proměnnou v, dostaneme dvojici klausulí $R(b, a)$ a $\neg R(b, a)$. Jejich rezolventa je prázdná klausule F. Proto je množina S nesplnitelná.

5.4.3 Poznámka. Je dobré si uvědomit, že kdybychom jako rezolventu klausulí

$$\neg P(x, y) \vee Q(x, y, a) \quad \text{a} \quad \neg Q(g(v), z, z) \vee R(v, z)$$

vzali klausuli $\neg P(g(a), a) \vee R(a, a)$, prázdnou klausuli F bychom již neodvodili.

5.4.4 Rezoluční princip. Je dána množina klausulí S. Označme

$$\begin{aligned} R(S) &= S \cup \{K \mid K \text{ je nejobecnější rezolventa některých klausulí z } S\} \\ R^0(S) &= S \\ R^{i+1}(S) &= R(R^i(S)) \quad \text{pro} \quad i \in \mathbb{N} \\ R^\star(S) &= \bigcup \{R^i(S) \mid i \geq 0\}. \end{aligned}$$

Množina klausulí S je splnitelná právě tehdy, kdyz $R^\star(S)$ neobsahuje prázdnou klausuli F.

5.4.5 Zatím jsme mluvili o nalezení nejobecnější substituce pro dva literály tak, aby z nich vznikly komplementární literály. Neukázali jsme ale, jak ji obecně najít. Tento problém řeší následující unifikační algoritmus. Nechť $\neg L_1$ a L_2 jsou dva literály, o nichž chceme rozhodnout, zda se mohou stát dvojicí komplementárních literálů. Algoritmus pracuje s řetězci L_1 a L_2.

5.4.6 Unifikační algoritmus.

Vstup: Dva positivní literály L_1, L_2, kteréemsema nemají společné proměnné.
Výstup: Hlášení `neexistuje` v případě, že hledaná substituce neexistuje,
v opačném případě substituce ve tvaru množiny prvků tvaru x/t,
kde x je proměnná, za kterou se dosazuje,
a t je term, který se za proměnnou x dosazuje.

1. Položme $E_1 := L_1$, $E_2 := L_2$, $\theta := \emptyset$.
2. Jsou-li E_1, E_2 prázdné řetězce, stop. Množina θ určuje hledanou substituci. V opačném případě položíme $E_1 := E_1\theta$, $E_2 := E_2\theta$ (tj. na E_1, E_2 provedeme substituci θ).
3. Označíme X první symbol řetězce E_1, Y první symbol řetězce E_2.
4. Je-li $X = Y$, odstraníme X a Y z počátku E_1 a E_2. Jsou-li X a Y predikátové nebo funkční symboly, odstraníme i jim příslušné závorky a jdeme na krok 2.
5. Je-li X proměnná, neděláme nic.
   Je-li Y proměnná (a X nikoli), přehodíme E_1, E_2 a X, Y.
   Není-li ani X ani Y proměnná, stop. Výstup `neexistuje`.
6. Je-li Y proměnná nebo konstanta, položíme $\theta := \theta \cup \{X/Y\}$. Odstraníme X a Y ze začátků řetězců E_1 a E_2 (spolu s čárkami, je-li třeba) a jdeme na krok 2.
7. Je-li Y funkční symbol, označíme Z výraz skládající se z Y a všech jeho argumentů (včetně závorek a čárek). Jestliže Z obsahuje X, stop, výstup `neexistuje`.
   V opačném případě položíme $\theta := \theta \cup \{X/Z\}$, odstraníme X a Z ze začátků E_1 a E_2 (odstraníme čárky, je-li třeba) a jdeme na krok 2.

Práci unifikačního algoritmu si ukážeme na příkladě.

5.4.7 Příklad. Pomocí unifikačního algoritmu hledejme nejobecnější substituci pro literály $L_1 = Q(x, y, a)$ a $L_2 = Q(g(v), z, z)$.

5.4.8 Řešení. Algoritmus pracuje v těchto krocích:

1. $E_1 := Q(x, y, a)$, $E_2 := Q(g(v), z, z)$, $\theta := \emptyset$.
2. $X := Q$, $Y := Q$, $X = Y$. Odstraníme Q spolu s oběma závorkami, tj. máme $E_1 := x, y, a$, $E_2 := g(v), z, z$.
3. $X := x$, $Y := g$. Protože $X \neq Y$ a Y je funkční symbol, položíme $Z := = g(v)$, $\theta := \{x/g(v)\}$. Odstraníme x z E_1, $g(v)$ z E_2 a dostaneme $E_1 := = y, a$, $E_2 := z, z$.

4. $X := y$, $Y := z$. Protože $X \neq Y$ a Y je proměnná, položíme $\theta := \{x/g(v), y/z\}$. Odstraníme y z E_1, z z E_2 a dostaneme $E_1 := a$, $E_2 := z$.

