Vlastní čísla, vlastní vektory

78. Definujte vlastní číslo matice/zobrazení a vlastní vektor matice/zobrazení.

(7.66; 7.70) Nechť A: L1 -> L2 je linearni zobrazeni. Cislo a se nazyva vlastnim cislem zobrazeni A, pokud existuje vektor x (x neroven o) a plati: A(x) = a*x. Vektor x se pak nazyva vlastnim vektorem zobrazeni A prislusnym vlastnimu cislu a.

7.56. Věta. Nechť (B) a (C) jsou dvě báze lineárního prostoru L. Pak matice identického zobrazení $\mathcal{I}: L \to L$ vzhledem k bázím (B) a (C) je rovna matici přechodu $\mathbf{A}_{(C,B)}$ od báze (C) k bázi (B). *Matice identity*

Důkaz. Nechť $\mathbf{A}$ je matice identity vzhledem k bázím (B) a (C). Podle (7.4) je

$$\big(\mathcal{I}(\boldsymbol{b}_1), \mathcal{I}(\boldsymbol{b}_2), \ldots, \mathcal{I}(\boldsymbol{b}_n)\big) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n) \cdot \mathbf{A}.$$

Tato podmínka je ekvivalentní s definicí 6.18 matice přechodu od báze (C) k bázi (B).

7.59. Věta. Nechť $\mathcal{A}: L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení a nechť (B_1), (C_1) jsou báze lineárního prostoru L_1 a (B_2), (C_2) jsou báze lineárního prostoru L_2. Označme symbolem $\mathbf{A}_{(B_1,C_1)}$ matici přechodu od báze (B_1) k (C_1) a $\mathbf{A}_{(C_2,B_2)}$ matici přechodu od báze (C_2) k (B_2). Je-li $\mathbf{A}$ matice zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B_1), (B_2), pak $\mathbf{A}_{(C_2,B_2)} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_{(B_1,C_1)}$ je matice téhož lineárního zobrazení vzhledem k bázím (C_1), (C_2).

Důkaz. Matice $\mathbf{A}_{(B_1,C_1)}$ je podle věty 7.56 maticí identického zobrazení $\mathcal{I}_1: L_1 \to L_1$ vzhledem k bázím (C_1) a (B_1). Stejně tak matice $\mathbf{A}_{(C_2,B_2)}$ je maticí identity $\mathcal{I}_2: L_2 \to L_2$ vzhledem k bázím (B_2) a (C_2). Dále si stačí uvědomit, že $\mathcal{A} = \mathcal{I}_2 \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{I}_1$ a použít větu 7.55.

7.60. Definice. Nechť $\mathcal{A}: L \to L$ je lineární zobrazení (lineární prostor vzorů i obrazů je stejný a má konečnou dimenzi). Místo, abychom mluvili o matici lineárního zobrazení vzhledem ke stejným bázím (B) a (B) (to působí, jako bychom koktali), stručně se zmiňujeme o *matici zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázi (B)*. *Zobrazení do stejného prostoru*

7.61. Věta. Nechť $\mathcal{A}: L \to L$ je lineární zobrazení, (B), (C) jsou dvě báze lineárního prostoru L a $\mathbf{A}_{(B,C)}$ je matice přechodu od báze (B) k bázi (C). Je-li $\mathbf{A}$ matice zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázi (B), pak $\mathbf{A}^{-1}_{(B,C)} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_{(B,C)}$ je maticí téhož lineárního zobrazení vzhledem k bázi (C).

Důkaz. $\mathbf{A}^{-1}_{(B,C)}$ je podle věty 6.21 maticí přechodu od (C) k (B). Zbytek plyne z věty 7.59.

