Lineární zobrazení

70. Charakterizujte lineární zobrazení, vysvětlete princip superpozice.

(7.6; 7.8)
Nechť A: L1 ->L2 je zobrazeni z mnoziny L1 do mnoziny L2. Zobrazeni A nazyvame linearnim, pokud pro vsechna x,y z L1 a skalar 'a' plati: (1): A(x+y) = A(x) + A(y); (2): A(a*x) = a*A(x).

Princip superpozice: Necht' x,y jsou vektory z L1, a 'a' a 'b' jsou skalary, pak pro linearni zobrazeni plati: A(a*x+b*y) = a*A(x) + b*A(y).

Definice zobrazení

7.2. Definice. Nechť L_1 a L_2 jsou libovolné množiny. *Zobrazením $\mathcal{A}$ z množiny L_1 do množiny L_2* rozumíme jakýkoli předpis, který každému prvku z množiny L_1 přiřadí jednoznačným způsobem nějaký prvek z množiny L_2. Skutečnost, že $\mathcal{A}$ je zobrazení z množiny L_1 do množiny L_2 zapisujeme $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$.

Je-li $\boldsymbol{x} \in L_1$, pak zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ přiřadí prvku $\boldsymbol{x}$ jednoznačně nějaký prvek z množiny L_2. Tento prvek označujeme symbolem $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) \in L_2$ a říkáme mu *hodnota zobrazení $\mathcal{A}$ v bodě $\boldsymbol{x}$*. Je-li $M \subseteq L_1$, pak definujeme

$$\mathcal{A}(M) = \{\boldsymbol{y} \in L_2;\ \exists \boldsymbol{x} \in M \text{ tak, že } \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}.$$

Zobrazení „na“

7.3. Definice. Nechť L_1 a L_2 jsou libovolné množiny a uvažujme $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$. Pokud platí $\mathcal{A}(L_1) = L_2$, říkáme, že $\mathcal{A}$ je zobrazení z množiny L_1 *na množinu L_2* (nebo říkáme, že zobrazení je *surjektivní*).

7.4. Poznámka. Zobrazení $\mathcal{A}$ z množiny L_1 na množinu L_2 je speciální případ zobrazení z množiny L_1 do množiny L_2 (všimneme si rozdílnosti slůvek „do“ a „na“). Může se stát, že existují prvky $\boldsymbol{y} \in L_2$, pro které neexistuje žádný prvek $\boldsymbol{x} \in L_1$, který by splňoval $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$. V takovém případě zobrazení $\mathcal{A}$ není na množinu L_2. Lidově řečeno, množina L_2 je v takovém případě „větší“, než množina všech hodnot zobrazení $\mathcal{A}$.

Prosté zobrazení

7.5. Definice. Nechť L_1 a L_2 jsou libovolné množiny a uvažujme $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$. Zobrazení $\mathcal{A}$ je *prosté* (*injektivní*), pokud pro každé dva prvky $\boldsymbol{x}_1 \in L_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in L_1$, $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$ platí $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) \neq \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2)$.

Definice lineárního zobrazení

7.6. Definice. Nechť L_1 a L_2 jsou lineární prostory, $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je zobrazení z L_1 do L_2. Zobrazení $\mathcal{A}$ nazýváme *lineárním zobrazením*, pokud pro všechna $\boldsymbol{x} \in L_1$, $\boldsymbol{y} \in L_1$, $\alpha \in \mathbf{R}$ platí

$$\begin{aligned} &(1) \quad \mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y}), \\ &(2) \quad \mathcal{A}(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) = \alpha \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

7.7. Poznámka. Lineární zobrazení „zachovává“ operace sčítání a násobení konstantou. Sečteme-li dva prvky z L_1 a výsledek převedeme prostřednictvím lineárního zobrazení do L_2, výjde totéž, jako kdybychom nejprve jednotlivé prvky převedli prostřednictvím zobrazení do L_2 a tam je sečetli. Všimneme si, že první operace „+“ ve vlastnosti (1) je sčítáním definovaným na lineárním prostoru L_1, zatímco druhá operace „+“ v této vlastnosti je sčítáním definovaným na lineárním prostoru L_2. Tato dvě sčítání mohou být definována zcela rozdílným způsobem na zcela rozdílných lineárních prostorech. Podobně ve vlastnosti (2) je první operace „$\cdot$“ násobkem definovaným na L_1, zatímco druhá operace „$\cdot$“ je násobek definovaný na L_2.

Princip superpozice

7.8. Věta (princip superpozice). Nechť L_1 a L_2 jsou lineární prostory. Zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární právě tehdy, když pro všechna $\boldsymbol{x} \in L_1$, $\boldsymbol{y} \in L_1$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$ platí

$$\mathcal{A}(\alpha\,\boldsymbol{x} + \beta\,\boldsymbol{y}) = \alpha\,\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \beta\,\mathcal{A}(\boldsymbol{y}). \tag{7.1}$$

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že pro zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ platí (7.1) pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L_1$ a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Dokážeme, že $\mathcal{A}$ je lineární, tj. že platí (1) a (2) z definice 7.6. Pokud zvolíme $\alpha = \beta = 1$, plyne z (7.1) vlastnost (1) a pokud volíme $\beta = 0$, plyne z (7.1) vlastnost (2).

Nechť nyní $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární. Platí

$$\mathcal{A}(\alpha\,\boldsymbol{x} + \beta\,\boldsymbol{y}) \overset{(1)}{=} \mathcal{A}(\alpha\,\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\beta\,\boldsymbol{y}) \overset{(2)}{=} \alpha\,\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \beta\,\mathcal{A}(\boldsymbol{y}).$$

Nad rovnítky jsme uvedli, kterou vlastnost jsme zrovna použili.

