Lineární závislost, obal, báze

15. Zdůvodněte podrobně z axiomů linearity, proč triviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru.

(2.6)
Triviální lineární kombinace je lineární kombinace, která má nulové koeficienty. Tedy $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = o$ (Cokoliv násobené nulou je nula)

2.3. Definice. Nechť $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ jsou vektory (tj. prvky nějakého lineárního prostoru). *Lineární kombinací* vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ rozumíme vektor *Lineární kombinace*

$$\alpha_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{x}_n,$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou nějaká reálná čísla. Těmto číslům říkáme *koeficienty* lineární kombinace.

2.4. Příklad. Lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ může být třeba vektor $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$ (všechny tři koeficienty jsou rovny jedné), nebo vektor $2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + 3{,}18\boldsymbol{z}$ (koeficienty jsou čísla 2; −1; 3,18), nebo také vektor $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} + \gamma\boldsymbol{z}$ (koeficienty $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ jsme blíže neurčili).

2.5. Definice. *Triviální* lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ je taková lineární kombinace, která má všechny koeficienty nulové, tj. $0\boldsymbol{x}_1 + 0\boldsymbol{x}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{x}_n$. *Netriviální* lineární kombinace je taková lineární kombinace, která není triviální, tj. aspoň jeden její koeficient je nenulový. *Triviální lineární kombinace*

2.6. Věta. Triviální lineární kombinace je vždy rovna nulovému vektoru.

Důkaz. Podle vlastnosti (7) v definici 1.6 je každý sčítanec v triviální lineární kombinaci roven nulovému vektoru a podle vlastnosti (1) věty 1.7 je i součet nulových vektorů roven nulovému vektoru.

16. Proč přítomnost nulového vektoru ve skupině vektorů zaručuje lineární závislost této skupiny?

(2.17 -2)
Nechť $a_0, a_1, ..., a_n \neq 0$ a a_i je nulový. Potom stačí aby při $\alpha_0 * a_0 + \alpha_1 * a_1 + ... + \alpha_i * a_i + ... + \alpha_n * a_n = 0$ bylo $\alpha_i = 1$ a zbytek α nulových

2.7. Definice. Skupinu vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ nazýváme *lineárně závislou*, pokud existuje netriviální lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, která je rovna nulovému vektoru. Stručně říkáme, že vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ jsou *lineárně závislé*. *Lineární závislost skupiny*

2.8. Poznámka. Pokud bychom rozvedli pojem netriviální lineární kombinace podle definic 2.5 a 2.3, můžeme říci, že vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ jsou *lineárně závislé*, pokud existují reálná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tak, že aspoň jedno z nich je nenulové, a přitom platí

$$\alpha_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o}.$$

17. Podrobně zdůvodněte, proč v lineárním prostoru reálných funkcí jsou funkce f, g, h dané vzorci $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$ a $h(x) = 1$ jsou lineárně nezávislé.

- položíme jejich LK rovnu nulové funkci

$\alpha\sin(x) + \beta x^2 + \gamma = 0$

- tato rovnost musí platit pro všechna $x \in \mathbf{R}$, my omezíme pouze na $x = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{2}\right\}$, hodnoty dosadíme do rovnice

$\alpha 0 + \beta 0 + \gamma 1 = 0$ pro $x = 0$
$\alpha 0 + \beta \pi^2 + \gamma 1 = 0$ pro $x = \pi$
$$\alpha 1 + \beta \left\{\frac{\pi^2}{4}\right\} + \gamma 1 = 0 \text{ pro } x = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

- z toho matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \pi^2 & 1 & 0 \\ 1 & \left\{\frac{\pi^2}{4}\right\} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a tato soustava ma jediné řešení

$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$

- z čehož vyplývá, že funkce jsou LN

18. Dokažte větu: vektory jsou lineárně závislé právě tehdy, když existuje jeden, který je lineární kombinací ostatních.

2.21. Věta. Nechť $n \geq 2$. Vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existuje index $r \in \{1, \ldots, n\}$ takový, že vektor $\boldsymbol{x}_r$ je roven lineární kombinaci ostatních vektorů.

Jeden vektor je lineární kombinací ostatních

Důkaz. Věty formulované ve tvaru ekvivalence (výrok A platí právě tehdy, když platí výrok B) se obvykle dokazují ve dvou krocích. Nejprve dokážeme, že z A plyne B a pak dokážeme, že z B plyne A.

Dokazujme tedy nejprve, že z lineární závislosti vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ plyne existence indexu r výše uvedené vlastnosti. Z definice lineární závislosti víme, že existuje netriviální lineární kombinace rovna nulovému vektoru, tj.

