Lineární prostory se skalárním součinem

83. Vyjmenujte axiomy skalárního součinu a vysvětlete, proč standardní skalární součin na Rn tyto axiomy splňuje.

8.1. Poznámka. Lineární prostor je libovolná množina, na které je definováno sčítání a násobení konstantou tak, aby byly splněny vlastnosti (1) až (7) z definice 1.6. Pokud na takové množině navíc definujeme násobení prvků *mezi sebou* tak, že výsledek násobení je reálné číslo a násobení splňuje níže uvedené vlastnosti (1) až (4), definovali jsme na lineárním prostoru skalární součin. Ten nám umožní pracovat s novými vlastnostmi prvků lineárního prostoru, jako je jejich velikost a úhel mezi dvěma prvky.

Definice skalárního součinu

8.2. Definice. Nechť L je lineární prostor. Operaci $\cdot : L \times L \to \mathbf{R}$ nazveme *skalárním součinem*, pokud splňuje $\forall \boldsymbol{x} \in L$, $\forall \boldsymbol{y} \in L$, $\forall \boldsymbol{z} \in L$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ následující vlastnosti

(1) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$,
(2) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$,
(3) $(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \alpha \cdot (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$,
(4) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \geq 0$, $\quad \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0$ jen tehdy, když $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

Ve vlastnosti (4) značí symbol $\boldsymbol{o}$ nulový vektor lineárního prostoru L.

Lineární prostor L, na kterém je definován skalární součin, nazýváme *lineárním prostorem se skalárním součinem*.

8.3. Poznámka. Je třeba rozlišovat mezi podobně znějícími pojmy „skalární násobek“ a „skalární součin“. Skalární násobek $\cdot : \mathbf{R} \times L \to L$ je násobek vektoru reálným číslem, který je definován v každém lineárním prostoru. Na druhé straně skalární součin $\cdot : L \times L \to \mathbf{R}$ je součin vektorů mezi sebou.

Skalární součiny na $\mathbf{R}^n$

8.7. Příklad. Pro $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ definujme

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \tag{8.1}$$

Ukážeme, že takto definovaný součin vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ je skalárním součinem. Je $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}$. Nechť ještě $\boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ a $\alpha \in \mathbf{R}$. Ověříme postupně vlastnosti (1) až (4):

(1) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$,
(2) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = (x_1 + y_1) z_1 + (x_2 + y_2) z_2 + \cdots + (x_n + y_n) z_n =$
$= x_1 z_1 + x_2 z_2 + \cdots + x_n z_n + y_1 z_1 + y_2 z_2 + \cdots + y_n z_n = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$,
(3) $(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \alpha x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2 + \cdots + \alpha x_n y_n = \alpha (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n) = \alpha (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$,
(4) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$.

Vidíme, že z $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ plyne $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, takže je splněna i druhá část vlastnosti (4).

Skalární součin na $\mathbf{R}^n$ definovaný vzorcem (8.1) nazýváme *standardním skalárním součinem*. Následující příklady ukazují, že existují i jiné skalární součiny na $\mathbf{R}^n$.

8.8. Příklad. Definujme součin na $\mathbf{R}^2$ takto

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + 6 x_2 y_2 + 2 x_1 y_2 + 2 x_2 y_1.$$

Ukážeme, že takto definovaný součin je skalárním součinem na $\mathbf{R}^2$.

Ověříme vlastnosti (1) až (4) definice 8.2

(1) $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + 6 x_2 y_2 + 2 x_1 y_2 + 2 x_2 y_1 =$
$= y_1 x_1 + 6 y_2 x_2 + 2 y_1 x_2 + 2 y_2 x_1 = (y_1, y_2) \cdot (x_1, x_2)$,
(2) $\big((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\big) \cdot (z_1, z_2) = (x_1 + y_1) z_1 + 6 (x_2 + y_2) z_2 + 2 (x_1 + y_1) z_2 + 2 (x_2 + y_2) z_1 =$
$= x_1 z_1 + 6 x_2 z_2 + 2 x_1 z_2 + 2 x_2 z_1 + y_1 z_1 + 6 y_2 z_2 + 2 y_1 z_2 + 2 y_2 z_1 =$
$= (x_1, x_2) \cdot (z_1, z_2) + (y_1, y_2) \cdot (z_1, z_2)$,
(3) $\big(\alpha (x_1, x_2)\big) \cdot (y_1, y_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) \cdot (y_1, y_2) = \alpha x_1 y_1 + 6 \alpha x_2 y_2 + 2 \alpha x_1 y_2 + 2 \alpha x_2 y_1 =$
$= \alpha (x_1 y_1 + 6 x_2 y_2 + 2 x_1 y_2 + 2 x_2 y_1) = \alpha \big((x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2)\big)$,
(4) $(x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2) = x_1^2 + 6 x_2^2 + 4 x_1 x_2 \overset{?}{\geq} 0$.