5. $X := a$, $Y := z$. Protože $X \neq Y$, X není proměnná, ale Y je proměnná, přehodíme X a Y a současně také E_1 a E_2. Tím dostaneme $X := z$, $Y := a$, $E_1 := z$, $E_2 := a$. Nyní je Y konstantní symbol. Položíme proto $\theta := \{x/g(v), y/z, z/a\}$, odstraníme z z E_1, a z E_2 a dostaneme $E_1 = E_2 = \emptyset$. Stop, θ je hledaná substituce.

5.5 Využití rezoluční metody v predikátové logice

5.5.1 Příklad. Pomocí rezoluční metody rozhodněme, zda platí

$$\{\forall x\,\forall y\,((P(x) \wedge Q(x,y)) \Rightarrow R(y)), \forall x\,Q(f(x), g(x)), P(f(a))\} \models R(g(a)),$$

kde P, Q a R jsou predikátové symboly (odpovídajících arit) a a je konstantní symbol.

5.5.2 Řešení. Označme

$$S = \{\forall x\,\forall y\,((P(x) \wedge Q(x,y)) \Rightarrow R(y)), \forall x\,Q(f(x), g(x)), P(f(a))\}$$

a $\varphi = R(g(a))$. Formule φ je sémantickým důsledkem množiny S právě tehdy, když množina $S \cup \{\neg\varphi\}$ je nesplnitelná. Zjišťujeme tedy splnitelnost nebo nesplnitelnost množiny sentencí

$$T = S \cup \{\neg\varphi\} =$$

$$= \{\forall x\,\forall y\,((P(x) \wedge Q(x,y)) \Rightarrow R(y)), \forall x\,Q(f(x), g(x)), P(f(a)), \neg R(g(a))\}.$$

Nejprve přepíšeme formule množiny T tak, aby každý kvantifikátor vázal jinou proměnnou. Dostaneme např. množinu

$$T = \{\forall x\,\forall y\,((P(x) \wedge Q(x,y)) \Rightarrow R(y)), \forall z\,Q(f(z), g(z)), P(f(a)), \neg R(g(a))\}.$$

Nyní převedeme každou formuli z množiny T na klausální tvar: Kromě první formule již všechny formule v klausálním tvaru jsou. Upravme první formuli:

$$\forall x\,\forall y\,((P(x) \wedge Q(x,y)) \Rightarrow R(y)) \models\!\!\!\!\!\dashv \forall x\,\forall y\,(\neg P(x) \vee \neg Q(x,y) \vee R(y))$$

Rezoluční metodou zjistíme, zda množina klausulí

$$M = \{\neg P(x) \vee \neg Q(x,y) \vee R(y), Q(f(z), g(z)), P(f(a)), \neg R(g(a))\}$$

je splnitelná.

Nejprve vybereme predikátový symbol P a utvoříme všechny rezolventy klausulí podle literálu obsahujícího tento predikátový symbol: Literál P obsahují klausule $\neg P(x) \vee \neg Q(x,y) \vee R(y)$ a klausule $C_1 = P(f(a))$. Abychom dostali dvojici komplementárních literálů, provedeme na první klausuli substituci $x/f(a)$. Dostaneme $C_2 = \neg P(f(a)) \vee \neg Q(f(a), y) \vee R(y)$. Rezolventa klausulí C_1 a C_2 je klausule $C_3 = \neg Q(f(a), y) \vee R(y)$. Vybereme predikátový symbol

R. Rezolventu podle literálu, který obsahuje R můžeme dostat z klausulí C_3 a $C_4 = \neg R(g(a))$. K tomu ale potřebujeme v klausuli C_3 provést substituci $y/g(a)$. Dostáváme $C_3' = \neg Q(f(a), g(a)) \vee R(g(a))$; rezolventa klausulí C_3' a C_4 je klausule $C_5 = \neg Q(f(a), g(a))$. Vybereme predikátový symbol Q, ten obsahují dvě klausule: C_5 a klausule $Q(f(z), g(z))$. Substitucí z/a dostaneme dvojici klausulí $C_5 = \neg Q(f(a), g(a))$ a $Q(f(a), g(a))$, jejichž rezolventou je prázdná klausule F. Ukázali jsme, že $F \in R^3(M)$ a množina M je nesplnitelná. Proto platí $S \models \varphi$.

5.5.3 Poznámka. Všimněte si, že jsme **nejprve** vytvořili množinu $S \cup \{\neg\varphi\}$ a pak teprve uprvavovali sentence na klausální tvar. To je nutné proto, že používáme-li skolemizaci, nenahrazujeme sentenci sentencí tautologicky ekvivalentní. Je-li sentence $\varphi = \exists x\, P(x)$, pak $\neg\varphi = \forall x\, P(x)$; kdežto pro sentenci $P(a)$ je její negace rovna $\neg P(a)$.