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{o}, \tag{2.3}$$

a přitom aspoň jeden koeficient lineární kombinace je nenulový. Existuje tedy $r \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že $\alpha_r \neq 0$. Přičteme nyní vektor $-\alpha_r \boldsymbol{x}_r$ k oběma stranám rovnice (2.3)

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = -\alpha_r \boldsymbol{x}_r.$$

Po vynásobení obou stran rovnice koeficientem $-1/\alpha_r$ dostáváme $\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n} \frac{\alpha_i}{-\alpha_r} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_r.$

Vektor $\boldsymbol{x}_r$ je tedy roven lineární kombinaci ostatních vektorů.

V druhé části důkazu předpokládáme existenci koeficientu r takového, že vektor $\boldsymbol{x}_r$ je roven lineární kombinaci ostatních vektorů. Dokážeme lineární závislost vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. Pro nějaké $r \in \{1, \ldots, n\}$ tedy platí

$$\boldsymbol{x}_r = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n} \beta_i \boldsymbol{x}_i.$$

Přičteme-li k oběma stranám této rovnice vektor $-\boldsymbol{x}_r$, dostáváme $\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n} \beta_i \boldsymbol{x}_i + (-1) \cdot \boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{o},$

což je netriviální lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ (její r-tý koeficient je jistě nenulový), která je rovna nulovému vektoru.

19. Předpokládejte konečnou neprázdnou lineárně závislou množinu vektorů M. Zdůvodněte, proč přidáním vektoru k množině M vznikne lineárně závislá množina.

20. Předpokládejte konečnou aspoň dvouprvkovou lineárně nezávislou množinu vektorů M. Zdůvodněte, proč odebráním vektoru z množiny M vznikne lineárně nezávislá množina.

21. Vysvětlete z definice lineární závislosti, proč lineární závislost není ovlivněna pořadím vektorů.

(2.17 -1)
Protože sčítání vektorů je komutativní.

22. Vysvětlete z definice lineární závislosti, proč skupina vektorů, v níž se nějaký vektor opakuje, je lineárně závislá.

Základní vlastnosti lineární (ne)závislosti

2.17. Věta. Nechť $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ jsou prvky nějakého lineárního prostoru L. Pak platí:
(1) Lineární závislost či nezávislost vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ se nezmění při změně pořadí těchto vektorů.
(2) Jestliže se mezi $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ vyskytuje nulový vektor, pak jsou tyto vektory lineárně závislé.
(3) Jestliže se ve skupině vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ některý vektor vyskytuje aspoň dvakrát, je tato skupina vektorů lineárně závislá.
(4) Jestliže jsou vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ lineárně závislé a $\boldsymbol{x}_{n+1} \in L$, pak jsou i vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_{n+1}$ lineárně závislé.
(5) Jestliže jsou vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ lineárně nezávislé, pak jsou i vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ lineárně nezávislé.
(6) Samotný vektor $\boldsymbol{x}_1$ (chápaný ovšem jako skupina vektorů o jednom prvku) je lineárně nezávislý právě tehdy, když je nenulový.

Důkaz. (1) Lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ nezávisí na jejich pořadí, protože sčítání vektorů je podle definice 1.6 komutativní.

(2) Vzhledem k vlastnosti (1) stačí bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\boldsymbol{o} = \boldsymbol{x}_1$. Pak platí:

$$1 \cdot \boldsymbol{o} + 0 \cdot \boldsymbol{x}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{x}_3 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o},$$

což je netriviální lineární kombinace rovna nulovému vektoru.

(3) Vzhledem k vlastnosti (1) stačí bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$. Pak platí:

$$1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + (-1) \cdot \boldsymbol{x}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{x}_3 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{x}_n = (1-1) \cdot \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{o},$$

což je netriviální lineární kombinace rovna nulovému vektoru.

(4) Podle předpokladu existuje netriviální lineární kombinace $\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n$ rovna nulovému vektoru. Potom platí

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n + 0 \cdot \boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{o},$$

což je netriviální lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_{n+1}$ rovna nulovému vektoru.

(5) Dokážeme to sporem. Budeme předpokládat negaci tvrzení věty (tj. že vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ jsou lineárně závislé). Pak ale podle vlastnosti (4) musejí být lineárně závislé i vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, což je spor s předpokladem, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé.

(6) Je-li $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{o}$, pak je $\boldsymbol{x}_1$ podle vlastnosti (2) lineárně závislý. Předpokládejme nyní $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{o}$ a položme

$$\alpha \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{o}.$$

Kdyby bylo $\alpha \neq 0$, mohli bychom psát

$$\boldsymbol{x}_1 = 1 \cdot \boldsymbol{x}_1 = \left(\frac{1}{\alpha}\,\alpha\right) \cdot \boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\alpha}\,(\alpha \boldsymbol{x}_1) = \frac{1}{\alpha} \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}.$$

To je ale spor. Musí tedy být $\alpha = 0$. To znamená, že pouze triviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru, takže vektor $\boldsymbol{x}_1$ je lineárně nezávislý.