Abychom dokázali vlastnost (4), potřebujeme pro $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ dokázat, že $x_1^2 + 6 x_2^2 + 4 x_1 x_2 > 0$. Nechť $a = x_2 / x_1$, tj. $x_2 = a x_1$. Po dosazení je $x_1^2 + 6 a^2 x_1^2 + 4 a x_1^2 = x_1^2 (1 + 6 a^2 + 4 a)$. Aby byl daný výraz větší než nula, stačí aby $6 a^2 + 4 a + 1 > 0$, $\forall a \in \mathbf{R}$. Protože diskriminant této kvadratické nerovnice je roven $D = 16 - 24 = -8 < 0$, je nerovnost $6 a^2 + 4 a + 1 > 0$ splněna pro všechna $a \in \mathbf{R}$.

84. Jak je možné na základě skalárního součinu definovat velikost vektoru (normu vektoru) a úhel mezi dvěma vektory?

8.16. Poznámka. Budeme definovat velikost vektoru a úhel mezi dvěma nenulovými vektory na obecných lineárních prostorech se skalárním součinem. Tyto pojmy definujeme jen pomocí skalárního součinu pro zcela libovolné vektory. V následující kapitole ukážeme, že pokud budeme pracovat s vektory s geometrickým významem (např. s orientovanými úsečkami), pak pojmy velikost a úhel nyní zavedené abstraktně budou znamenat přesně to, co od nich z geometrického hlediska očekáváme. *Velikost vektoru*

8.17. Definice. Nechť L je lineární prostor se skalárním součinem. Pro $\boldsymbol{x} \in L$ definujeme *velikost vektoru* $\boldsymbol{x}$ hodnotou $\sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$. Velikost vektoru $\boldsymbol{x}$ značíme $\|\boldsymbol{x}\|$, takže je

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}, \qquad \text{tj.} \quad \|\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}.$$

Místo pojmu „velikost vektoru“ se často používá pojem *norma vektoru*.

8.18. Poznámka. Vidíme, že velikost je nezáporné číslo a že každý vektor má svou velikost. To nám zaručuje vlastnost (4) definice 8.2. Je $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \geq 0$, takže odmocnina z tohoto čísla je definována.

Dále vidíme, že jedině nulový vektor má velikost rovnu nule a žádný jiný. To nám zaručuje druhá část vlastnosti (4).

8.19. Věta. Nechť $\boldsymbol{x}$ je prvkem lineárního prostoru se skalárním součinem, $\alpha \in \mathbf{R}$. Pak

$$\|\alpha\, \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|.$$

Důkaz. $\|\alpha\, \boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\alpha\, \boldsymbol{x}) \cdot (\alpha\, \boldsymbol{x})} = \sqrt{\alpha^2\, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$.

8.20. Definice. Nechť L je lineární prostor se skalárním součinem a $\boldsymbol{x} \in L$, $\boldsymbol{y} \in L$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{o}$. Pak *úhel mezi vektory* $\boldsymbol{x}$ *a* $\boldsymbol{y}$ je takové číslo $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, pro které platí *Úhel dvou vektorů*

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|}. \tag{8.2}$$

8.21. Poznámka. Zabývejme se otázkou, zda každé dva nenulové vektory mají definován úhel mezi sebou. Především podle poznámky 8.18 platí, že $\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$, $\|\boldsymbol{y}\| \neq 0$, protože $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{o}$. Takže se ve zlomku z rovnosti (8.2) nedělí nulou.

Aby existovalo φ takové, že platí (8.2), musí platit

$$-1 \leq \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|} \leq 1.$$

Tento požadavek zaručuje následující věta = Schwarzova nerovnost.