7.62. Poznámka. Protože možné matice přechodu od báze k bázi jsou právě všechny regulární matice, můžeme na základě předchozí věty říci, že dvě matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou maticemi stejného lineárního zobrazení $\mathcal{A}: L \to L$ právě tehdy, když existuje regulární matice $\mathbf{P}$ taková, že $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$. Tyto matice se tedy z pohledu lineárního zobrazení příliš neliší, což vystihuje následující definice:

7.65. Poznámka. Následující část textu o vlastních číslech jsem ke kapitole o lineárních zobrazeních zařadil poté, co byla do osnov algebry pro první ročník zařazena zmínka o vlastních vektorech. Je to téma docela rozsáhlé. Zde jsou uvedeny jen základní vlastnosti, takže čtenář s hlubšími zájmy o tuto problematiku bude muset sáhnout po jiném zdroji informací, například [14]. *Vlastní číslo, vlastní vektor*

7.66. Definice. Nechť $\mathcal{A}: L \to L$ je lineární zobrazení. Číslo $\lambda \in \mathbf{C}$ se nazývá *vlastním číslem zobrazení $\mathcal{A}$*, pokud existuje vektor $\boldsymbol{x} \in L$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ takový, že $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$. Vektor $\boldsymbol{x}$, který splňuje uvedenou rovnost, se nazývá *vlastní vektor zobrazení $\mathcal{A}$ příslušný vlastnímu číslu λ*.

7.67. Poznámka. Protože vlastní číslo může být číslo komplexní, je potřeba pracovat s modifikovanou definicí lineárního prostoru 1.6, ve které nahradíme množinu reálných čísel množinou čísel komplexních. Jak plyne z definice 7.66, budeme totiž nuceni při práci s vlastními čísly a vlastními vektory násobit vlastní vektor komplexním číslem. V modelových příkladech se pokusím komplexním číslům vyhnout.

7.68. Poznámka. Pokud existuje vlastní číslo zobrazení $\mathcal{A}$, pak mu přísluší více vlastních vektorů. Přidáme-li k těmto vektorům vektor nulový, dostáváme lineární podprostor prostoru L. Skutečně, pokud $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ splňují $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{y}) = \lambda \boldsymbol{y}$, pak

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y}) = \lambda \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y} = \lambda (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}), \qquad \mathcal{A}(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \alpha\lambda \boldsymbol{x} = \lambda (\alpha \boldsymbol{x}).$$

7.69. Poznámka. Pojem vlastní číslo definujeme nejenom pro lineární zobrazení, ale rovněž pro čtvercové matice. Záhy zjistíme, že mezi vlastním číslem zobrazení a matice je úzká souvislost.

7.70. Definice. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice typu (n, n) reálných nebo komplexních čísel. Číslo $\lambda \in \mathbf{C}$ se nazývá *vlastním číslem matice* $\mathbf{A}$, pokud existuje vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$, takový, že $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}^T = \lambda \boldsymbol{x}^T$. Vektor $\boldsymbol{x}$, který splňuje uvedenou rovnost, se nazývá *vlastní vektor matice* $\mathbf{A}$ *příslušný vlastnímu číslu* λ.

7.71. Věta. Nechť $\mathcal{A}: L \to L$ je lineární zobrazení a $\mathbf{A}$ je jeho matice vzhledem k nějaké bázi (B). Pak λ je vlastním číslem zobrazení $\mathcal{A}$ právě tehdy, když je vlastním číslem matice $\mathbf{A}$. Navíc $\boldsymbol{x}$ je vlastní vektor zobrazení $\mathcal{A}$ příslušný λ právě tehdy, když souřadnice vektoru $\boldsymbol{x}$ vzhledem k bázi (B) tvoří vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušný λ.

Důkaz. Označme $\boldsymbol{u} \in \mathbf{C}^n$ souřadnice vektoru $\boldsymbol{x}$ v bázi (B). Podle věty 7.49 sloupec $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{u}^T$ obsahuje souřadnice obrazu $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ vzhledem k bázi (B). Takže $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$ právě tehdy, když $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{u}^T = \lambda \boldsymbol{u}^T$.

7.72. Poznámka. Množina všech vlastních čísel lineárního zobrazení nebo matice se nazývá *spektrum*. Vlastním číslům/vektorům někteří čeští autoři říkají *charakteristická čísla/vektory* (anglicky eigenvalue, eigenvector, což je odvozeno z němčiny).