23. Definujte lineární obal i pro nekonečné množiny. Zdůvodněte, proč z ∈ ⟨M⟩ právě tehdy, když existuje konečně mnoho vektorů z M tak, že z je jejich lineární kombinací.

(2.29)
Lineární obal vektorů je množina všech jejich lineárních kombinací. Lineární obal nekonečné množiny M je sjednocení lineárních obalů konečných podmnožin množiny M.

Poznámka 2.33. Zkráceně: předpokládáme že existuje právě nějaká lineární kombinace z konečně mnoha prvků z M.

Lineární (ne)závislost nekonečných množin

2.26. Definice. Nechť L je lineární prostor. Neprázdná konečná množina vektorů $K \subseteq L$, $K = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ se nazývá *lineárně závislá*, pokud jsou vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ lineárně závislé.

Nekonečná množina vektorů $M \subseteq L$ se nazývá *lineárně závislá*, pokud existuje konečná $K \subseteq M$, která je lineárně závislá.

Množina $M \subseteq L$ se nazývá *lineárně nezávislá*, pokud není lineárně závislá.

Prázdnou množinu považujeme vždy za lineárně nezávislou.

Lineární obal

2.29. Definice. Nechť L je lineární prostor. *Lineární obal* skupiny vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ je množina všech lineárních kombinací vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$.

Lineární obal konečné množiny $K \subseteq L$, $K = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ ztotožňujeme s lineárním obalem skupiny vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$.

Lineární obal nekonečné množiny $M \subseteq L$ je sjednocení lineárních obalů všech konečných podmnožin množiny M.

Lineární obal skupiny vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ značíme $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle$. Lineární obal množiny M značíme symbolem $\langle M \rangle$.

Prvek lineárního obalu

2.33. Poznámka. Zamysleme se nad tím, co to znamená, že $\boldsymbol{z} \in \langle M \rangle$. Existuje konečná podmnožina $K \subseteq M$ taková, že $\boldsymbol{z} \in \langle K \rangle$. Nechť $K = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$. Skutečnost, že $\boldsymbol{z} \in \langle K \rangle$ znamená, že existuje nějaká lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, která je rovna vektoru $\boldsymbol{z}$.

Vidíme tedy, že $\boldsymbol{z} \in \langle M \rangle$ právě tehdy, když existuje konečně mnoho vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in M$ a existují reálná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ taková, že

$$\boldsymbol{z} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n. \tag{2.4}$$

24. Dokažte <<M>> = <M>.

věta 2.35

- v podstatě jde o to, že lineární kombinace lineárních kombinací je pořád lineární kombinace a na tom se staví celý důkaz
- takže budeme dokazovat, že LK z <M> uz nezvětší obal M
- tak zapíšeme LK lineárních kombinací:

```
alpha_1(beta_1x_1+beta_2x_2+...beta_kx_k)+aplha_2(beta_k+1x+k_1+....)+...
```

- to lze rozepsat jako:

```
(alpha_1beta_1)x_1+(alpha_1beta_2)x_2+....
```

- každá závorka, to je to (alpha_1beta_1) je reálné číslo, vlastně koeficient LK, proto se lin. obal nezvětší a platí <<M>>=<M>

2.35. Věta. Nechť L je lineární prostor a $M \subseteq L$. Pak platí:

(1) $M \subseteq \langle M \rangle$.
(2) $\langle M \rangle = \langle \langle M \rangle \rangle$.
(3) Je-li $\boldsymbol{z} \in \langle M \rangle$, pak $\langle M \rangle = \langle M \cup \{\boldsymbol{z}\} \rangle$.

Důkaz. (1) Stačí ukázat, že pokud $z \in M$ pak $z \in \langle M \rangle$. Platí $z = 1 \cdot z$, takže pro z existuje konečně mnoho prvků z M (jmenovitě prvek z samotný) tak, že z je lineární kombinací těchto prvků. To podle poznámky 2.33 znamená, že $z \in \langle M \rangle$.

(2) Protože platí věta 2.34 a vzhledem k (1) stačí ukázat, že $\langle\langle M \rangle\rangle \subseteq \langle M \rangle$. Nechť $z \in \langle\langle M \rangle\rangle$, ukážeme že $z \in \langle M \rangle$. Protože $z \in \langle\langle M \rangle\rangle$, existují vektory $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle M \rangle$ takové, že platí (2.4). Pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ je $x_i \in \langle M \rangle$, tj. existuje konečně mnoho vektorů $y_{i,1}, \ldots, y_{i,k_i} \in M$ takových, že

$$x_i = \beta_{i,1}\, y_{i,1} + \cdots + \beta_{i,k_i}\, y_{i,k_i}.$$

Dosazením těchto rovnic do (2.4) a roznásobením dostáváme výsledek, že z je lineární kombinací konečně mnoha vektorů $y_{i,j} \in M$, $i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, k_i\}$. To znamená, že $z \in \langle M \rangle$.