7.9. Poznámka. Opakovaným použitím principu superpozice (nebo formálně matematickou indukcí) lze snadno dokázat, že $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární právě tehdy, když pro všechna $n \in \mathbf{N}$, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in L_1$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ platí

$$\mathcal{A}(\alpha_1\,\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\,\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n\,\boldsymbol{x}_n) = \alpha_1\,\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) + \alpha_2\,\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2) + \cdots + \alpha_n\,\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n). \tag{7.2}$$

71. Definujte jádro, defekt a hodnost lineárního zobrazení. Proč jádro lineárního zobrazení tvoří lineární podprostor?

definice 7.16 a 7.21. Fakt, ze jadro tvori linearni prostor, se dokazuje nejdriv tim, ze jadro nikdy neni prazdne (vzdycky obsahuje nulovy vektor) a pak se dokazujou dve vlastnosti z definice linearniho podprostoru. (jinak je to podrobne popsano ve vete 7.19)

Jádro zobrazení

7.16. Definice. Nechť L_1, L_2 jsou lineární prostory, $\boldsymbol{o}_2$ je nulový vektor v lineárním prostoru L_2 a $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Množinu

$$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\boldsymbol{x} \in L_1;\ \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}_2\}$$

nazýváme *jádrem lineárního zobrazení* $\mathcal{A}$.

7.19. Věta. Jádro lineárního zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ tvoří lineární podprostor lineárního prostoru L_1.

Důkaz. Především je $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ neprázdná množina, protože podle věty 7.10 obsahuje tato množina nulový vektor. Podle definice 1.17 máme dokázat (1) je-li $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, pak též $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ a (2) je-li $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, pak je $\alpha\,\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Předpoklady podle definice 7.16 říkají $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{o}_2$ a máme dokázat, že $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{o}_2$, $\mathcal{A}(\alpha\,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}_2$. Podle definice 7.6 lineárního zobrazení platí

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{o}_2 + \boldsymbol{o}_2 = \boldsymbol{o}_2, \qquad \mathcal{A}(\alpha\,\boldsymbol{x}) = \alpha\,\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \alpha\,\boldsymbol{o}_2 = \boldsymbol{o}_2.$$

7.20. Věta. Množina $\mathcal{A}(L_1)$ všech hodnot lineárního zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ tvoří lineární podprostor lineárního prostoru L_2.

Důkaz. Množina L_1 je sama v sobě podprostorem. Podle věty 7.14 a poznámky 7.15 musí být lineárním podprostorem i množina $\mathcal{A}(L_1)$.

Defekt a hodnost zobrazení

7.21. Definice. *Defekt lineárního zobrazení* $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je definován, jako $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ a *hodnost lineárního zobrazení* $\mathcal{A}$ je definována jako $\dim\mathcal{A}(L_1)$. Defekt $\mathcal{A}$ značíme $\operatorname{def}\mathcal{A}$ a hodnost $\mathcal{A}$ značíme $\operatorname{hod}\mathcal{A}$. Je tedy

$$\operatorname{def}\mathcal{A} = \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A},$$
$$\operatorname{hod}\mathcal{A} = \dim\mathcal{A}(L_1).$$

7.22. Poznámka. Předchozí dvě věty zaručují smysluplnost definice defektu a hodnosti: $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}(L_1)$ jsou lineární podprostory. Defekt zobrazení udává zhruba řečeno „vzdálenost“ zobrazení od ideálního prostého zobrazení. Jak moc je zobrazení $\mathcal{A}$ „defektní“ souvisí také s tím, kolik informace, které dovedeme v prostoru L_1 rozlišit, se stává po aplikaci zobrazení $\mathcal{A}$ v prostoru L_2 nerozlišitelné.

72. Jak dodefinujeme lineární zobrazení na celém prostoru, když jsou známy jeho hodnoty na bázi? Proč je toto rozšíření jednoznačné?

Nechť A: L1 -> L2 je linearni zobrazeni. Pomoci prvku baze prostoru L1 muzeme vyjadrit jakykoliv vektor z L1 jako linearni kombinace prkvu baze. Podle predpokladu zname hodnoty zobrazenych vektoru baze. Pak pouzijeme vlastnosti linearniho zobrazeni a tim najdeme hodnotu zobrazeni jakehokoliv vektoru z L1. (jednoznacnost se dokazuje ve vete 7.27(2))

Lineární zobrazení na bázi

7.26. Poznámka. Následující věta ukazuje, že pokud známe hodnoty zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ jen na bázi lineárního prostoru L_1 a toto zobrazení má být lineární, pak jsou již známy jeho hodnoty na celém prostoru L_1. Jinými slovy, lineární zobrazení je určeno jednoznačně svými hodnotami na bázi L_1.

