Determinant

52. Definice determinantu.

(4.15)
Determinant je zobrazení, které přiřadí každé čtvercové matici A skalár det A.

Ze skript 4.15: Nechť $A = (a_{i\ j})$ je čtvercová matice typu (n,n). Číslo

$$\sum_{\pi=(i_1,i_2,\ldots,i_n)} sgn\pi \cdot a_{1,i_1} a_{2,i_2} \cdots a_{n,i_n}$$

nazýváme determinantem matice A a značíme je det A.

4.15. Definice. Nechť $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ je čtvercová matice typu (n, n). Číslo *Definice determinantu*

$$\sum_{\pi=(i_1,i_2,\ldots,i_n)} \operatorname{sgn}\pi \cdot a_{1,i_1}\, a_{2,i_2} \cdots a_{n,i_n} \tag{4.1}$$

nazýváme *determinantem matice* **A** a značíme je $\det \mathbf{A}$. V uvedeném vzorci se sčítá přes všechny permutace n prvků, tj. jedná se podle věty 4.3 o $n!$ sčítanců.

4.16. Poznámka. Je možné, že vzorec z definice 4.15 je pro některé čtenáře málo srozumitelný. Pokusíme se jej proto v této poznámce trochu vysvětlit a zlidštit.

Představme si čtvercovou matici jako šachovnici rozměru $n \times n$ a pokusme se na ni rozmístit n šachových věží tak, aby se vzájemně neohrožovaly. Podle poznámky 4.11, odst. (3) je možné každé takové rozmístění popsat jednou permutací (pozice věží čteme po řádcích). Podle věty 4.3 vidíme, že existuje $n!$ různých permutací, tedy existuje $n!$ různých řešení této šachové úlohy. Pokusme se pro každé řešení této úlohy zapsat odpovídající permutaci, zjistit znaménko této permutace, nadzvednout věžičky a zapsat si hodnoty prvků, na kterých ty figurky stojí, vynásobit tyto hodnoty mezi sebou a výsledek ještě násobit znaménkem permutace. Pak si tento výsledek uložíme do paměti. Až projdeme všech $n!$ možností rozmístění věží, získáme v paměti $n!$ sčítanců a ty sečteme. Výsledkem je determinant matice.

4.23. Příklad. Právě popsanou metodou spočítáme determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

V literatuře se pro $\det \mathbf{A}$ často používá značení $|\mathbf{A}|$. Níže tedy zapisujeme prvky jednotlivých matic mezi svislé čáry a tím dáváme na jevo, že počítáme determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -15 & 13 \\ 0 & 0 & -15 & 12 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=}$$

$$\overset{(4)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -15 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-15) \cdot (-1) = -15.$$

V kroku (1) jsme první řádek násobili -2 a přičítali k druhému, pak jsme první řádek násobili -1 a přičítali k třetímu a nakonec jsme první řádek násobili -2 a přičítali ke čtvrtému. Tyto operace podle (V5) nemění hodnotu determinantu. V kroku (2) jsme prohodili druhý řádek se třetím, což podle (V1) změní znaménko determinantu. Napsali jsme toto znaménko před determinant modifikované matice. V kroku (3) jsme druhý řádek násobili třemi a přičetli ke třetímu a čtvrtému. To podle (V5) nemění hodnotu determinantu. Konečně v kroku (4) jsme třetí řádek násobili -1 a přičetli ke čtvrtému. Tím dostáváme matici tvaru (4.2) z příkladu 4.20, o které víme, že má determinant roven součinu prvků na diagonále.