(3) Toto tvrzení je důsledkem (1) a (2). Protože $M \subseteq \langle M \rangle$ a $\{z\} \subseteq \langle M \rangle$, je $M \cup \{z\} \subseteq \langle M \rangle$. Obalením levé i pravé strany této množinové inkluze dostáváme $\langle M \cup \{z\} \rangle \subseteq \langle\langle M \rangle\rangle = \langle M \rangle$. Obrácená inkluze plyne z věty 2.34.

25. Proč je množina vektorů M lineárním podprostorem právě tehdy, když je <M> = M?

(2.37)
Budeme mit prvky x,y ktere lezi v M, - tyto prvky by meli splnovat -> x+y∈M, α.x∈M tzn. overujeme to ze linearni kombinace 1.x+1.y a α.x+0.y. Tyto linearni kombinace lezi v <M> a proto dle predpokladu M = <M>

26. Proč je lineární obal jakékoli množiny podprostor?

Věta 2.37 Nechť L je lineární prostor. Mmnožina M je lineárním podprostorem prostoru L právě tehdy, když <M>=M

2.37. Věta. Nechť L je lineární prostor, $M \subseteq L$. Množina M je lineárním podprostorem lineárního prostoru L právě tehdy, když $\langle M \rangle = M$.

Lineární obal je podprostor

Důkaz. Dokážeme nejprve „M je lineární podprostor, potom $\langle M \rangle = M$“. Vezmeme $z \in \langle M \rangle$ a dokážeme, že $z \in M$. Protože $z \in \langle M \rangle$, existuje konečně mnoho vektorů $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ takových, že lze psát $z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$. Každý sčítanec leží podle vlastnosti (2) definice 1.17 v množině M. Podle vlastnosti (1) definice 1.17 v množině M leží i součet těchto vektorů, tedy $z \in M$.

Zbývá dokázat „$\langle M \rangle = M$, potom M je lineární podprostor“. Uvažujme $x \in M$, $y \in M$. Abychom dokázali, že M je lineární podprostor, stačí ověřit, že lineární kombinace $1 \cdot x + 1 \cdot y$ leží v M a dále $\alpha \cdot x + 0 \cdot y$ leží v M. Protože $x \in M$, $y \in M$, je podle definice lineárního obalu každá jejich lineární kombinace prvkem $\langle M \rangle$ a podle předpokladu je $\langle M \rangle = M$. V množině M tedy leží i uvedené dvě lineární kombinace vektorů x, y.

27. Zdůvodněte, proč je lineární obal množiny M nejmenším podprostorem, který obsahuje M.

(2.38)
linearni obal mnoziny M je nejmensi linearni kombinaci tohoto prostoru.

2.38. Věta. Nechť L je lineární prostor a $M \subseteq L$ je libovolná neprázdná množina. Pak $P = \langle M \rangle$ je nejmenší lineární podprostor, pro který platí $M \subseteq P$.

Důkaz. Skutečnost, že $P = \langle M \rangle$ je lineární podprostor, ukazuje věta 2.37. Stačí ukázat, že P je nejmenší podprostor.

Nechť Q je nějaký podprostor, pro který také platí $M \subseteq Q$. Podle věty 2.37 je $\langle Q \rangle = Q$. Dále použijeme větu 2.34 na inkluzi $M \subseteq Q$ a dostáváme $P = \langle M \rangle \subseteq \langle Q \rangle = Q$.

28. Předpokládejte N lineárně nezávislou množinu a z ∉ <M>. Dokažte, že přidáním vektoru z k N zůstává tato množina lineárně nezávislá.

2.39. Věta. Nechť L je lineární prostor, $M \subseteq L$ je lineárně nezávislá množina a $z \notin \langle M \rangle$. Pak též $M \cup \{z\}$ je lineárně nezávislá množina. *Rozšíření LN množiny*

Důkaz. Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme, že $M \cup \{z\}$ je lineárně závislá. Pak existuje konečně mnoho prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ takových, že $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} z$ je netriviální lineární kombinace rovna nulovému vektoru. Pro $\alpha_{n+1} = 0$ zůstává netriviální lineární kombinace vektorů $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rovna nulovému vektoru, neboli konečná podmnožina M je lineárně závislá. To je ve sporu s tím, že M je lineárně nezávislá.

Pro $\alpha_{n+1} \neq 0$ je vektor z lineární kombinací vektorů $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (převedeme násobek vektoru z na druhou stranu rovnosti a podělíme $-\alpha_{n+1}$, jako v důkazu věty 2.21). To je ve sporu s tím, že $z \notin \langle M \rangle$. Pro oba případy hodnot α_{n+1} dostáváme spor, takže $M \cup \{z\}$ nemůže být lineárně závislá.