7.27. Věta. Nechť $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ je báze lineárního prostoru L_1 a nechť jsou dány libovolné vektory $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_n$ z lineárního prostoru L_2. Pak existuje právě jedno lineární zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$, pro které platí

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{y}_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \tag{7.3}$$

Důkaz. (1) Existence. Nechť $\boldsymbol{x} \in L_1$. Protože $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ je báze L_1, existují koeficienty $\alpha_i \in \mathbf{R}$ takové, že $\boldsymbol{x} = \alpha_1\,\boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\,\boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_n\,\boldsymbol{b}_n$. Hodnotu zobrazení $\mathcal{A}$ v bodě $\boldsymbol{x}$ nyní definujeme takto:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \alpha_1\,\boldsymbol{y}_1 + \alpha_2\,\boldsymbol{y}_2 + \cdots + \alpha_n\,\boldsymbol{y}_n.$$

Zobrazení je lineární a splňuje (7.3). Ukážeme, proč. Čísla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ jsou souřadnicemi vektoru $\boldsymbol{x}$ vzhledem k uspořádané bázi (B). V příkladu 7.25 jsme ukázali, že

$$\text{je-li} \quad \boldsymbol{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)_{(B)}, \quad \boldsymbol{y} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)_{(B)}, \quad \gamma \in \mathbf{R},$$
$$\text{pak} \quad \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \dots, \alpha_n+\beta_n)_{(B)}, \quad \gamma\,\boldsymbol{x} = (\gamma\,\alpha_1, \gamma\,\alpha_2, \dots, \gamma\,\alpha_n)_{(B)}.$$

Z těchto vlastností okamžitě plyne linearita zobrazení $\mathcal{A}$. Protože souřadnice vektoru $\boldsymbol{b}_i$ vzhledem k bázi (B) jsou všechny nulové s výjimkou i-té souřadnice, která je rovna jedné, platí

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i) = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} 0 \cdot \boldsymbol{y}_j + 1 \cdot \boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{y}_i,$$

což dokazuje požadovanou vlastnost (7.3).

(2) Jednoznačnost. Nechť ještě $\mathcal{B}\colon L_1 \to L_2$ je lineární a splňuje vlastnost (7.3). Pak je lineární i zobrazení $(\mathcal{A}-\mathcal{B})\colon L_1 \to L_2$. Platí $(\mathcal{A}-\mathcal{B})(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{o}, \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$, protože $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ splňují vlastnost (7.3). Z linearity zobrazení $\mathcal{A}-\mathcal{B}$ plyne, že

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}-\mathcal{B})(\boldsymbol{x}) &= (\mathcal{A}-\mathcal{B})(\alpha_1\,\boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\,\boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_n\,\boldsymbol{b}_n) = \\ &= \alpha_1\,(\mathcal{A}-\mathcal{B})(\boldsymbol{b}_1) + \alpha_2\,(\mathcal{A}-\mathcal{B})(\boldsymbol{b}_2) + \cdots + \alpha_n\,(\mathcal{A}-\mathcal{B})(\boldsymbol{b}_n) = \\ &= \alpha_1\,\boldsymbol{o} + \alpha_2\,\boldsymbol{o} + \cdots + \alpha_n\,\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}.\end{aligned}$$

Vidíme, že zobrazení $\mathcal{A}-\mathcal{B}$ je nulové na celém definičním oboru, takže $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

73. Nechť a : L1 → L2 je lineární zobrazení. Jak souvisí defekt a, hodnost a s dimL1 a dimL2?

(7.53)
def(A) + hod(A) = dim(L1)

7.53. Věta. Nechť L_1, L_2 jsou lineární prostory konečné dimenze, $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární. Pak

$$\operatorname{def}\mathcal{A} + \operatorname{hod}\mathcal{A} = \dim L_1.$$

Defekt + hodnost zobrazení

Důkaz. Zvolme nějakou bázi (B) v L_1 a bázi (C) v L_2. Nechť $\mathbf{A}$ je matice zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B) a (C). Podle věty 7.49 je

$$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\boldsymbol{x} \in L_1;\ \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}\} = \left\{\boldsymbol{x} \in L_1;\ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{(B)} \quad \text{a} \quad \mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Protože z příkladu 7.25 víme, že zobrazení, které vektoru $\boldsymbol{x}$ přiřadí jeho souřadnice, je izomorfismem, platí

$$\operatorname{def}\mathcal{A} = \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \dim\{\boldsymbol{x} \in L_1;\ \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}\} = \dim\{\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n;\ \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{a}^T = \boldsymbol{o}^T\}.$$

Vidíme, že $\operatorname{def}\mathcal{A}$ je roven dimenzi prostoru řešení homogenní soustavy s maticí soustavy $\mathbf{A}$. Podle věty 5.13 je tato dimenze rovna $k = n - \operatorname{hod}\mathbf{A}$, kde n je počet neznámých soustavy. Počet neznámých je v tomto případě roven počtu prvků báze B, takže je roven $\dim L_1$.

Dostáváme výsledek $\operatorname{def}\mathcal{A} = \dim L_1 - \operatorname{hod}\mathbf{A} = \dim L_1 - \operatorname{hod}\mathcal{A}$. V poslední rovnosti jsme použili větu 7.48.

74. Isomorfismus lineárních prostorů. Proč jsou dva lineární prostory shodné konečné dimense vzájemně isomorfní?

veta 7.39 (spíš věta 7.42)

7.37. Definice. Zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ nazýváme *izomorfismus*, pokud je lineární, prosté a „na“ L_2.

Izomorfismus

Lineární prostor L_1 nazýváme *izomorfní s* L_2, pokud existuje izomorfismus $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$. Protože k prostému lineárnímu zobrazení, které je „na“ L_2, existuje inverzní zobrazení $\mathcal{A}^{-1}\colon L_2 \to L_1$, které je podle věty 7.36 rovněž izomorfismem, platí: je-li L_1 izomorfní s L_2, je též L_2 izomorfní s L_1. Často proto říkáme, že L_1 a L_2 jsou (vzájemně) izomorfní.