Upozorňujeme na častou začátečnickou chybu při počítání determinantů. V Gaussově eliminační metodě se většinou neklade důraz na to, který řádek od kterého odečítáme, protože výsledný řádek můžeme kdykoli později násobit číslem -1. Při počítání determinantů to ale jedno není. Například v kroku (1) jsme od druhého řádku odečítali dvojnásobek prvního a výsledek psali na druhý řádek. Kdybychom od dvojnásobku prvního řádku odečítali druhý a výsledek psali do druhého řádku, dopustili bychom se chyby, která nám změní znaménko determinantu. Mnemotechnická pomůcka: píšeme-li výsledek součtu na i-tý řádek, pak i-tý řádek původní matice nesmí být v součtu násoben žádnou konstantou. Ostatní řádky mohou být násobeny libovolnou konstantou a přičítány k tomuto řádku. Je třeba si tedy uvědomit, že „přičtení násobku řádku $\boldsymbol{a}$ k řádku $\boldsymbol{b}$“ (korektní krok) není totéž, jako „přičtení řádku $\boldsymbol{a}$ k násobku řádku $\boldsymbol{b}$“ (nekorektní krok).

53. Zdůvodněte z definice základní vlastnosti determinantu.

Základní vlastnosti

4.21. Věta. Základní vlastnosti determinantu.
(V1) Jestliže se matice $\mathbf{B}$ liší od matice $\mathbf{A}$ jen prohozením jedné dvojice řádků, pak $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.
(V2) Jestliže matice $\mathbf{A}$ má dva stejné řádky, pak $\det \mathbf{A} = 0$.

V dalších vlastnostech (V3) až (V5) označujeme symbolem $\begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix}$ matice, které se liší pouze v i-tém řádku, zde označeném $\boldsymbol{a}_i$. V řádcích, které jsou vyznačeny tečkami, se jednotlivé matice shodují.

$$\text{(V3)} \quad \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha\, \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

$$\text{(V4)} \quad \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{b}_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

$$\text{(V5)} \quad \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i + \alpha\, \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \text{kde } \boldsymbol{a}_j \text{ je nějaký jiný řádek téže matice.}$$

Důkaz. (V1) Součin $a_{1,i_1} \cdots a_{n,i_n}$ odpovídá ve vzorci pro výpočet $\det \mathbf{A}$ permutaci $\pi = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Tentýž součin najdeme i ve vzorci pro výpočet $\det \mathbf{B}$, pouze bude odpovídat permutaci π', která vznikne z permutace π přehozením dvou prvků. To podle věty 4.9 znamená, že $\operatorname{sgn} \pi' = -\operatorname{sgn} \pi$. V každém z $n!$ sčítanců pro výpočet $\det \mathbf{B}$ tedy máme opačné znaménko, než ve sčítancích pro výpočet $\det \mathbf{A}$. Musí tedy být $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.

(V2) Prohodíme-li v matici $\mathbf{A}$ mezi sebou dva stejné řádky, dostáváme zase matici $\mathbf{A}$. Podle (V1) pro tuto matici platí $\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A}$, což nemůže být splněno jinak, než že $\det \mathbf{A} = 0$.

Vlastnosti (V3) a (V4) plynou přímo z definice determinantu:

$$\text{(V3)} \quad \sum \operatorname{sgn} \pi\, a_{1,j_1}\, a_{2,j_2} \cdots (\alpha\, a_{i,j_i})\, a_{i+1,j_{i+1}} \cdots a_{n,j_n} = \alpha \sum \operatorname{sgn} \pi\, a_{1,j_1}\, a_{2,j_2} \cdots a_{i,j_i}\, a_{i+1,j_{i+1}} \cdots a_{n,j_n}.$$

$$\text{(V4)} \quad \sum \operatorname{sgn} \pi\, a_{1,j_1}\, a_{2,j_2} \cdots (a_{i,j_i} + b_{i,j_i})\, a_{i+1,j_{i+1}} \cdots a_{n,j_n} =$$
$$= \sum \operatorname{sgn} \pi\, a_{1,j_1}\, a_{2,j_2} \cdots a_{i,j_i}\, a_{i+1,j_{i+1}} \cdots a_{n,j_n} + \sum \operatorname{sgn} \pi\, a_{1,j_1}\, a_{2,j_2} \cdots b_{i,j_i}\, a_{i+1,j_{i+1}} \cdots a_{n,j_n}.$$

(V5) dokážeme použitím právě dokázaných vlastností:

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i + \alpha\, \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{\text{(V4)}}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \alpha\, \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{\text{(V3)}}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \alpha \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{\text{(V2)}}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