29. Popište postup, jakým lze (v lineárním prostoru s konečnou dimenzí) doplnit libovolnou lineárně nezávislou množinu N na bázi.

2.42. Definice. *Báze* lineárního prostoru L je taková podmnožina $B \subseteq L$, pro kterou platí *Báze*

(1) B je lineárně nezávislá,
(2) $\langle B \rangle = L$.

2.43. Poznámka. V definici 2.42 se mluví o L jako o lineárním prostoru. Není ale vyloučeno, že L je lineární podprostor nějakého jiného (většího) lineárního prostoru P, protože lineární podprostor je podle poznámky 1.16 sám o sobě lineárním prostorem.

2.51. Věta. Nechť L je lineární prostor. Pro každou lineárně nezávislou množinu $N \subseteq L$ existuje báze B lineárního prostoru L taková, že $N \subseteq B$. Pro každou množinu $M \subseteq L$ takovou, že $\langle M \rangle = L$, existuje báze B lineárního prostoru L taková, že $B \subseteq M$.

2.52. Příklad. Je-li $N = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ lineárně nezávislá množina lineárního prostoru $\mathbf{R}^n$, pak podle předchozí věty existuje množina $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $m \geq k$ taková, že B je báze. Ukážeme v tomto příkladě, jak bychom takovou bázi nalezli.

Pokud už $\langle N \rangle = \mathbf{R}^n$, pak N samotná je báze a položíme $B = N$. Pokud ale $\langle N \rangle \neq \mathbf{R}^n$, pak existuje prvek $x \in \mathbf{R}^n$, pro který $x \notin \langle N \rangle$ Ptáme se, zda už $N \cup \{x\}$ je báze. Podle věty 2.39 tato množina zůstává lineárně nezávislá. Pokud $\langle N \cup \{x\} \rangle = \mathbf{R}^n$, pak jsme našli bázi. Jestliže tato vlastnost neplatí, opakujme postup s přidáním dalšího prvku $y \notin \langle N \cup \{x\} \rangle$ znovu. Tento postup budeme opakovat tak dlouho, dokud budou existovat vektory mimo lineární obal naší postupně rozšiřované množiny. Podle příkladu 2.20 dospějeme k výsledku po konečně mnoha krocích, protože v $\mathbf{R}^n$ nelze vytvořit lineárně nezávislou množinu, která by měla více než n prvků.

Poznamenejme, že tento postup vedl k cíli, protože jsme měli zaručeno, že báze bude mít konečně mnoho prvků. Pro nekonečné báze bychom se tímto postupem mohli „utopit v nekonečnu“. Na druhé straně postup lze aplikovat na libovolný lineární prostor, který má konečné báze, nemusíme se nutně omezovat na $\mathbf{R}^n$.

30. Zdůvodněte, proč lze z lineárně závislé množiny M odebrat vektor tak, že lineární obal zmenšené množiny je stejný jako lineární obal původní množiny M.

Protože <M> je množina všech lineárních kombinací vektorů a jestliže jsou vektory lineárně závislé, tak jsou zároveň svojí lineární kombinací.

31. Zformulujte (bez důkazu) Steintzovu větu o výměně a vysvětlete její využití v důkaze tvrzení, že každé dvě báze stejného lineárního prostoru mají stejný počet prvků.

2.56. Věta (Steinitzova o výměně). Nechť L je lineární prostor, $M \subseteq L$ je libovolná množina a $N \subseteq \langle M \rangle$ je lineárně nezávislá množina, obsahující k vektorů. Pak lze odebrat z množiny M jejích k vektorů a vytvořit tak množinu M_1, pro kterou platí:

$$\langle M \rangle = \langle M_1 \cup N \rangle.$$

Jinými slovy, odebráním vhodných k vektorů z M a nahrazením těchto vektorů všemi lineárně nezávislými vektory z N se lineární obal $\langle M \rangle$ nezmění.

Důkaz (pro hloubavé čtenáře). Použijeme matematickou indukci podle k (o indukci viz důkaz věty 4.3). Pro $k = 0$ věta platí, protože množinu M vůbec neměníme.