85. Proč platí Schwartzova a trojúhelníková nerovnost?

8.22. Věta (Schwartzova nerovnost). Nechť L je lineární prostor se skalárním součinem a $\boldsymbol{x} \in L$, $\boldsymbol{y} \in L$. Pak platí:

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|. \tag{8.3}$$

Důkaz. Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$. Násobme sám se sebou vektor $\boldsymbol{x} - \alpha\, \boldsymbol{y}$. Podle vlastnosti (4) definice 8.2 je

$$0 \leq (\boldsymbol{x} - \alpha\, \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} - \alpha\, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} - \alpha \cdot 2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) + \alpha^2 \cdot (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}).$$

V úpravách jsme použili vlastnosti (2) a (3) definice 8.2. Označme $A = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{y}\|^2$, $B = -2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$, $C = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|^2$. Dostáváme

$$0 \leq A\, \alpha^2 + B\, \alpha + C.$$

Tato nerovnost musí platit pro všechna $\alpha \in \mathbf{R}$. Diskriminant této kvadratické nerovnice tedy nesmí být kladný. Z toho nám vyplývá podmínka pro čísla A, B, C:

$$B^2 - 4AC \leq 0, \quad \text{tj.} \quad B^2 \leq 4AC, \quad \text{tj.} \quad \big(-2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})\big)^2 \leq 4\, \|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2,$$
$$\text{tj.} \quad (-2)^2\, (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2 \leq 4\, \|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2, \quad \text{tj.} \quad \sqrt{(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2} \leq \sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2} \sqrt{\|\boldsymbol{y}\|^2} \quad \text{tj.} \quad |\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|.$$

8.23. Definice. Nechť L je lineární prostor se skalárním součinem. *Vzdálenost vektoru* $\boldsymbol{x}$ *od vektoru* $\boldsymbol{y}$ definujeme jako $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|$. Podle věty 8.19 je $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$, takže často mluvíme o *vzdálenosti dvou vektorů* $\boldsymbol{x}$ *a* $\boldsymbol{y}$ (bez závislosti na jejich pořadí). *Vzdálenost vektorů*

8.24. Věta (trojúhelníková nerovnost). Pro velikosti vektorů platí

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|. \tag{8.4}$$

Důkaz. $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x} + 2\,\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}\,\boldsymbol{y} \le \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\,\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \big(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|\big)^2$. Ve výpočtu jsme použili Schwartzovu nerovnost 8.22. Po odmocnění dostáváme dokazovanou nerovnost.

8.25. Poznámka. Vysvětlíme si, proč se dokázaná nerovnost nazývá trojúhelníková. Tu někteří čtenáři znají geometricky formulovanou třeba takto: součet délek dvou stran v trojúhelníku je vždy větší než délka strany třetí. Nechť vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ jsou prvky lineárního prostoru se skalárním součinem a představme si je jako vrcholy pomyslného trojúhelníka. Velikost stran je totéž jako vzdálenost odpovídajících vektorů. Geometrické tvrzení o velikostech stran trojúhelníka tedy můžeme pomocí definice 8.23 přepsat takto:

$$\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\| \le \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\| + \|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|.$$

Při volbě $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$ přechází uvedená nerovnost na tvar (8.4).

8.26. Příklad. Uvažujme lineární prostor $\mathbf{R}^4$ se standardním skalárním součinem (8.1). Ukážeme, jak vypadá velikost vektoru $(1,2,3,4)$ a jaký je úhel mezi vektory $(1,2,3,4)$ a $(1,0,0,2)$.

Podle definice 8.17 a podle (8.1) je

$$\big\|(1,2,3,4)\big\| = \sqrt{(1,2,3,4)\cdot(1,2,3,4)} = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2} = \sqrt{30}.$$

Podle definice 8.20 platí pro úhel φ následující rovnost:

$$\cos\varphi = \frac{(1,2,3,4)\cdot(1,0,0,2)}{\big\|(1,2,3,4)\big\|\cdot\big\|(1,0,0,2)\big\|} = \frac{1+0+0+4\cdot 2}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{1+4}} = \frac{9}{\sqrt{150}}, \quad \text{tj.} \quad \varphi = \arccos\frac{9}{\sqrt{150}}.$$

8.27. Příklad. Nechť L je lineární prostor spojitých funkcí definovaných na konečném uzavřeném intervalu $D \subseteq \mathbf{R}$. Ukážeme, že předpis

$$f\cdot g = \int_D f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

definuje skalární součin na lineárním prostoru L. Ověříme vlastnosti (1) až (4). Nechť $f\in L$, $g\in L$, $h\in L$ a $\alpha\in\mathbf{R}$. Pak platí

(1) $f\cdot g = \displaystyle\int_D f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \int_D g(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x = g\cdot f,$