7.38. Poznámka. Izomorfismus $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ převádí podle věty 7.30 lineárně nezávislé vektory v L_1 na lineárně nezávislé vektory v L_2. Protože je lineární, pak přenáší i další pojmy „linearity“ z L_1 do L_2: lineární závislost (věta 7.29), lineární obaly (věta 7.14), podprostory (poznámka 7.15) a báze. Jsou-li L_1 a L_2 izomorfní, je tedy jedno, zda při vyšetřování „lineárních záležitostí“ se pohybujeme v L_1 nebo v L_2. Veškeré struktury přeneseme prostřednictvím izomorfismu do takového lineárního prostoru, se kterým se nám lépe pracuje. Z tohoto pohledu je pro nás důležitá následující věta.

7.39. Věta. Každý lineární prostor L, pro který je $\dim L = n$, je izomorfní s lineárním prostorem $\mathbf{R}^n$.

Důkaz. Protože $\dim L = n$, existuje konečná báze $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ lineárního prostoru L. Uspořádejme tuto bázi a označme ji (B). Příklad 7.25 ukazuje, že zobrazení $\mathcal{A}\colon L \to \mathbf{R}^n$, které každému prvku $\boldsymbol{x} \in L$ přiřadí jeho souřadnice vzhledem k bázi (B), je lineární, je „na“ $\mathbf{R}^n$ a platí pro ně $\operatorname{def}\mathcal{A} = 0$. Podle věty 7.30 je toto zobrazení prosté, takže podle definice 7.37 jde o izomorfismus.

7.40. Poznámka. Se všemi lineárními prostory konečné dimenze můžeme tedy pracovat stejně jako s $\mathbf{R}^n$. Stačí v lineárním prostoru najít nějakou bázi a dále už jen pracovat se souřadnicemi vzhledem k této bázi. Setkali jsme se například s lineárním prostorem všech polynomů nejvýše n-tého stupně, který je izomorfní s $\mathbf{R}^{n+1}$, s lineárním prostorem matic typu (m, n), který je izomorfní s $\mathbf{R}^{m \cdot n}$ a s lineárním prostorem orientovaných úseček, který je izomorfní s $\mathbf{R}^3$.

7.41. Věta. Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ a $\mathcal{B}\colon L_2 \to L_3$ jsou izomorfismy. Pak je izomorfismem i složené zobrazení $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})\colon L_1 \to L_3$.

Důkaz. Že je $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ lineární, dokazuje věta 7.32. Ukážeme, že je $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ prosté. Nechť $\boldsymbol{x} \in L_1$, $\boldsymbol{y} \in L_1$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$. Pak platí $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) \neq \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$, protože $\mathcal{A}$ je prosté. Také platí $\mathcal{B}\big(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})\big) \neq \mathcal{B}\big(\mathcal{A}(\boldsymbol{y})\big)$, protože je $\mathcal{B}$ prosté. Tím jsme dokázali, že $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\boldsymbol{x}) \neq (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\boldsymbol{y})$.

Ukážeme ještě, že je $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ „na“ L_3. Protože je $\mathcal{A}(L_1) = L_2$ a $\mathcal{B}(L_2) = L_3$, je též

$$(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(L_1) = \mathcal{B}\big(\mathcal{A}(L_1)\big) = \mathcal{B}(L_2) = L_3.$$

7.42. Věta. Dva lineární prostory konečné dimenze jsou izomorfní právě tehdy, když se rovnají jejich dimenze.

Důkaz. Nechť $\dim L_1 = \dim L_2 = n$. Oba lineární prostory jsou izomorfní s $\mathbf{R}^n$ podle věty 7.39. Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to \mathbf{R}^n$ a $\mathcal{B}\colon L_2 \to \mathbf{R}^n$ jsou izomorfismy. Pak podle věty 7.36 je též $\mathcal{B}^{-1}\colon \mathbf{R}^n \to L_2$ izomorfismem a podle věty 7.41 je $(\mathcal{B}^{-1} \circ \mathcal{A})\colon L_1 \to L_2$ izomorfismus.

Nechť naopak $\dim L_1 \neq \dim L_2$. Protože izomorfismus převádí podle věty 7.30 lineárně nezávislé vektory na lineárně nezávislé vektory, převádí bázi v L_1 na bázi v L_2. Takové báze pak musejí mít stejný počet prvků, což je spor s předpokladem $\dim L_1 \neq \dim L_2$, takže izomorfismus $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ neexistuje.

75. Definice, existence a jednoznanost matice lineárního zobrazení.

Matice lineárního zobrazení

7.43. Definice. Nechť L_1 a L_2 jsou lineární prostory konečné dimenze, $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární. Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je uspořádaná báze L_1 a $(C) = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_m)$ je uspořádaná báze L_2. Matici $\mathbf{A}$ typu (m, n), která splňuje maticovou rovnost

$$\big(\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_2), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n)\big) = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_m) \cdot \mathbf{A}, \tag{7.4}$$

nazýváme *maticí zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k uspořádaným bázím (B) a (C)*. Na definiční rovnost (7.4) se díváme jako na součin jednořádkové matice vektorů $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_m)$ s maticí $\mathbf{A}$ reálných čísel typu (m, n), který se má rovnat jednořádkové matici vektorů $\big(\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_2), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n)\big)$.

7.44. Věta. Nechť platí předpoklady z definice 7.43. Pak matice $\mathbf{A}$ zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B) a (C) existuje a je určena jednoznačně.