Nechť nyní věta platí pro každou lineárně nezávislou množinu s k prvky a dokážeme, že platí i pro množinu s $k+1$ prvky. Nechť $N = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}\} \subseteq \langle M\rangle$. Označme $N_1 = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$. Z množiny M lze odebrat k vektorů tak, že vznikne množina M_1, pro kterou je

$$\langle M\rangle = \langle M_1 \cup N_1\rangle = \langle M_1 \cup N\rangle.$$

První rovnost je indukční předpoklad a druhá rovnost plyne z toho, že $\boldsymbol{v}_{k+1} \in \langle M\rangle = \langle M_1 \cup N_1\rangle$ a z třetí vlastnosti věty 2.35. Stačí tedy najít v M_1 vektor $\boldsymbol{w}_1$ tak, aby jej šlo odebrat a obal se nezměnil, tedy $\langle M_1 \cup N\rangle = \langle M_1 \setminus \{\boldsymbol{w}_1\} \cup N\rangle$. Protože $\boldsymbol{v}_{k+1} \in \langle M\rangle = \langle M_1 \cup N_1\rangle$, existuje konečně mnoho vektorů $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in M_1$ tak, že

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = \alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \alpha_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{w}_n + \beta_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \beta_k\boldsymbol{v}_k.$$

Protože N je lineárně nezávislá, tak (A) při $k = 0$ musí být $\boldsymbol{v}_{k+1}$ nenulový a (B) při $k > 0$ nesmí $\boldsymbol{v}_{k+1}$ být lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ (věta 2.21). Z toho plyne, že $n > 0$ a nemohou být všechny koeficienty α_i nulové. Uspořádáme nyní $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ tak, aby $\alpha_1 \neq 0$. Z předchozí rovnosti plyne

$$\boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{\alpha_1}\boldsymbol{v}_{k+1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{w}_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\boldsymbol{w}_n - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \frac{\beta_k}{\alpha_1}\boldsymbol{v}_k,$$

takže $\boldsymbol{w}_1 \in \langle M_1 \setminus \{\boldsymbol{w}_1\} \cup N_1 \cup \{\boldsymbol{v}_{k+1}\}\rangle$. Podle (3) z věty 2.35 se přidáním vektoru $\boldsymbol{w}_1$ do množiny $M_1 \setminus \{\boldsymbol{w}_1\} \cup N$ lineární obal množiny nezmění, takže je $\langle M_1 \setminus \{\boldsymbol{w}_1\} \cup N\rangle = \langle M_1 \cup N\rangle = \langle M\rangle$. Uvedený postup přitom zaručil $\boldsymbol{w}_1 \in M_1$, takže z množiny M jsme celkem odebrali $k+1$ vektorů.

2.57. Poznámka. Steinitzova věta má následující důsledky.

2.58. Věta. Nechť L je lineární prostor, $M \subseteq L$ je libovolná množina a $N \subseteq \langle M\rangle$ je lineárně nezávislá množina. Pak počet prvků množiny N je menší nebo roven počtu prvků množiny M.

Důkaz. Věta 2.56 tvrdí, že z množiny M lze odebrat tolik vektorů, kolik jich má množina N. Kdyby měla množina N více vektorů než množina M, pak by tento úkon nešel provést, tj. dostali bychom se do sporu se Steinitzovou větou.

2.59. Věta. Dvě báze stejného lineárního prostoru jsou obě nekonečné nebo mají stejný počet prvků.

Důkaz. Uvažujme dvě konečné báze B_1 a B_2 lineárního prostoru L. Protože $B_1 \subseteq \langle B_2\rangle$ a B_1 je lineárně nezávislá, musí podle věty 2.58 mít B_2 aspoň tolik prvků, jako má B_1. Protože $B_2 \subseteq \langle B_1\rangle$ a B_2 je lineárně nezávislá, musí podle stejné věty mít B_1 aspoň tolik prvků, jako má B_2. Takže počet prvků těchto množin musí být stejný.

Co se stane, když B_1 je konečná a B_2 nekonečná? Pak každá konečná podmnožina $K \subseteq B_2$ je lineárně nezávislá. Vezmu takovou konečnou podmnožinu K, která má více prvků, než B_1. Protože $K \subseteq \langle B_1\rangle$ a K je lineárně nezávislá, musí mít B_1 aspoň tolik prvků, jako K. To ale nemá. Dostáváme tedy spor, takže situace „jedna báze konečná a druhá nekonečná“ nemůže nastat.

32. Proč lineárně nezávislá množina vektorů nesmí mít více prvků, než dimenze lineárního prostoru těchto vektorů? 2.64

Protože tato množina tvoří zároveň svou bázi. Např. je množina A, A=báze B, která je bází množiny A, protože báze je množina nezávislých vektorů. Jelikož dimenze je definována jako počet prvků v bázi, nemůže se nikdy stát, že by množina M obsahovala více prvků, než její báze, protože to by bylo ve sporu s tvrzením, že A=báze B.

33. V lineárním prostoru L uvažujte množinu M, která má více prvků, než dimL. Proč musí být M lineárně závislá? 2.64

Protože obsahuje vektor/y , které jsou lineárně závislé. Báze, jejíž počet prvků tvoří dimenzi, obsahuje pouze nezávislé vektory, a proto nemůže obsahovat závislé vektory, a proto má závislá množina M více prvků, než dimL.