54. Proč přičtení násobku řádku k jinému nezmění hodnotu determiantu?

viz 4.21(V5)

55. Formulujte (bez důkazu) větu o rozvoji determinatu podle řádku/sloupce.

viz 4.30

Rozvoj determinantu

4.30. Věta (o rozvoji determinantu podle r-tého řádku). Nechť $\mathbf{A} = (a_{r,s})$ je čtvercová matice typu (n, n) a $\mathbf{A}_{i,j}$ jsou matice typu $(n-1, n-1)$, které vzniknou z matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak pro každé $r \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$a_{r,1}\,(-1)^{r+1} \det \mathbf{A}_{r,1} + a_{r,2}\,(-1)^{r+2} \det \mathbf{A}_{r,2} + \cdots + a_{r,n}\,(-1)^{r+n} \det \mathbf{A}_{r,n} = \det \mathbf{A}. \tag{4.3}$$

Je-li dále $t \in \{1, \ldots, n\}$, $t \neq r$, pak platí

$$a_{r,1}\,(-1)^{t+1} \det \mathbf{A}_{t,1} + a_{r,2}\,(-1)^{t+2} \det \mathbf{A}_{t,2} + \cdots + a_{r,n}\,(-1)^{t+n} \det \mathbf{A}_{t,n} = 0. \tag{4.4}$$

Důkaz (pro hloubavé čtenáře). Podívejme se na vzorec (4.1) pro $\det \mathbf{A}$. Seskupíme v něm všechny sčítance, které obsahují prvek $a_{1,1}$ k sobě, dále seskupíme k sobě sčítance, které obsahují prvek $a_{1,2}$ a tak dále až po poslední skupinu, ve které se vyskytují sčítanci s prvkem $a_{1,n}$. Tyto prvky ze součtů vytkneme. Pro s-tou skupinu sčítanců tedy máme:

$$\sum_{\pi=(s,i_2,\ldots,i_n)} \operatorname{sgn}\pi \cdot a_{1,s}\, a_{2,i_2} \cdots a_{n,i_n} = a_{1,s} \left(\sum_{\pi=(s,i_2,\ldots,i_n)} \operatorname{sgn}\pi \cdot a_{2,i_2} \cdots a_{n,i_n} \right) = *$$

Z permutace $\pi = (s, i_2, \ldots, i_n)$ prvků množiny $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ vytvořme permutaci $\pi' = (i_2, \ldots, i_n)$ prvků množiny $M \setminus \{s\}$ tak, že odebereme první prvek z permutace π. Nová permutace π' má o $s-1$ méně inverzí než permutace π. (Nakreslete si všechny inverze spojené s prvkem s.) Pro znaménka permutací tedy platí $\operatorname{sgn}\pi = (-1)^{s-1} \operatorname{sgn}\pi' = (-1)^{s+1} \operatorname{sgn}\pi'$. Pokračujme nyní dále v našem výpočtu:

$$* = a_{1,s}\,(-1)^{1+s} \left(\sum_{\pi'=(i_2,\ldots,i_n)} \operatorname{sgn}\pi' \cdot a_{2,i_2} \cdots a_{n,i_n} \right) = a_{1,s}\,(-1)^{1+s} \det \mathbf{A}_{1,s}.$$

Determinant $\mathbf{A}$ je součtem všech skupin sčítanců pro $s = 1, 2, \ldots, n$, což dokazuje vzorec (4.3) pro $r = 1$.

Nechť nyní $r \neq 1$. Prohodíme r-tý řádek matice $\mathbf{A}$ s předchozím, pak jej prohodíme s dalším předcházejícím řádkem, atd. až dostaneme původně r-tý řádek na první řádek modifikované matice $\mathbf{B}$. K tomu potřebujeme provést $r-1$ prohození, takže platí $\det \mathbf{B} = (-1)^{r-1} \det \mathbf{A}$. Provedeme rozvoj determinantu matice $\mathbf{B}$ podle prvního řádku ($\mathbf{B}_{1,s}$ je matice, která vznikne z matice $\mathbf{B}$ vynecháním prvního řádku a s-tého sloupce):

$$\det \mathbf{B} = a_{r,1}\,(-1)^{1+1} \det \mathbf{B}_{1,1} + a_{r,2}\,(-1)^{2+1} \det \mathbf{B}_{1,2} + \cdots + a_{r,n}\,(-1)^{1+n} \det \mathbf{B}_{1,n}.$$

Protože $\det \mathbf{A} = (-1)^{r-1} \det \mathbf{B}$ a protože $\mathbf{B}_{1,s} = \mathbf{A}_{r,s}$, máme vzorec (4.3) dokázán.