(2) $(f+g)\cdot h = \displaystyle\int_D \big(f(x)+g(x)\big)\,h(x)\,\mathrm{d}x = \int_D \big(f(x)\,h(x)+g(x)\,h(x)\big)\,\mathrm{d}x =$

$$= \int_D f(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x + \int_D g(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x = f\cdot h + g\cdot h,$$

(3) $(\alpha f)\cdot g = \displaystyle\int_D \alpha f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\cdot\int_D f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\,(f\cdot g),$

(4) $f\cdot f = \displaystyle\int_D f^2(x)\,\mathrm{d}x \ge 0,$

$\displaystyle\int_D f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$ jen tehdy, když $f(x)=0\ \forall x\in D$, protože f je spojitá.

Příklad ilustruje, že i na lineárních prostorech nekonečné dimenze jsme schopni definovat skalární součin. Z tohoto skalárního součinu odvozená *norma funkce* f $\|f\|$, „úhel φ mezi funkcemi f a g“ a „vzdálenost dvou funkcí f a g“ $\|f-g\|$ se počítá takto:

$$\|f\| = \sqrt{\int_D f^2(x)\,\mathrm{d}x}, \quad \varphi = \arccos\frac{\int_D f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\int_D f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_D g^2(x)\,\mathrm{d}x}}, \quad \|f-g\| = \sqrt{\int_D \big(f(x)-g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x}.$$

86. Vysvětlete, jak se počítá skalární součin dvou vektorů, známe-li jejich souřadnice vzhledem k ortonormální bázi. Vzorec zdůvodněte.

Věta 8.33 + důkaz

8.28. Poznámka. Protože máme na lineárních prostorech se skalárním součinem definován úhel mezi nenulovými vektory, můžeme pro každé dva nenulové vektory rozhodnout, kdy jsou na sebe kolmé. Je to tehdy, když je $\cos\varphi = 0$, neboli $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0$. Z toho vyplývá následující definice. *Kolmé vektory*

8.29. Definice. Nechť L je lineární prostor se skalárním součinem. Dva nenulové vektory $\boldsymbol{x} \in L$ a $\boldsymbol{y} \in L$ *jsou na sebe kolmé* (značíme $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$), pokud je $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$.

8.30. Příklad. (Pythagorova věta.) Nechť $\boldsymbol{x} \in L$, $\boldsymbol{y} \in L$ jsou nenulové vektory, které jsou na sebe kolmé. Pak platí

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2.$$

Zdůvodnění je jednoduché: $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2 \cdot 0 + \|\boldsymbol{y}\|^2$. Geometrická interpretace tohoto příkladu je následující. Trojúhleník s vrcholy $\boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu $\boldsymbol{o}$. Čísla $\|\boldsymbol{x}\|$, $\|\boldsymbol{y}\|$ jsou velikosti odvěsen a $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ je velikost přepony.

8.31. Definice. Nechť $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ je báze lineárního prostoru se skalárním součinem. Bázi B nazýváme *ortogonální*, pokud $\boldsymbol{b}_i \perp \boldsymbol{b}_j$ $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. *Ortonormální báze*

Bázi B nazýváme *ortonormální*, pokud je ortogonální, a navíc $\|\boldsymbol{b}_i\| = 1$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

8.32. Věta. Báze $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ je ortonormální právě tehdy, když

$$\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = \begin{cases} 0 \text{ pro } i \neq j, \\ 1 \text{ pro } i = j. \end{cases}$$

Důkaz. Báze B je ortonormální právě tehdy, když (podle definice 8.31) platí $\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 1$ pro $i = j$ a navíc je ortogonální, tj. $\boldsymbol{b}_i \perp \boldsymbol{b}_j$ pro $i \neq j$. To podle definice 8.29 znamená, že $\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 0$ pro $i \neq j$.