34. Dokažte, že pokud má množina M stejně prvků, jako je dimL, pak je lineárně nezávislá právě tehdy, když <M> = L. 2.64

dim Rn = n;<M> = {(a1, a2, ..., am)};m=n; Předpokládáme, že dimenze M je nezávislá právě tehdy pokud <M> = L

resime sporem: pokud <M> se nerovná L, pak muzeme pridat jakykoliv vektor a tim rozsirena mnozina o tento vektor zustane LN. ale to je ve sporu se zavedenym pojmem (1)"Je-li M linearne nezavisla, pak m =< n" laicky receno mnozina M ma najednou m+1 vektoru a to je ve sporu se zadanim m=n

2.64. Věta. Nechť L je lineární prostor, $\dim L = n$ a $M = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m\}$. Pak platí:
(1) Je-li M lineárně nezávislá, pak $m \leq n$.
(2) Je-li $m > n$, pak M je lineárně závislá.
(3) Nechť $m = n$. Pak M je lineárně nezávislá právě tehdy, když $\langle M \rangle = L$.

Počet prvků v LN množině

Důkaz. (1) Množinu M lze doplnit podle věty 2.51 na případně větší množinu B, která je bází. Tato množina má podle věty 2.59 vždy n prvků. Protože $M \subseteq B$, musí $m \leq n$.

(2) Toto tvzení je ekvivalentní s tvrzením (1).

(3) Nechť nejprve M je lineárně nezávislá. Kdyby $\langle M \rangle \neq L$, pak lze přidat do množiny M vektor $\boldsymbol{x} \notin \langle M \rangle$, a přitom podle věty 2.39 zůstane rozšířená množina lineárně nezávislá. To ale podle (1) není možné. Musí tedy $\langle M \rangle = L$. Předpokládejme nyní, že M je lineárně závislá. Kdyby $\langle M \rangle = L$, pak podle věty 2.51 existuje báze $B \subseteq M$, a přitom B bude mít méně prvků než množina M (protože M je lineárně závislá). To podle věty 2.59 není možné, neboť každá báze má n prvků. Musí tedy $\langle M \rangle \neq L$.

2.65. Poznámka. Uvědomíme si význam této věty. Báze je podle (1) nejpočetnější lineárně nezávislá množina. Dále podle (3) každá lineárně nezávislá množina, která má počet prvků rovný konečné dimenzi, je bází.

2.60. Definice. *Dimenze* lineárního prostoru L je počet prvků báze tohoto prostoru L. Dimenzi prostoru L označujeme symbolem $\dim L$. Dimenzi jednobodového lineárního prostoru $L = \{\boldsymbol{o}\}$ pokládáme rovnu nule.

Dimenze prostoru

2.61. Poznámka. Věta 2.59 nám zaručuje smysluplnost definice dimenze. Ačkoli lineární prostor může mít více bází, všechny tyto báze mají podle této věty stejný počet prvků, nebo jsou nekonečné. V tomto druhém případě klademe $\dim L = \infty$.

2.62. Příklad. $\dim \mathbf{R}^n = n$, viz příklad 2.46. $\dim P_{\leq n} = n + 1$, viz příklad 2.48. $\dim P = \infty$, viz příklad 2.47. Konečně $\dim U_O = 3$ podle příkladu 2.49. Važme si toho, že nás Stvořitel obklopil lineárním prostorem dimenze 3 nejen proto, že trojka je šťastné číslo.

2.63. Věta. Nechť L je lineární prostor a $M \subseteq L$ je lineární podprostor lineárního prostoru L. Pak $\dim M \leq \dim L$.

Dimenze podprostoru

Důkaz. Označme B_L nějakou bázi lineárního prostoru L. Báze B_M množiny M je lineárně nezávislá množina, pro kterou je $B_M \subseteq \langle B_L \rangle$. Podle věty 2.58 má B_M nejvýše tolik prvků, jako B_L.

35. Zdůvodněte, proč množina {1, x, x2, x3, . . .} tvoří bázi lineárního prostoru všech polynomů.

(2.28; 2.47)
neumim vysvetlit ale je to priklad 2.47 nasledne dojdeme k tomu ze dim P je nekocno

Protože množina je lineárně nezávislá, z toho vyplívá, že obal množiny, a z definice obalu vyplívá, že je lineární kombinací všech polynomů a tudíž je to i její báze.

//v příkladu 2.28 je důkaz, že je LN. Protože má tato množina nekonečně prvků a lin. prostor všech polynomů má dimenzi nekonečno, pak můžeme říct, že daná množina je její bazí. (doufám)

2.28. Příklad. Nechť $M = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ je nekonečná podmnožina lineárního prostoru všech polynomů P. Ukážeme, že M je lineárně nezávislá.

