3. Matice

S pojmem matice jako s tabulkou čísel jsme se už seznámili v úvodu do Gaussovy eliminační metody. Nyní si definujeme pojem matice přesněji.

3.1. Definice. *Matice typu (m,n)* je uspořádaná m-tice prvků z $\mathbf{R}^n$. Jednotlivé složky této m-tice nazýváme *řádky matice*. Nechť $\boldsymbol{a}_r = (a_{r,1}, a_{r,2}, \ldots, a_{r,n})$ je r-tý řádek matice typu (m,n). s-tá složka tohoto řádku $a_{r,s} \in \mathbf{R}$ se nazývá *(r,s)-tý prvek* matice. Řádky matice $\mathbf{A}$ zapisujeme jako skutečné řádky pod sebe takto: *Definice matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1}, & a_{m,2}, & \ldots, & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

nebo zapíšeme jen stručně prvky matice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = (a_{r,s}), \quad r \in \{1,2,\ldots,m\},\ s \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

Nechť $\mathbf{A} = (a_{r,s}), r \in \{1,\ldots,m\}, s \in \{1,\ldots,n\}$. Uspořádanou m-tici reálných čísel $(a_{1,s}, a_{2,s}, \ldots, a_{m,s})$ nazýváme *s-tým sloupcem matice $\mathbf{A}$*.

Matici typu (m,n), která má všechny prvky nulové, nazýváme *nulovou maticí*.

Matici typu (m,n) nazýváme *čtvercovou maticí*, pokud $m = n$.

3.2. Poznámka. Dvě matice se rovnají, pokud jsou stejného typu a všechny prvky jedné matice se rovnají odpovídajícím prvkům matice druhé. To vyplývá z definice: rovnost dvou uspořádaných m-tic řádků z $\mathbf{R}^n$ je definována tak, že všechny složky první m-tice se rovnají odpovídajícím složkám druhé m-tice, jinými slovy odpovídající řádky se rovnají. Rovnost řádků jako uspořádaných n-tic reálných čísel je definována tak, že se odpovídající složky těchto řádků rovnají.

37. Proč matice typu (m, n) tvoří lineární prostor? Jakou má tento prostor dimenzi?

(3.3; 3.4; 3.6)
Protoze operace v matici jsou ekvivalentni s operacemi v linearnim prostoru => splnuje axioy =>

muzeme radky mezi sebou scitat i nasobit nejakym koeficientem alpha. Tento prostor ma dimenzi m.n coz je pocet prvku v bazi (tedy v matici).

3.3. Definice. Nechť $\mathbf{A} = (a_{r,s})$, $\mathbf{B} = (b_{r,s})$ jsou matice typu (m,n). Matici $\mathbf{C}$ typu (m,n) nazýváme *součtem matic* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ (značíme $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$), pokud pro prvky matice $\mathbf{C} = (c_{r,s})$ platí $c_{r,s} = a_{r,s} + b_{r,s}$, $r \in \{1,2,\ldots,m\}, s \in \{1,2,\ldots,n\}$. Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$. *α-násobek* matice $\mathbf{A}$ je matice $\alpha \cdot \mathbf{A} = (\alpha\, a_{r,s})$. Názorně: *Lineární prostor matic*

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1}, & a_{1,2}+b_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1}, & a_{2,2}+b_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n}+b_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1}+b_{m,1}, & a_{m,2}+b_{m,2}, & \ldots, & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}, \quad \alpha \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha\, a_{1,1}, & \alpha\, a_{1,2}, & \ldots, & \alpha\, a_{1,n} \\ \alpha\, a_{2,1}, & \alpha\, a_{2,2}, & \ldots, & \alpha\, a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ \alpha\, a_{m,1}, & \alpha\, a_{m,2}, & \ldots, & \alpha\, a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

3.4. Věta. Množina všech matic shodného typu (m,n) tvoří se sčítáním matic a násobením matice reálným číslem podle definice 3.3 lineární prostor. Nulový vektor tohoto prostoru je nulová matice.

Důkaz. Důkaz si čtenář provede sám jako cvičení. Srovnejte s příklady 1.9 a 1.11.

3.5. Příklad. Množina

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

tvoří bázi lineárního prostoru $M_{3,2}$ všech matic typu $(3,2)$.

Abychom to ukázali, ověříme lineární nezávislost B a dále vlastnost $\langle B \rangle = M_{3,2}$. Nejprve ověříme lineární nezávislost. Položme lineární kombinaci prvků z B rovnu nulové matici:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Odpovídající složky se musejí rovnat, což vede k šesti rovnicím: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, $\zeta = 0$. Jedině triviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru.