8.33. Věta. Nechť (B) je ortonormální uspořádaná báze lineárního prostoru L se skalárním součinem. Pak pro všechna $\boldsymbol{x} \in L$, $\boldsymbol{y} \in L$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{(B)}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)_{(B)}$ lze skalární součin počítat ze souřadnic vektorů takto:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Důkaz. Podle předpokladu je $\boldsymbol{x} = x_1\,\boldsymbol{b}_1 + x_2\,\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_n\,\boldsymbol{b}_n$, $\boldsymbol{y} = y_1\,\boldsymbol{b}_1 + y_2\,\boldsymbol{b}_2 + \cdots + y_n\,\boldsymbol{b}_n$. Počítejme $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (x_1\,\boldsymbol{b}_1 + x_2\,\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_n\,\boldsymbol{b}_n) \cdot (y_1\,\boldsymbol{b}_1 + y_2\,\boldsymbol{b}_2 + \cdots + y_n\,\boldsymbol{b}_n) =$$
$$= x_1 y_1\,\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + x_1 y_2\,\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_1 y_n\,\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_n + x_2 y_1\,\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 + x_2 y_2\,\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_2 y_n\,\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_n + \cdots + x_n y_n\,\boldsymbol{b}_n \cdot \boldsymbol{b}_n =$$
$$= x_1 y_1 \cdot 1 + x_1 y_2 \cdot 0 + \cdots + x_1 y_n \cdot 0 + x_2 y_1 \cdot 0 + x_2 y_2 \cdot 1 + \cdots + x_2 y_n \cdot 0 + \cdots + x_n y_n \cdot 1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

V úpravách jsme využili větu 8.32 a toho, že báze B je ortonormální.

8.34. Příklad. Nechť $\mathbf{R}^n$ je lineární prostor se standardním skalárním součinem zavedeným v příkladu 8.7. Pak standardní báze

$$S = \{(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1)\}$$

je ortonormální bází.

87. Nechť (B) = (b1, . . . , bn) je ortonormální báze lineárního prostoru L. Proč je i-tá souřadnice vektoru x ∈ L vzhledem k této bázi rovna skalárnímu součinu x · bi?

8.35. Věta. Nechť $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ jsou nenulové vektory lineárního prostoru se skalárním součinem, které jsou na sebe navzájem kolmé, tj. $\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j = 0$ pro $i \neq j$ a $\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_i > 0$. Pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

Důkaz. Podle definice lineární nezávislosti stačí ověřit, že z rovnosti

$$\alpha_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o}$$

nutně plyne, že všechna čísla čísla α_i jsou nulová. Vynásobíme-li obě strany uvedené rovnosti skalárně vektorem $\boldsymbol{x}_i$, dostáváme na levé straně součet nul s výjimkou jediného sčítance, protože vektor $\boldsymbol{x}_i$ je kolmý na všechny všechny ostatní vektory $\boldsymbol{x}_j$. Máme tedy

$$\alpha_i\,\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{x}_i = 0.$$

Protože $\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_i$ je nenulové číslo, musí být $\alpha_i = 0$. Tuto operaci můžeme provést pro každý index $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, takže všechna čísla čísla α_i jsou nutně nulová.

8.36. Věta. Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je ortonormální báze lineárního prostoru se skalárním součinem. Pak pro souřadnice libovolného vektoru $\boldsymbol{x}$ platí

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_n)_{(B)}.$$

Důkaz. Označme $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_1)\,\boldsymbol{b}_1 + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_2)\,\boldsymbol{b}_2 + \cdots + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_n)\,\boldsymbol{b}_n$. Podle definice souřadnic vzhledem k bázi máme dokázat, že $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Násobme vektor $\boldsymbol{y}$ vektorem $\boldsymbol{b}_i$:

$$\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{b}_i = \big((\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_1)\,\boldsymbol{b}_1 + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_2)\,\boldsymbol{b}_2 + \cdots + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_n)\,\boldsymbol{b}_n\big) \cdot \boldsymbol{b}_i = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_i)\,\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_i,$$

protože báze (B) je ortonormální. Máme tedy výsledek $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{b}_i \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Vektor $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ je kolmý na všechny prvky $\boldsymbol{b}_i$, protože z předchozího výpočtu plyne $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{b}_i = 0$. Pokud by $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, pak podle věty 8.35 jsou vektory $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ lineárně nezávislé, ale to je ve sporu s tím, že (B) je báze. Musí tedy být $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

8.37. Poznámka. Předchozí věta má názornou geometrickou interpretaci. Souřadnice $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_i$ jsou vlastně kolmé průměty vektoru $\boldsymbol{x}$ na vektory báze $\boldsymbol{b}_i$. O těchto pojmech pohovoříme podrobněji v následující kapitole.

88. Vysvětlete podstatu a smysl Schmidtova ortogonalizačního procesu.

(8.41)
Pro každou konečnou bázi existuje stejná konečná ortogonální báze. První vektor z nové báze je shodný s jedním vektorem z původní báze, každý další, který do této báze přidáváme je LK dosud ortogonalizovaných vektorů a přidávaného vektoru.