Uvažujme $t \neq r$ a nahraďme t-tý řádek v matici $\mathbf{A}$ řádkem r-tým. Novou matici označme $\mathbf{C}$. Má dva stejné řádky, takže je $\det \mathbf{C} = 0$. Rozvoj tohoto determinantu podle t-tého řádku odpovídá vzorci (4.4).

4.31. Poznámka. Vzhledem k platnosti věty 4.28 platí analogická věta o rozvoji determinantu podle s-tého sloupce. Zkuste si ji zformulovat jako cvičení.

4.34. Příklad. Uvažujme matici $\mathbf{A}$ z příkladu 4.23. Provedeme rozvoj determinantu $\mathbf{A}$ podle prvního řádku.

$$\det \mathbf{A} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 1\cdot 5 + 2\cdot 0 + 4\cdot(-5) - 1\cdot 0 = -15.$$

Vidíme, že jsme si při výpočtu moc nepomohli. Rozvoj determinantu podle řádku nebo sloupce matice typu (n, n) obecně vede na n determinantů matic, které mají o jediný řádek a sloupec méně. To není žádná výhra.

Kdybychom opakovaně prováděli rozvoj vzniklých determinantů podle řádku nebo sloupce, mohli bychom dojít až k maticím typu (1,1), u kterých je determinant přímo roven hodnotě prvku dané matice. Programátory může napadnout, že lze tedy větu o rozvoji determinantu využít při implementaci výpočtu determinantu rekurzivním algoritmem. Ovšem pozor! Tento algoritmus potřebuje zcela stejné množství operací, jako při výpočtu determinantu přímo z definice. Jak už jsme si uváděli, při matici typu $(50, 50)$ se jedná zhruba o 10^{64} operací. Prakticky to znamená, že bychom se pravděpodobně výsledku nedočkali za celou dobu předpokládané existence naší sluneční soustavy a kdo ví, jestli by se dříve nezhroutil vesmír.

Můžete namítnout, k čemu že je metoda rozvoje determinantu dobrá? Pokud se v nějakém řádku nebo sloupci matice vyskytuje mnoho nul, můžeme zmenšit velikost matic, ze kterých počítáme determinant. Je-li na řádku nebo sloupci jediný nenulový prvek, dostáváme jedinou matici o jeden řádek a sloupec menší. V příkladu 4.23 jsme mohli například před provedením kroku (2) provést rozvoj determinantu podle prvního sloupce a dále pracovat jen s maticí typu $(3, 3)$. Před krokem (4) jsme mohli znovu provést rozvoj determinantu podle prvního sloupce:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & -6 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \\ -3 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & -6 & 4 \\ -3 & -6 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -15 & 13 \\ 0 & -15 & 12 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} -15 & 13 \\ -15 & 12 \end{vmatrix} = 15\cdot 12 - 15\cdot 13 = -15.$$

Výhoda se projeví výrazněji, pokud například čísla v prvním řádku či sloupci jsou nesoudělná a je výhodnější začít vyrábět nuly v jiném řádku nebo sloupci. Eliminační metodou v něm vytvoříme nuly a pak provedeme podle tohoto řádku nebo sloupce rozvoj determinantu.

56. Z věty o determinantu součinu odvoďte vzorec pro determinant inverzní matice.

(4.38)
Nechť B je inverzni matice k matici A. Pak det B = 1/(det A)

to podle mě nestačí, chtějí to odvodit ze součinu determinantů, zkusil jsem to takto

detA*detB=det(A*B)=detE=\frac{detB}{detA}=1 => detB=\frac{1}{detA}

4.35. Věta (Laplaceova). Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou čtvercové matice. Pak $\det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.

