MA1: Typická zkoušková písemka

1. a) Najděte definiční obor funkce a její limity v hraničních bodech definičního oboru pro

$$f(x) = (2^x + 1)^{1/x}.$$

b) Nakreslete nějakou funkci, která splňuje $\lim\limits_{x\to 1^+}(f) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty}(f) = -1$.

2. a) Najděte derivaci funkce $f(x) = \cos(x)^{\sin(\pi x)} + 2x$ v bodě $a = 0$.

b) Rozhodněte, zda konverguje řada $\sum \frac{k+1}{2^k}$.

3. Určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

4. a) Spočítejte (pokud konverguje) $\displaystyle\int\limits_0^1 (2x-1)\sin(\pi x)\,dx$.

b) Napište, jakým integrálem byste počítali obsah konečné oblasti mezi grafy $y = x^2$ a $y = 4$.

5. Spočítejte (pokud konverguje) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{e^{2x} + e^x + 4}{e^{2x} + 4}\,dx$.

6. a) Napište definici sudé a liché funkce.

b) Rozhodněte, zda je funkce $f(x) = \ln\big(\sqrt{x^2+1} - x\big)$ sudá či lichá.

c) Napište, jakým numerickým postupem byste odhadli $\int\limits_1^4 \frac{\sin(x)}{x}\,dx$, uveďte příklad.

Výsledky:

1. a) Nutno přepsat $f(x) = e^{\frac{\ln(2^x+1)}{x}}$, $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{\ln(2^x+1)}{x}\Big) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{l'H}}{=}} \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{\ln(2)2^x}{2^x+1}\Big) = \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{\ln(2)}{1+\frac{1}{2^x}}\Big) = \ln(2), \text{ tedy } \lim_{x\to\infty}\big(f(x)\big) = e^{\ln(2)} = 2.$$

$$\lim_{x\to 0^+}\Big(\frac{\ln(2^x+1)}{x}\Big) \overset{\frac{\ln(2)}{0^+}}{=\!=} \infty, \text{ proto } \lim_{x\to 0^+}\big(f(x)\big) = e^{\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x\to 0^-}\Big(\frac{\ln(2^x+1)}{x}\Big) \overset{\frac{\ln(2)}{0^-}}{=\!=} -\infty, \text{ proto } \lim_{x\to 0^-}\big(f(x)\big) = e^{-\infty} = 0.$$

$$\lim_{x\to -\infty}\Big(\frac{\ln(2^x+1)}{x}\Big) \overset{\frac{\ln(1)}{-\infty}}{=\!=} 0, \text{ proto } \lim_{x\to -\infty}\big(f(x)\big) = e^{0} = 1.$$

b) Zkuste něco sami vymyslet.

2. a) $f'(x) = \cosh(x)^{\sin(\pi x)}\big[\pi\cos(\pi x)\ln(\cosh(x)) + \sin(\pi x)\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\big]$, $\qquad f'(0) = 2$.

b) Odmocninové kritérium: $\sqrt[k]{a_k} = \frac{\sqrt[k]{k+1}}{2} \to \frac{1}{2} = \varrho$. Protože $\varrho < 1$, řada konverguje.

Podílové kritérium: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{k+2}{2^{k+1}}}{\frac{k+1}{2^k}} = \frac{k+2}{k+1}\,\frac{1}{2} \to 1 \cdot \frac{1}{2} = \lambda$. Protože $\lambda < 1$, řada konverguje.

3. $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, $\nearrow \searrow \nearrow$.

4. a) 0.

b) $\int\limits_{-2}^{2} 4 - x^2\,dx$.

5. ∞.

6. a) Sudá: $D(f)$ symetrický a $\forall x \in D(f)$: $f(-x) = f(x)$.

Lichá: $D(f)$ symetrický a $\forall x \in D(f)$: $f(-x) = -f(x)$.

b) Lichá.

c) Aproximace grafu třeba obdélníky, rozdělím $\langle 1, 4\rangle$ na stejně velké části, třeba na čtyři, pak má každý obdélník šířku $\frac{3}{4}$ a

$$\int\limits_1^4 \frac{\sin(x)}{x}\,dx \sim \frac{\sin(1)}{1}\cdot 34 + \frac{\sin(1+\frac{3}{4})}{1+\frac{3}{4}}\cdot 34 + \frac{\sin(1+\frac{6}{4})}{1+\frac{6}{4}}\cdot 34 + \frac{\sin(1+\frac{9}{4})}{1+\frac{9}{4}}\cdot 34.$$