7.73. Poznámka. Vlastní číslo zobrazení $\mathcal{A}$ je podle předchozí věty vlastním číslem všech matic tohoto zobrazení (vzhledem k rozličným bázím). Tyto matice jsou podle poznámky 7.62 vzájemně podobné. Můžeme tedy říci, že pokud $\mathbf{P}$ je regulární matice, pak vlastní čísla matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$ jsou stejná.

79. Proč mají podobné matice stejná vlastní čísla?

(7.75; 7.78)
protoze podle vety 7.78 podobne matice maji stejny charakteristicky polynom.

7.63. Definice. Matice $\mathbf{A}$ je *podobná* matici $\mathbf{B}$, pokud existuje regulární matice $\mathbf{P}$ taková, že platí $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$.

7.64. Poznámka. Je-li $\mathbf{A}$ podobná $\mathbf{B}$, pak je i $\mathbf{B}$ podobná $\mathbf{A}$, protože místo matice $\mathbf{P}$ můžeme použít matici $\mathbf{P}^{-1}$. Stačí tedy říkat, že matice jsou si vzájemně podobné. Je-li $\mathbf{A}$ podobná $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}$ podobná $\mathbf{C}$, pak je $\mathbf{A}$ podobná $\mathbf{C}$, protože součin regulárních matic je matice regulární a protože $(\mathbf{PQ})^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^{-1}$. Matice je podobná sama sobě, protože $\mathbf{E}$ je regulární.

7.78. Věta. Podobné matice mají stejný charakteristický polynom.

Důkaz. Nechť $\mathbf{P}$ je regulární. Matice $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ je podobná matici $\mathbf{A}$. Vypočteme její charakteristický polynom:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} - \lambda\,\mathbf{E}) &= \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} - \lambda\,\mathbf{P}^{-1}\mathbf{EP}) = \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} - \mathbf{P}^{-1}\lambda\,\mathbf{EP}) = \\ &= \det(\mathbf{P}^{-1}\,(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})\,\mathbf{P}) = \det\mathbf{P}^{-1}\,\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})\,\det\mathbf{P} = \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}),\end{aligned}$$

protože $\det\mathbf{P}^{-1}\,\det\mathbf{P} = 1$.

80. Definujte charakteristický polynom matice a zdůvodněte, proč jeho kořeny jsou vlastními čísly matice.

(7.75; 7.74)
Nechť A je čtvercová matice, polynom det (A – λE) nazýváme charakteristický polynom matice A a rovnost det (A – λE) = 0 charakteristickou rovnicí. Je-li λ k-násobným kořenem charakteristické rovnice, říkáme, že λ je k-násobným vlastním číslem.

7.74. Poznámka. Přikročíme nyní k výpočtu vlastních čísel, je-li dána čtvercová matice $\mathbf{A}$. Vyjdeme z rovnosti $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}^T = \lambda \boldsymbol{x}^T = \lambda\,\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{x}^T$. Z obou stran této rovnice odečteme $\lambda\,\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{x}^T$. Dostáváme vztah $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}^T - \lambda\,\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{x}^T = (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{o}^T$. Z definice vlastního čísla víme, že příslušný vlastní vektor $\boldsymbol{x}$ musí být nenulový. Je tedy zřejmé, že λ bude vlastním číslem matice $\mathbf{A}$ právě tehdy, když homogenní soustava s maticí $\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}$ bude mít nenulové řešení. Tímto řešením pak bude vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ. Aby tato soustava měla nenulové řešení, musí její matice být singulární, tj. musí $\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = 0$. Tím máme odvozen vzorec na výpočet vlastních čísel. Uvědomíme si ještě, že $\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})$ je polynom v proměnné λ. Tento polynom se nazývá *charakteristický polynom* matice $\mathbf{A}$. Jeho stupeň je stejný, jako počet řádků matice $\mathbf{A}$. Označme toto číslo n. Abychom tedy našli všechna vlastní čísla dané matice, stačí najít všechny kořeny charakteristického polynomu této matice. Podle základní věty algebry těchto kořenů (včetně jejich násobnosti) je n. Každá matice má tedy n vlastních čísel (obecně ne vzájmeně různých). Každé lineární zobrazení $\mathcal{A}: L \to L$ má tolik vlastních čísel, kolik je dimeze L.