Ověříme nyní vlastnost (2) z definice 2.42. Nechť

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

je nějaká matice z lineárního prostoru $M_{3,2}$. Snadno zjistíme, že existuje lineární kombinace matic z množiny B, která je rovna této matici (stačí volit $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$, $\delta = d$, $\mu = e$, $\nu = f$). Tím jsme dokázali, že $\langle B \rangle = M_{3,2}$ a B je tedy báze lineárního prostoru matic $M_{3,2}$. Nazýváme ji *standardní bází*.

Dimenze lineárního prostoru $M_{3,2}$ je podle definice 2.60 rovna šesti.

38. Proč GEM nemění lineární obal řádků?

věta 3.13 a její důkaz

//edit Zkracene: konecny stav matice po GE nam vyeliminuje (ci ne) shodne radky (zavisle linearni kombinace). Upravene matice typu A~B~C Konecny stav je roven hodnosti matici C a ten je roven dimenzi obalu radku matice A.

3.13. Věta. Je-li $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, pak $\langle \mathrm{r}\colon \mathbf{A} \rangle = \langle \mathrm{r}\colon \mathbf{B} \rangle$. Jinými slovy: Gaussova eliminační metoda zachovává lineární obal řádků matice.

Gaussova eliminace zachovává obal

Důkaz. Dokážeme nejdříve pomocné tvrzení: jestliže $\mathbf{A}_1$ je matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ jedním krokem podle Gaussovy eliminační metody, pak $\langle \mathrm{r}\colon \mathbf{A}_1 \rangle \subseteq \langle \mathrm{r}\colon \mathbf{A} \rangle$.

Všechny řádky matice $\mathbf{A}_1$ lze zapsat jako lineární kombinaci řádků matice $\mathbf{A}$. Je přitom jedno, zda matice $\mathbf{A}_1$ vznikla prohozením řádků, pronásobením jednoho řádku nenulovým reálným číslem, přičtením násobku jednoho řádku k jinému, odebráním nebo přidáním nulového řádku. Platí tedy, že řádky matice $\mathbf{A}_1$ leží v $\langle \mathrm{r}\colon \mathbf{A} \rangle$. Proto $\langle \mathrm{r}\colon \mathbf{A}_1 \rangle \subseteq \langle \langle \mathrm{r}\colon \mathbf{A} \rangle \rangle$. Podle věty 2.35 je $\langle \langle \mathrm{r}\colon \mathbf{A} \rangle \rangle = \langle \mathrm{r}\colon \mathbf{A} \rangle$, takže $\langle \mathrm{r}\colon \mathbf{A}_1 \rangle \subseteq \langle \mathrm{r}\colon \mathbf{A} \rangle$.

Pomocné tvrzení máme dokázáno. Pokud toto tvrzení uplatníme opakovaně (matice $\mathbf{B}$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ po konečně mnoha krocích podle Gaussovy eliminační metody), máme výsledek $\langle \mathrm{r}\colon \mathbf{B} \rangle \subseteq \langle \mathrm{r}\colon \mathbf{A} \rangle$. Tvrzení dokazované věty nyní plyne ze symetrie relace „$\sim$“, tj. z věty 3.10.

3.14. Příklad. Řádky matice $\mathbf{A}$ i matice $\mathbf{B}$ uvedené níže mají podle věty 3.13 stejné lineární obaly. Tyto obaly tvoří podle věty 2.37 nějaký lineární podprostor lineárního prostoru $\mathbf{R}^5$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

Snadno ověříme, že řádky matice $\mathbf{B}$ jsou lineárně nezávislé. Takže tyto řádky tvoří bázi lineárního podprostoru $\langle \mathrm{r}\colon \mathbf{B} \rangle = \langle \mathrm{r}\colon \mathbf{A} \rangle$. Vidíme tedy, že $\dim \langle \mathrm{r}\colon \mathbf{A} \rangle = 3$.

39. Jak GEM slouží k výpočtu hodnosti matice? Popište metodu a zdůvodněte, proč tato metoda skutečně počítá hodnost matice.

(3.9; 3.10; 3.15; 3.17)
V základním stavu není hodnost matice na první pohled vidět, zatímco po úpravě GEM je hodnost jasná. Tato metoda vypočítá max počet lineárně nezávislých řádků matice= hodnost

Gaussova eliminacni metoda - pomoci ekvivalentnich uprav docilime konecneho stavu matice. mezi ekvivalentni upravy patri: necht A,B,C jsou matice "a" a "j" jsou skalary.