Důkaz. Povšimneme si, že i-tý sloupec matice $\mathbf{A}$ obsahuje souřadnice vektoru $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i)$ vzhledem k bázi (C). To plyne přímo z definiční rovnosti (7.4) a z definice součinu matic. Máme tedy metodu, jak sestavit matici zobrazení.

Vzhledem k tomu, že jsou souřadnice vektoru vzhledem k bázi (C) určeny jednoznačně, je i matice $\mathbf{A}$ zobrazení $\mathcal{A}$ určena tímto zobrazením a bázemi (B) a (C) jednoznačně.

7.45. Věta. Nechť L_1, L_2 jsou lineární prostory konečné dimenze, $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je uspořádaná báze L_1 a $(C) = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_m)$ je uspořádaná báze L_2. Pak ke každé matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) existuje právě jedno lineární zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ takové, že $\mathbf{A}$ je maticí zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B) a (C).

Důkaz. Rovnost (7.4) udává hodnoty zobrazení $\mathcal{A}$ na prvcích báze B. Z věty 7.27 víme, že známe-li hodnoty lineárního zobrazení na bázi, je toto lineární zobrazení určeno jednoznačně na celém definičním oboru.

7.46. Poznámka. Předchozí dvě věty ukazují, že pokud pevně zvolíme báze (B) v L_1 a (C) v L_2, pak je lineární zobrazení určeno svou maticí jednoznačně a obráceně, lineární zobrazení jednoznačně určuje svou matici. Místo lineárních zobrazení na lineárních prostorech konečné dimenze se tak můžeme zabývat jen maticemi těchto zobrazení bez ztráty informace.

76. Vysvětlete, proč platí Ax = y, kde A je matice lineárního zobrazení a : L1 → L2, x jsou souřadnice vektoru u ∈ L1 a y jsou souřadnice vektoru a(u).

krasne popsano ve vete 7.49

7.49. Věta. Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ je báze v L_1, $(C) = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \dots, \boldsymbol{c}_m)$ je báze v L_2, $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární a $\mathbf{A}$ je maticí zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B) a (C). Pak pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in L_1$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{(B)}$, platí pro souřadnice vektoru $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = (y_1, y_2, \dots, y_m)_{(C)}$ následující rovnost: *Zobrazení souřadnic*

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

Důkaz. Označme $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Protože $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{(B)}$, je podle definice 6.10 $\boldsymbol{x} = x_1\,\boldsymbol{b}_1 + x_2\,\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_n\,\boldsymbol{b}_n$. Pro vektor $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ platí:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) &= \mathcal{A}(x_1\,\boldsymbol{b}_1 + x_2\,\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_n\,\boldsymbol{b}_n) = x_1\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1) + x_2\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_2) + \cdots + x_n\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n) = \\
&= x_1\,(\boldsymbol{c}_1\,a_{1,1} + \boldsymbol{c}_2\,a_{2,1} + \cdots + \boldsymbol{c}_m\,a_{m,1}) + x_2\,(\boldsymbol{c}_1\,a_{1,2} + \boldsymbol{c}_2\,a_{2,2} + \cdots + \boldsymbol{c}_m\,a_{m,2}) + \cdots + \\
&\qquad + \cdots + x_n\,(\boldsymbol{c}_1\,a_{1,n} + \boldsymbol{c}_2\,a_{2,n} + \cdots + \boldsymbol{c}_m\,a_{m,n}) = \\
&= \boldsymbol{c}_1\,(a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,n}\,x_n) + \boldsymbol{c}_2\,(a_{2,1}\,x_2 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,n}\,x_n) + \cdots + \\
&\qquad + \cdots + \boldsymbol{c}_m\,(a_{m,1}\,x_2 + a_{m,2}\,x_2 + \cdots + a_{m,n}\,x_n) = \\
&= y_1\,\boldsymbol{c}_1 + y_2\,\boldsymbol{c}_2 + \cdots + y_m\,\boldsymbol{c}_m.
\end{aligned}$$

Z definice 6.10 vidíme, že čísla y_j jsou souřadnicemi vektoru $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ vzhledem k bázi (C). Z poslední rovnosti našeho výpočtu plyne, že $y_j = a_{j,1}\,x_2 + a_{j,2}\,x_2 + \cdots + a_{j,n}\,x_n$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$, což ale podle definice maticového násobení 3.34 není nic jiného, než dokazovaný vzorec (7.5).

77. Zdůvodněte, proč hodnost lineárního zobrazení je rovna hodnosti matice tohoto zobrazení.

7.48. Věta. Nechť (B) je báze v L_1, (C) je báze v L_2, $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární a $\mathbf{A}$ je maticí zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B) a (C). Pak $\operatorname{hod}\mathbf{A} = \operatorname{hod}\mathcal{A}$. *Hodnost matice zobrazení*

Důkaz. Označíme-li symboly $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ jednotlivé sloupce matice $\mathbf{A}$, pak platí:

$$\begin{aligned}
\operatorname{hod}\mathcal{A} &= \dim\mathcal{A}(L_1) = \dim\mathcal{A}\big(\langle B\rangle\big) = \dim\big\langle\mathcal{A}(B)\big\rangle = \dim\big\langle\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_2), \dots, \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n)\big\rangle = \\
&= \dim\big\langle(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \dots, \boldsymbol{c}_m)\cdot\mathbf{A}_1, (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \dots, \boldsymbol{c}_m)\cdot\mathbf{A}_2, \dots, (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \dots, \boldsymbol{c}_m)\cdot\mathbf{A}_n\big\rangle = \\
&= \dim\langle\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n\rangle = \operatorname{hod}\mathbf{A}.
\end{aligned}$$

V uvedené řadě rovností jsme nejprve použili definici hodnosti zobrazení 7.21, dále vlastnosti báze, dále větu 7.14, pak jsme rozepsali množinu $\mathcal{A}(B)$ výčtem prvků, dále jsme využili rovnost (7.4) a konečně jsme využili toho, že maximální počet lineárně nezávislých vektorů z množiny $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n\}$ (věta 3.18) je roven maximálnímu počtu lineárně nezávislých vektorů ze „skoro stejné“ množiny, jen každý vektor je násoben stejným řádkem lineárně nezávislých vektorů $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \dots, \boldsymbol{c}_m)$. Úplně poslední rovnost je v souladu s definicí hodnosti matice 3.15 při použití věty 3.31.