Podle definice 2.26 a poznámky za ní stačí ukázat, že každá konečná podmnožina polynomů

$$K = \{x^{k_1}, x^{k_2}, \ldots, x^{k_n}\}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad k_i \in \mathbf{N} \cup \{0\} \text{ pro } i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad k_1 < k_2 < \cdots < k_n$$

je lineárně nezávislá. Položme tedy lineární kombinaci prvků množiny K rovnu nulovému polynomu:

$$\alpha_1 x^{k_1} + \alpha_2 x^{k_2} + \cdots + \alpha_n x^{k_n} = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

a ptejme se, co z toho plyne pro koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Protože $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$, odpovídají čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ vybraným koeficientům polynomu. Nulový polynom je ovšem pouze takový polynom, který má všechny koeficienty nulové . Takže všechna čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ musejí být rovna nule. Nulovému polynomu se tedy rovná pouze triviální lineární kombinace, takže množina K je lineárně nezávislá.

2.47. Příklad. Množina $B = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ tvoří bázi lineárního prostoru P všech polynomů. Podle příkladu 2.28 je lineárně nezávislá. Zbývá tedy ověřit, že $\langle B \rangle = P$. Zvolme nějaký polynom $p \in P$. Ukážeme, že $p \in \langle B \rangle$. Pro každý polynom $p \in P$ existuje $n \in \mathbf{N}$ a reálná čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ taková, že hodnota polynomu p v bodě x je dána vzorcem

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Existuje tedy konečná podmnožina $K \subseteq B$, $K = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ taková, že p je lineární kombinací prvků z K (koeficienty této lineární kombinace jsou čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$). Z toho plyne, že $p \in \langle B \rangle$.

36. Podrobně zdůvodněte, proč množina polynomů {x2+1, x, x−1} tvoří bázi lineárního prostoru všech polynomů nejvýše druhého stupně.

191. Cvičení. Ověřte, zda množina

a) $B = \{x^2 - x,\ x^2 - 2,\ (x-1)^2\}$ tvoří bázi lineárního prostoru všech polynomů **nejvýše 2. stupně,**
b) $B = \{(1,2,3),\ (3,2,1),\ (1,1,5)\}$ tvoří bázi lineárního prostoru $\mathbf{R}^3$,
c) $B = \{1 + 2i,\ 2 + i\}$ tvoří bázi lineárního prostoru $\mathbf{C}$ ze cvičení 1.76,
d) $B = \{(1,i),\ (2,1+i),\ (1+i,2+i),\ (i,1)\}$ tvoří bázi lineárního prostoru $\mathbf{C}^2$ ze cvičení 1.77,
e) $B = \{x^2 + 2x + 1,\ 3x^2 + 2x,\ -x^2 + 4x + 3\}$ tvoří bázi prostoru všech polynomů nejvýše 2. stupně,
f) $B = \{(1,2,3),\ (3,2,1)\}$ tvoří bázi lineárního prostoru $\mathbf{R}^3$,
g) $B = \{(1,2,3),\ (3,2,1),\ (2,2,5),\ (3,3,0)\}$ tvoří bázi lineárního prostoru $\mathbf{R}^3$.

2.91.[5] Řešení.

→ (a) Ano, protože je LN a tříprvková. Přitom je zámo, že dimenze prostoru polynomů nejvýše druhého stupně je 3.

→ (b) Ano, protože je LN a tříprvková a je $\dim \mathbf{R}^3 = 3$.

→ (c) Ano, protože je LN a dvouprvková a je $\dim \mathbf{C} = 2$.

→ (d) Ověřím lineární nezávislost. $\alpha(1,i) + \beta(2,1+i) + \gamma(1+i,2+i) + \delta(i,1) = (0+0i, 0+0i)$, tj. $\alpha + 2\beta + (1+i)\gamma + i\delta = 0 + 0i$, $i\alpha + (1+i)\beta + (2+i)\gamma + \delta = 0 + 0i$, tj. reálná část první rovnice: $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$, imaginární část první rovnice: $\gamma + \delta = 0$, reálná část druhé rovnice: $\beta + 2\gamma + \delta = 0$, imaginární část druhé rovnice: $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Tyto čtyři rovnice tvoří soustavu, která má pouze triviální řešení, takže množina B je LN. Protože $\dim \mathbf{C}^2 = 4$ a B je čtyřprvková lineárně nezávislá, je B bází lineárního prostoru $\mathbf{C}^2$.

→ (e) Ano, B je LN a je tříprvková a dimenze protoru polynomů nejvýše druhého stupně je tři.

→ (f) B není báze, protože má jen dva prvky, a přitom $\dim \mathbf{R}^3 = 3$.

→ (g) B není báze, protože má 4 prvky, a přitom $\dim \mathbf{R}^3 = 3$. Množina B musí podle věty 2.64 být nutně lineárně závislou množinou.