Součin determinantů

Důkaz (pro hloubavé čtenáře). Uvědomíme si, že lze matici $\mathbf{A}$ převést pouze řádkovými úpravami na matici $\mathbf{A}'$, která je tvaru (4.2). Navíc můžeme provádět pouze takové úpravy, které nemění determinant: přičítání násobku jiného řádku k řádku podle (V5) věty 4.21 nemění determinant a pokud potřebujeme prohodit řádky, pak okamžitě pronásobíme jeden z nich konstantou -1. Tyto operace skutečně stačí na převedení matice na tvar (4.2), a přitom máme zaručeno, že $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}'$. Podle věty 3.55 existuje čtvercová matice $\mathbf{P}$, pro kterou platí

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}.$$

Dále převedeme matici $\mathbf{B}$ na matici $\mathbf{B}'$ tvaru (4.2) pouze sloupcovými úpravami takovými, které nemění determinant. Máme tedy $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{B}'$ a navíc podle poznámky 3.58 existuje matice $\mathbf{Q}$ taková, že

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}.$$

Platí

$$\det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}' \det \mathbf{B}' = \det(\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}').$$

Poslední rovnost ověříme z definice maticového násobení a využijeme toho, že obě matice $\mathbf{A}'$ i $\mathbf{B}'$ jsou tvaru (4.2). Matice $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}'$ je také tvaru (4.2) a pro její diagonální prvky $g_{i,i}$ platí, že $g_{i,i} = a'_{i,i}\, b'_{i,i}$. Protože se determinanty matic tvaru (4.2) počítají jako součin prvků na diagonále, máme skutečně $\det \mathbf{A}' \det \mathbf{B}' = \det(\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}')$.

Na matici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ provedeme stejné řádkové a sloupcové úpravy, jako jsme provedli na matice $\mathbf{A}$ resp. $\mathbf{B}$. Dostaneme matici $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}'$, protože

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{Q} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}) = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}'.$$

Provedené řádkové a sloupcové úpravy nemění determinant, takže matice $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}'$ má stejný determinant jako matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Dostáváme výsledek

$$\det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}' \det \mathbf{B}' = \det(\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}') = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

4.36. Poznámka. Na závěr kapitoly o determinantech předvedeme slíbený důkaz věty 3.50 o existenci inverzní matice pro každou regulární matici. Můžeme to považovat za první praktické využití pojmu determinant. Další využití najdeme v následující kapitole o soustavách lineárních rovnic a dále později při počítání objemů jistých těles.

Existence inverzní matice

Větu 3.50 o existenci inverzní matice zde přepíšeme znovu.

4.37. Věta. Ke čtvercové matici $\mathbf{A}$ existuje inverzní matice právě tehdy, když $\mathbf{A}$ je regulární.

Důkaz. Nechť nejprve $\mathbf{A}$ je singulární, tj. podle věty 4.27 je $\det \mathbf{A} = 0$. Ukážeme, že pak inverzní matice neexistuje. Kdyby existovala (označme ji $\mathbf{A}^{-1}$), pak musí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ a podle věty 4.35 je

$$1 = \det \mathbf{E} = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^{-1} = 0 \cdot \det \mathbf{A}^{-1} = 0,$$

což je spor. Inverzní matice tedy k singulární matici neexistuje.

Nechť nyní $\mathbf{A}$ je regulární. Sestrojíme matici

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\, \mathbf{B}^T,$$

kde $\mathbf{B} = (D_{i,j})$ je matice doplňků k matici $\mathbf{A}$. Ukážeme, že takto sestrojená $\mathbf{A}^{-1}$ je inverzní matice. Musíme tedy ověřit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ a dále $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$. Je-li $\mathbf{B} = (D_{i,j})$, pak samozřejme je $\mathbf{B}^T = (D_{j,i})$. Podle definice součinu matic 3.34 vypočítáme prvek $e_{i,k}$ matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$:

$$e_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{1}{\det \mathbf{A}} D_{k,j} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (a_{i,1} D_{k,1} + a_{i,2} D_{k,2} + \cdots + a_{i,n} D_{k,n}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \det \mathbf{A} = 1 & \text{pro } i = k, \\ \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot 0 = 0 & \text{pro } i \neq k. \end{cases}$$

Zde jsme využili větu o rozvoji determinantu podle i-tého řádku, viz poznámku 4.33. Zjišťujeme, že prvky $e_{i,k}$ jsou v souladu s definicí jednotkové matice 3.44. Rovnost $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$ bychom dokazovali podobně. Použili bychom větu o rozvoji i-tého sloupce namísto řádku.