7.49. Věta. Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ je báze v L_1, $(C) = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \dots, \boldsymbol{c}_m)$ je báze v L_2, $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární a $\mathbf{A}$ je maticí zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B) a (C). Pak pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in L_1$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{(B)}$, platí pro souřadnice vektoru $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = (y_1, y_2, \dots, y_m)_{(C)}$ následující rovnost: *Zobrazení souřadnic*

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

7.29. Věta. Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Pak platí: *Zobrazení lineárně nezávislých vektorů*
(1) Jsou-li $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ lineárně závislé vektory v L_1, pak jsou i vektory $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2), \dots, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n)$ lineárně závislé v L_2.
(2) Jsou-li $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ lineárně nezávislé vektory v L_1, pak vektory $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2), \dots, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n)$ v L_2 nemusí být lineárně nezávislé.

7.30. Věta. Nechť $\mathcal{A}: L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Následující podmínky jsou ekvivalentní:
(1) $\mathcal{A}$ je prosté.
(2) $\operatorname{def} \mathcal{A} = 0$.
(3) Jsou-li $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ lineárně nezávislé, jsou lineárně nezávislé i vektory $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n)$.

Složené zobrazení

7.31. Definice. Nechť $\mathcal{A}: L_1 \to L_2$ a $\mathcal{B}: L_2 \to L_3$ jsou zobrazení. Symbolem $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}: L_1 \to L_3$ označujeme *složené zobrazení*, které je definováno předpisem $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\boldsymbol{x}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}))$, $\forall \boldsymbol{x} \in L_1$.

7.32. Věta. Nechť $\mathcal{A}: L_1 \to L_2$ a $\mathcal{B}: L_2 \to L_3$ jsou lineární zobrazení. Pak je lineární též složené zobrazení $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A}): L_1 \to L_3$.

Inverzní zobrazení

7.33. Definice. *Identické zobrazení* je zobrazení $\mathcal{I}: L \to L$, které je definováno předpisem $\mathcal{I}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. Stručně nazýváme zobrazení $\mathcal{I}$ *identitou*. Nechť $\mathcal{A}: L_1 \to L_2$ je prosté zobrazení. Pak definujeme *inverzní zobrazení* $\mathcal{A}^{-1}: \mathcal{A}(L_1) \to L_1$ jako takové zobrazení, které splňuje $\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A} = \mathcal{I}$, kde $\mathcal{I}: L_1 \to L_1$ je identita.

7.34. Věta. Je-li $\mathcal{A}: L_1 \to L_2$ prosté, pak existuje právě jedno inverzní zobrazení $\mathcal{A}^{-1}: \mathcal{A}(L_1) \to L_1$.

Důkaz. Pro každý prvek $\boldsymbol{y} \in \mathcal{A}(L_1)$ existuje právě jeden prvek $\boldsymbol{x} \in L_1$ takový, že $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$. To plyne přímo z definice 7.5 prostého zobrazení. Definujeme $\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$. Vidíme, že $\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A}$ je identita.

7.35. Věta. Je-li L lineární prostor, pak identita $\mathcal{I}: L \to L$ je lineární. Je-li $\mathcal{A}: L_1 \to L_2$ lineární a prosté zobrazení, pak též $\mathcal{A}^{-1}: \mathcal{A}(L_1) \to L_1$ je lineární.

7.36. Věta. Nechť $\mathcal{A}: L_1 \to L_2$ je lineární, prosté a „na“ L_2. Pak je inverzní zobrazení $\mathcal{A}^{-1}: L_2 \to L_1$ rovněž lineární, prosté a „na“ L_1.

Matice složeného zobrazení

7.55. Věta. Nechť L_1, L_2, L_3 jsou lineární prostory konečné dimenze, $\mathcal{A}: L_1 \to L_2$, $\mathcal{B}: L_2 \to L_3$ jsou lineární zobrazení. Nechť dále (B) je uspořádaná báze L_1, (C) je uspořádaná báze L_2 a (D) je uspořádaná báze L_3. Předpokládejme ještě, že $\mathbf{A}$ je matice zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B) a (C) a konečně $\mathbf{B}$ je matice zobrazení $\mathcal{B}$ vzhledem k bázím (C) a (D). Pak $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ je matice složeného zobrazení $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B) a (D).

Matice identity

7.56. Věta. Nechť (B) a (C) jsou dvě báze lineárního prostoru L. Pak matice identického zobrazení $\mathcal{I}: L \to L$ vzhledem k bázím (B) a (C) je rovna matici přechodu $\mathbf{A}_{(C,B)}$ od báze (C) k bázi (B).