7.75. Definice. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Polynom $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ nazýváme *charakteristický polynom matice* $\mathbf{A}$ a rovnost $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ charakteristickou rovnicí. Je-li λ k-násobným kořenem charakteristické rovnice, říkáme, že λ je *k-násobným vlastním číslem*.

7.76. Příklad. Uvedeme ještě celý postup odvození výpočtu vlastních čísel matice (viz předchozí poznámku) znovu na konkrétním numerickém příkladě, protože odvození může pro někoho být na konkrétním příkladě názornější. Budeme hledat vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Podle definice 7.70 hledáme takové číslo λ a vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, aby byla splněna maticová rovnost

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

a přitom vektor $\boldsymbol{x}$ byl nenulový. Rozepíšeme tuto rovnost do složek:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= \lambda x_1 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= \lambda x_2 \\ -4x_1 + 4x_2 - x_3 &= \lambda x_3 \end{aligned} \qquad \text{tj.} \qquad \begin{aligned} (5-\lambda)x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + (4-\lambda)x_2 - x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 4x_2 + (-1-\lambda)x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Potřebujeme, aby uvedená homogenní soustava se čtvercovou maticí měla nenulové řešení. Matice soustavy tedy musí být singulární, tj. musí mít nulový determinant:

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ -4 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Hledáme tedy λ takové, aby $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$. Příště už toto odvození nebudeme opakovat, ale začneme rovnou od rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (5-\lambda)(4-\lambda)(-1-\lambda) - 16 - \big(-4(4-\lambda) - 4(5-\lambda) + 2(-1-\lambda)\big) = -(\lambda-3)^2(\lambda-2),$$

takže vlastní čísla jsou $\lambda = 3$ a $\lambda = 2$. Najdeme ještě vlastní vektory. Nejprve najdeme vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 3:

$$\begin{pmatrix} 5-3 & -2 & 2 \\ -1 & 4-3 & -1 \\ -4 & 4 & -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Báze řešení homogenní soustavy s maticí $(1 \ -1 \ \ 1)$ je například $\{(1,1,0), (-1,0,1)\}$. Toto jsou dva lineárně nezávislé vlastní vektory, které přísluší vlastnímu číslu 3. Všechny vlastní vektory příslušející vlastnímu číslu 3 tvoří lineární obal této báze, ovšem bez nulového vektoru. Nyní najdeme vlastní vektory, které přísluší vlastnímu číslu 2:

$$\begin{pmatrix} 5-2 & -2 & 2 \\ -1 & 4-2 & -1 \\ -4 & 4 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dimenze prostoru řešení homogenní soustavy s touto maticí je 1, tj. stačí najít jeden vektor řešení: $(-2, 1, 4)$ a ostatní vektory řešení jsou jeho násobky. Tato řešení (bez nulového) jsou též všechny vlastní vektory matice $\mathbf{A}$, které přísluší vlastnímu číslu 2.

Celkem tedy má matice $\mathbf{A}$ tři lineárně nezávislé vlastní vektory: $(1,1,0), (-1,0,1), (-2,1,4)$. První dva příslušejí vlastnímu číslu 3 a poslední přísluší vlastnímu číslu 2.

81. Vysvětlete, proč matice, která má pouze jednonásobná vlastní čísla, je podobná s diagonální maticí.

(7.83)

Nechť matice A (n,n) má pouze jednonásobná vlastní čísla, čili má n různých vlastních čísel. Vlastní vektory příslušející k různým číslům jsou lineárně nezávislé. Matice má také n lineárně nezávislých vlastních vektorů a je tedy podobná diagonální matici.