Ortogonalizační proces

8.40. Poznámka. Je přirozené se ptát, zda každý lineární prostor (aspoň konečné dimenze) má ortonormální bázi. Věta 2.51 ukazuje, že každý lineární prostor má bázi. Následující věta ukazuje, že každá konečná báze se dá v jistém smyslu pozměnit tak, aby se z ní stala ortonormální báze.

8.41. Věta (Schmidtův ortogonalizační proces). Nechť $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ je báze lineárního prostoru L se skalárním součinem. Pak existuje ortonormální báze $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n\}$ taková, že

$$\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k \rangle = \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_k \rangle, \qquad \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Důkaz. Nejprve vysvětlíme ideu důkazu, která je v tomto případě asi důležitější než podrobné počítání. Vektor $\boldsymbol{c}_1$ volíme stejný jako $\boldsymbol{b}_1$ jen s tím rozdílem, že jej „normalizujeme". To znamená, že jej násobíme vhodnou konstantou, aby $\|\boldsymbol{c}_1\| = 1$.

Představme si dále, že už jsme našli $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_k$ takové, že $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k \rangle = \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_k \rangle$, a přitom vektory $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_k$ jsou na sebe vzájemně kolmé a mají jednotkovou velikost. Vektor $\boldsymbol{b}_{k+1}$ nyní „ortogonalizujeme", tj. upravíme tak, aby byl kolmý na všechny vektory z $\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_k \rangle$. Ukážeme později, že k tomu účelu stačí od vektoru $\boldsymbol{b}_{k+1}$ odečíst určitou lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_k$. Takto upravený vektor dále „normalizujeme", tj. vynásobíme vhodnou konstantou, aby $\|\boldsymbol{c}_{k+1}\| = 1$. Tím se jeho kolmost vůči ostatním vektorům z $\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_k \rangle$ nepokazí. Protože vektor $\boldsymbol{c}_{k+1}$ vznikl jako lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_k, \boldsymbol{b}_{k+1}$, je

$$\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_k, \boldsymbol{c}_{k+1} \rangle = \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_k, \boldsymbol{b}_{k+1} \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{k+1} \rangle.$$

Tím jsme rozšířili naši novou postupně budovanou ortonormální bázi o další vektor. Opakovaným použitím tohoto postupu dostáváme hledanou ortonormální bázi $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n\}$.

Nyní stačí jen podrobněji ukázat, jak se vektor „normalizuje" a „ortogonalizuje". Normalizaci libovolného vektoru $\boldsymbol{x}$ provedeme tak, že položíme $\boldsymbol{x}' = (1/\|\boldsymbol{x}\|) \cdot \boldsymbol{x}$. Skutečně je:

$$\|\boldsymbol{x}'\|^2 = \boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{x}' = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} \boldsymbol{x} \cdot \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} \boldsymbol{x} = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2} \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{x} = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2} \|\boldsymbol{x}\|^2 = 1.$$

Nechť $\boldsymbol{b}_{k+1} \notin \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_k \rangle$ a nechť vektory $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_k$ jsou na sebe navzájem kolmé a mají jednotkovou velikost. Vektor $\boldsymbol{b}_{k+1}$ „ortogonalizujeme" tak, že položíme

$$\boldsymbol{b}'_{k+1} = \boldsymbol{b}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{b}_{k+1} \cdot \boldsymbol{c}_i)\, \boldsymbol{c}_i.$$

Nově vytvořený vektor $\boldsymbol{b}'_{k+1}$ je kolmý na všechny vektory $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_k$, protože:

$$\boldsymbol{b}'_{k+1} \cdot \boldsymbol{c}_j = \left(\boldsymbol{b}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{b}_{k+1} \cdot \boldsymbol{c}_i)\, \boldsymbol{c}_i \right) \cdot \boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{b}_{k+1} \cdot \boldsymbol{c}_j - \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{b}_{k+1} \cdot \boldsymbol{c}_i)\, (\boldsymbol{c}_i \cdot \boldsymbol{c}_j) = \boldsymbol{b}_{k+1} \cdot \boldsymbol{c}_j - \boldsymbol{b}_{k+1} \cdot \boldsymbol{c}_j = 0.$$

V uvedeném součtu jsou ostatní sčítanci nuloví, protože vektory $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_k$ jsou podle předpokladu na sebe navzájem kolmé.