4.38. Věta. Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice. Pak $\det \mathbf{A}^{-1} = 1/\det \mathbf{A}$.

Důkaz. Důkaz jsme vlastně už provedli v první části důkazu předchozí věty. Zopakujeme si to. Protože $\mathbf{E} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$, musí podle věty 4.35 být $1 = \det \mathbf{E} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^{-1}$. Z toho přímo plyne dokazovaný vzorec.

4.39. Poznámka. Důkaz věty 4.37 nám dává návod, jak sestrojit inverzní matici k matici $\mathbf{A}$. Je to vlastně vedle eliminační metody popsané v příkladu 3.53 další metoda hledání inverzní matice. Můžeme ji říkat „metoda hledání inverzní matice pomocí doplňků". Uvědomíme si ale, že pro velké matice je eliminační metoda podstatně účelnější než metoda pomocí doplňků, která vyžaduje spočítat n^2 determinantů matic typu $(n-1, n-1)$ a ještě spočítat $\det \mathbf{A}$. V následujících příkladech si proto tuto metodu ilustrujeme jen na malých maticích.

57. Zformulujte a dokažte větu na výpočet inverzní matice pomocí doplňků.

(4.40; 4.32)
zformulujte beru - 4.40 ale dokazte :-O to uz neberu, nejakej napad nekdo?

Jelikož $E = A \cdot A^{-1}$ tak podle Laplaceovi věty (4.35) $1 = detE = detA \cdot detA^{-1}$ c čehož již vzorec za pomocí úprav odvodíme.

4.32. Definice. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice typu (n, n). *Doplněk matice* $\mathbf{A}$ *v pozici* (i, j) je číslo $D_{i,j}$, definované vzorcem: $D_{i,j} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{i,j}$, kde $\mathbf{A}_{i,j}$ je matice typu $(n-1, n-1)$, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

4.33. Poznámka. Větu 4.30 lze při použití definice 4.32 a poznámky 4.31 přeformulovat. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice typu (n, n) a $D_{i,j}$ jsou její doplňky. Nechť $r, s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $r \neq t$, $s \neq t$. Pak platí

$$\det \mathbf{A} = a_{r,1} D_{r,1} + a_{r,2} D_{r,2} + \cdots + a_{r,n} D_{r,n}, \quad 0 = a_{r,1} D_{t,1} + a_{r,2} D_{t,2} + \cdots + a_{r,n} D_{t,n},$$
$$\det \mathbf{A} = a_{1,s} D_{1,s} + a_{2,s} D_{2,s} + \cdots + a_{n,s} D_{n,s}, \quad 0 = a_{1,s} D_{1,t} + a_{2,s} D_{2,t} + \cdots + a_{n,s} D_{n,t}.$$

4.40. Příklad. Najdeme inverzní matici k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Označme $\mathbf{B}$ matici doplňků k matici $\mathbf{A}$. V tomto případě se doplňky dobře počítají, protože se jedná o determinanty matic typu $(1, 1)$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{B}^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

4.41. Příklad. Najdeme inverzní matici ke stejné matici, jako v příkladu 3.53, tj. k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Doplňky nyní budeme počítat z determinantů matic typu $(2, 2)$, což už nám dá trochu práce.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\det \mathbf{A} = -2, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{B}^T = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Výsledek můžeme srovnat s výsledkem v příkladu 3.53.

4.27. Věta. Čtvercová matice $\mathbf{A}$ je regulární právě tehdy, když $\det \mathbf{A} \neq 0$.

4.28. Věta. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Pak $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.