Podobnost s diagonální maticí

7.81. Příklad. Diagonální matice

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom $(\lambda_1 - \lambda)\,(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$, protože determinant diagonální matice $\mathbf{D} - \lambda\,\mathbf{E}$ je roven součinu prvků na diagonále. Vlastní čísla matice $\mathbf{D}$ tedy jsou $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Vlastní vektor matice $\mathbf{D}$ příslušný vlastnímu číslu λ_i je vektor obsahující samé nuly s výjimkou i-té složky, ve které je nějaké nenulové číslo, třeba jednička.

Matici $\mathbf{D}$ z tohoto příkladu budeme značit $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Tím ušetříme papír.

7.82. Věta. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice typu (n, n). Sestavme libovolná komplexní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ do diagonální matice $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ a libovolné nenulové vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ z $\mathbf{C}^n$ zapišme do sloupců matice $\mathbf{P}$, tj. $\mathbf{P} = (\boldsymbol{x}_1^T, \dots, \boldsymbol{x}_n^T)$. Pak platí: čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastními čísly matice $\mathbf{A}$ a $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ jsou jejich odpovídající vlastní vektory právě tehdy, když je splněna rovnost $\mathbf{PD} = \mathbf{AP}$.

Důkaz. Rozepišme maticové násobení: $\mathbf{PD} = (\boldsymbol{x}_1^T, \dots, \boldsymbol{x}_n^T) \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_1\,\boldsymbol{x}_1^T, \dots, \lambda_n\,\boldsymbol{x}_n^T)$. Dále je $\mathbf{AP} = \mathbf{A}(\boldsymbol{x}_1^T, \dots, \boldsymbol{x}_n^T) = (\mathbf{A}\boldsymbol{x}_1^T, \dots, \mathbf{A}\boldsymbol{x}_1^T)$. Máme tedy obě strany zkoumané rovnosti $\mathbf{PD} = \mathbf{AP}$ rozepsány do sloupců. Vidíme, že rovnost v i-tém sloupci $\lambda_i\,\boldsymbol{x}_i^T = \mathbf{A}\boldsymbol{x}_i^T$ platí právě tehdy, když λ_i je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a $\boldsymbol{x}_i$ je příslušný vlastní vektor.

7.83. Věta. Nechť má čtvercová matice $\mathbf{A}$ s n řádky n lineárně nezávislých vlastních vektorů (každý z nich přísluší nějakému vlastnímu číslu matice). Pak je matice $\mathbf{A}$ podobná diagonální matici.

Důkaz. Sestavíme diagonální matici $\mathbf{D}$ z vlastních čísel příslušných vlastním vektorům $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$. Dále použijeme předchozí větu. Protože matice $\mathbf{P} = (\boldsymbol{x}_1^T, \dots, \boldsymbol{x}_n^T)$ obsahuje podle předpokladu věty lineárně nezávislé sloupce, je $\mathbf{P}$ regulární, takže je možné vztah $\mathbf{PD} = \mathbf{AP}$ vynásobit zprava maticí $\mathbf{P}^{-1}$. Dostáváme $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, takže matice $\mathbf{A}$ je podobná matici $\mathbf{D}$.

7.84. Věta. Nechť je matice $\mathbf{A}$ podobná diagonální matici, to znamená, že existuje regulární matice $\mathbf{P}$ a diagonální matice $\mathbf{D}$ takové, že $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$. Pak $\mathbf{D}$ obsahuje vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ a ve sloupcích matice $\mathbf{P}$ jsou vlastní vektory příslušné (podle pořadí) odpovídajícím vlastním číslům zapsaným v $\mathbf{D}$.

Důkaz. Po převedení vztahu $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ na $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$ stačí použít větu 7.82.

82. Proč je matice singulární právě tehdy, když má nulu jako vlastní číslo?

Je-li 0 vlastni cislo matice A, pak musi byt A -λE = A -0E = A singularni. (aby splnovalo rovnost (A-λE)x=o) A naopak: Je-li A singularni, pak det(A - λE) = 0 pro λ = 0, takze nula je vlastni cislo.