7.59. Věta. Nechť $\mathcal{A}: L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení a nechť (B_1), (C_1) jsou báze lineárního prostoru L_1 a (B_2), (C_2) jsou báze lineárního prostoru L_2. Označme symbolem $\mathbf{A}_{(B_1,C_1)}$ matici přechodu od báze (B_1) k (C_1) a $\mathbf{A}_{(C_2,B_2)}$ matici přechodu od báze (C_2) k (B_2). Je-li $\mathbf{A}$ matice zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B_1), (B_2), pak $\mathbf{A}_{(C_2,B_2)} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_{(B_1,C_1)}$ je matice téhož lineárního zobrazení vzhledem k bázím (C_1), (C_2).

Zobrazení do stejného prostoru

7.60. Definice. Nechť $\mathcal{A}: L \to L$ je lineární zobrazení (lineární prostor vzorů i obrazů je stejný a má konečnou dimenzi). Místo, abychom mluvili o matici lineárního zobrazení vzhledem ke stejným bázím (B) a (B) (to působí, jako bychom koktali), stručně se zmiňujeme o *matici zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázi (B)*.

7.61. Věta. Nechť $\mathcal{A}: L \to L$ je lineární zobrazení, (B), (C) jsou dvě báze lineárního prostoru L a $\mathbf{A}_{(B,C)}$ je matice přechodu od báze (B) k bázi (C). Je-li $\mathbf{A}$ matice zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázi (B), pak $\mathbf{A}^{-1}_{(B,C)} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_{(B,C)}$ je maticí téhož lineárního zobrazení vzhledem k bázi (C).

7.63. Definice. Matice $\mathbf{A}$ je *podobná* matici $\mathbf{B}$, pokud existuje regulární matice $\mathbf{P}$ taková, že platí $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$.

Vlastní číslo, vlastní vektor

7.65. Poznámka. Následující část textu o vlastních číslech jsem ke kapitole o lineárních zobrazeních zařadil poté, co byla do osnov algebry pro první ročník zařazena zmínka o vlastních vektorech. Je to téma docela rozsáhlé. Zde jsou uvedeny jen základní vlastnosti, takže čtenář s hlubšími zájmy o tuto problematiku bude muset sáhnout po jiném zdroji informací, například [14].

7.66. Definice. Nechť $\mathcal{A}: L \to L$ je lineární zobrazení. Číslo $\lambda \in \mathbf{C}$ se nazývá *vlastním číslem zobrazení $\mathcal{A}$*, pokud existuje vektor $\boldsymbol{x} \in L$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ takový, že $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$. Vektor $\boldsymbol{x}$, který splňuje uvedenou rovnost, se nazývá *vlastní vektor zobrazení $\mathcal{A}$ příslušný vlastnímu číslu λ*.

7.70. Definice. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice typu (n, n) reálných nebo komplexních čísel. Číslo $\lambda \in \mathbf{C}$ se nazývá *vlastním číslem matice* $\mathbf{A}$, pokud existuje vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$, takový, že $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}^T = \lambda \boldsymbol{x}^T$. Vektor $\boldsymbol{x}$, který splňuje uvedenou rovnost, se nazývá *vlastní vektor matice* $\mathbf{A}$ *příslušný vlastnímu číslu* λ.

7.71. Věta. Nechť $\mathcal{A}: L \to L$ je lineární zobrazení a $\mathbf{A}$ je jeho matice vzhledem k nějaké bázi (B). Pak λ je vlastním číslem zobrazení $\mathcal{A}$ právě tehdy, když je vlastním číslem matice $\mathbf{A}$. Navíc $\boldsymbol{x}$ je vlastní vektor zobrazení $\mathcal{A}$ příslušný λ právě tehdy, když souřadnice vektoru $\boldsymbol{x}$ vzhledem k bázi (B) tvoří vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušný λ.

7.75. Definice. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Polynom $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ nazýváme *charakteristický polynom matice* $\mathbf{A}$ a rovnost $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ charakteristickou rovnicí. Je-li λ k-násobným kořenem charakteristické rovnice, říkáme, že λ je *k-násobným vlastním číslem*.

7.76. Příklad. Uvedeme ještě celý postup odvození výpočtu vlastních čísel matice (viz předchozí poznámku) znovu na konkrétním numerickém příkladě, protože odvození může pro někoho být na konkrétním příkladě názornější. Budeme hledat vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Podle definice 7.70 hledáme takové číslo λ a vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, aby byla splněna maticová rovnost

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

a přitom vektor $\boldsymbol{x}$ byl nenulový. Rozepíšeme tuto rovnost do složek:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} 5x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & \lambda x_1 & & \\ -x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & \lambda x_2 & \text{tj.} & \\ -4x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & \lambda x_3 & & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrr} (5-\lambda)x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\ -x_1 & + & (4-\lambda)x_2 & - & x_3 & = 0 \\ -4x_1 & + & 4x_2 & + & (-1-\lambda)x_3 & = 0 \end{array}$$

Potřebujeme, aby uvedená homogenní soustava se čtvercovou maticí měla nenulové řešení. Matice soustavy tedy musí být singulární, tj. musí mít nulový determinant:

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ -4 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Hledáme tedy λ takové, aby $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$. Příště už toto odvození nebudeme opakovat, ale začneme rovnou od rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (5-\lambda)(4-\lambda)(-1-\lambda) - 16 - \big(-4(4-\lambda) - 4(5-\lambda) + 2(-1-\lambda)\big) = -(\lambda-3)^2(\lambda-2),$$

takže vlastní čísla jsou $\lambda = 3$ a $\lambda = 2$. Najdeme ještě vlastní vektory. Nejprve najdeme vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 3:

$$\begin{pmatrix} 5-3 & -2 & 2 \\ -1 & 4-3 & -1 \\ -4 & 4 & -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Báze řešení homogenní soustavy s maticí $(1 \ -1 \ 1)$ je například $\{(1,1,0), (-1,0,1)\}$. Toto jsou dva lineárně nezávislé vlastní vektory, které přísluší vlastnímu číslu 3. Všechny vlastní vektory příslušející vlastnímu číslu 3 tvoří lineární obal této báze, ovšem bez nulového vektoru. Nyní najdeme vlastní vektory, které přísluší vlastnímu číslu 2:

$$\begin{pmatrix} 5-2 & -2 & 2 \\ -1 & 4-2 & -1 \\ -4 & 4 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dimenze prostoru řešení homogenní soustavy s touto maticí je 1, tj. stačí najít jeden vektor řešení: $(-2,1,4)$ a ostatní vektory řešení jsou jeho násobky. Tato řešení (bez nulového) jsou též všechny vlastní vektory matice $\mathbf{A}$, které přísluší vlastnímu číslu 2.

Celkem tedy má matice $\mathbf{A}$ tři lineárně nezávislé vlastní vektory: $(1,1,0), (-1,0,1), (-2,1,4)$. První dva příslušejí vlastnímu číslu 3 a poslední přísluší vlastnímu číslu 2.

7.77. Příklad. Následující příklad ukazuje, že nemusí existovat tolik lineárně nezávislých vlastních vektorů, kolik řádků má matice. Budeme hledat vlastní čísla a vlastní vektory matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vypočteme determinant matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & -3 \\ -1 & 10-\lambda & -6 \\ -1 & 8 & -4-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-3)^2(\lambda-2).$$

Vidíme, že matice má stejná vlastní čísla, jako matice z předchozího příkladu. Nyní vypočítáme vlastní vektory:

$$\lambda = 3\colon \begin{pmatrix} 2-3 & 4 & -3 \\ -1 & 10-3 & -6 \\ -1 & 8 & -4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -1 & 7 & -6 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\text{vlastní}\\ \text{vektor:}\\ (1,1,1)\end{matrix}$$

$$\lambda = 2\colon \begin{pmatrix} 2-2 & 4 & -3 \\ -1 & 10-2 & -6 \\ -1 & 8 & -4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 8 & -6 \\ -1 & 8 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\text{vlastní}\\ \text{vektor:}\\ (0,3,4)\end{matrix}$$

Na rozdíl od předchozího příkladu vícenásobnému vlastnímu číslu 3 přísluší jen jeden lineárně nezávislý vlastní vektor. Tato matice má tedy dohromady jen dva lineárně nezávislé vlastní vektory: $(1,1,1), (0,3,4)$, které po řadě přísluší vlastním číslům 3 a 2.

7.78. Věta. Podobné matice mají stejný charakteristický polynom.

Podobnost s diagonální maticí

7.81. Příklad. Diagonální matice

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom $(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$, protože determinant diagonální matice $\mathbf{D}-\lambda\mathbf{E}$ je roven součinu prvků na diagonále. Vlastní čísla matice $\mathbf{D}$ tedy jsou $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Vlastní vektor matice $\mathbf{D}$ příslušný vlastnímu číslu λ_i je vektor obsahující samé nuly s výjimkou i-té složky, ve které je nějaké nenulové číslo, třeba jednička.

Matici $\mathbf{D}$ z tohoto příkladu budeme značit $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Tím ušetříme papír.

7.82. Věta. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice typu (n,n). Sestavme libovolná komplexní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ do diagonální matice $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ a libovolné nenulové vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ z $\mathbf{C}^n$ zapišme do sloupců matice $\mathbf{P}$, tj. $\mathbf{P} = (\boldsymbol{x}_1^T, \dots, \boldsymbol{x}_n^T)$. Pak platí: čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastními čísly matice $\mathbf{A}$ a $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ jsou jejich odpovídající vlastní vektory právě tehdy, když je splněna rovnost $\mathbf{PD} = \mathbf{AP}$.

7.83. Věta. Nechť má čtvercová matice $\mathbf{A}$ s n řádky n lineárně nezávislých vlastních vektorů (každý z nich přísluší nějakému vlastnímu číslu matice). Pak je matice $\mathbf{A}$ podobná diagonální matici.

7.84. Věta. Nechť je matice $\mathbf{A}$ podobná diagonální matici, to znamená, že existuje regulární matice $\mathbf{P}$ a diagonální matice $\mathbf{D}$ takové, že $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$. Pak $\mathbf{D}$ obsahuje vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ a ve sloupcích matice $\mathbf{P}$ jsou vlastní vektory příslušné (podle pořadí) odpovídajícím vlastním číslům zapsaným v $\mathbf{D}$.

7.87. Věta. Vlastní vektory, které přísluší vzájemně různým vlastním číslům, jsou lineárně nezávislé.

7.92. Věta. Nechť $\mathcal{A}\colon L \to L$ je lineární zobrazení, $\dim L = n$. Zobrazení $\mathcal{A}$ má n lineárně nezávislých vlastních vektorů právě tehdy, když existuje báze (B) prostoru L taková, že $\mathcal{A}$ má vzhledem k této bázi diagonální matici $\mathbf{D}$. Přitom na diagonále matice $\mathbf{D}$ jsou vlastní čísla zobrazení $\mathcal{A}$ a báze (B) obsahuje vlastní vektory příslušné vlastním číslům v matici $\mathbf{D}$ ve stejném pořadí.