- 1) plati komutativnost A+B=B+A
- 2) asociativnost (A+B)+C=A+(B+C)
- 3) existence nuloveho prvku A+0=A
- 4) existence opacneho prvku A+(-1)A=0
- 5) nasobeni sklarem a jeho asociativnost a(jA)=(aj)A
- 6) existence jednotkoveho prvku 1A=A
- 7) distibutivnost a(A+B)=aA+aB, (a+j)A=aA+jA

//tyto pravidla akorat podle me dokazuji ze matice s operacemi + a . je LP, ale jim de asi spis o to vypsat upravy ktere jsou v GEM povoleny - prohozeni radku, vynasobeni radku skalarem a odecitani radku

GEM - touto metodou pomoci ekvivalentnich uprav se snazime docilit horniho trojuhelnikoveho tvaru matice.

Otazka je trochu nestastne formulovana, ale to co se tu chce je popis metody pocitani hodnosti matice a ne popis GEM (ta sama o sobe hodnost nepocita, protoze nic jako "konecny stav" matice neexistuje, muzeme udelat jeden krok nebo jich udelat nekonecno). Takze podle me by to melo byt spise takhle:

1.Hodnost matice je maximalni pocet LN radku. (Hodnost A = dim<r:A>) 2.Pomoci GEM (GEM zachovava <r:A>) prevedem matici na horni trojuhelnikovou, ktera ma vsechny radky LN, coz je jednoduche dokazat (ten dukaz bych tam napsal, neni slozity a mate jistotu, ze vam tam zkousejici nenapise zadnou otazku typu "proc?" :)).

Prvni vetu je treba tam napsat jako oduvodneni proc se vubec snazime matici prevest na horni trojuhelnikovou, GEM je uz pak jen prostredek jak ji dosahnout.

3.9. Definice. Symbolem $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ označujeme skutečnost, že matice $\mathbf{B}$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ konečným počtem kroků podle Gaussovy eliminační metody. Za krok Gaussovy eliminační metody je považováno prohození řádků, pronásobení řádku nenulovou konstantou, přičtení násobku řádku k jinému, odstranění nulového řádku nebo přidání nulového řádku.

3.10. Věta. Relace „$\sim$“ je symetrická, tj. $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ právě tehdy, když $\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$. *Symetrie relace „$\sim$“*

Důkaz. Stačí ukázat, že po provedení jednoho kroku podle Gaussovy eliminační metody se lze pomocí dalších kroků podle Gaussovy eliminační metody vrátit k původní matici.

(1) Prohození dvou libovolných řádků mezi sebou. Stačí prohodit tytéž řádky mezi sebou ještě jednou a máme původní matici.

(2) Vynásobení jednoho řádku nenulovým reálným číslem α. Stačí vynásobit tento řádek číslem $1/\alpha$ a dostáváme původní matici.

(3) Přičtení α-násobku nějakého řádku $\boldsymbol{a}$ k řádku $\boldsymbol{b}$ (řádek $\boldsymbol{a}$ se v tomto kroku opisuje). K původní matici se pak vrátíme tak, že k právě změněnému řádku přičteme $(-\alpha)$-násobek řádku $\boldsymbol{a}$.

(4) Vynechání nebo přidání nulového řádku. Jestliže nulový řádek při přechodu k matici $\mathbf{B}$ vynecháme, tak jej zas při návratu k matici $\mathbf{A}$ přidáme. Pokud jej při přechodu k matici $\mathbf{B}$ přidáme, pak jej při návratu k matici $\mathbf{A}$ odebereme.

3.15. Definice. *Hodnost matice* $\mathbf{A}$ (anglicky *rank*) značíme $\operatorname{hod}(\mathbf{A})$ a definujeme $\operatorname{hod}(\mathbf{A}) = \dim\langle \mathrm{r}\colon \mathbf{A}\rangle$. *Hodnost matice*

3.16. Příklad. Matice $\mathbf{A}$ z příkladu 3.14 má hodnost 3.

3.17. Věta. Je-li $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, pak $\operatorname{hod}(\mathbf{A}) = \operatorname{hod}(\mathbf{B})$. Jinými slovy, Gaussova eliminační metoda nemění hodnost matice.

Důkaz. Věta je jednoduchým důsledkem věty 3.13 a definice 3.15.

3.33. Věta. Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu (m, n). Pak $\operatorname{hod}(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.

Důkaz. Hodnost matice je menší nebo rovna počtu řádků z věty 3.18 a je menší nebo rovna počtu sloupců z věty 3.31.

3.18. Věta. Hodnost matice je maximální počet lineárně nezávislých řádků matice. Přesněji řečeno, hodnost udává počet prvků takové množiny řádků, která je nejpočetnější, a přitom lineárně nezávislá.

Důkaz. Jak jsme již řekli v poznámce 2.65, báze podprostoru $\langle \mathrm{r}\colon \mathbf{A}\rangle$ je nejpočetnější lineárně nezávislá množina. Tedy $\operatorname{hod}\mathbf{A} = \dim\langle \mathrm{r}\colon \mathbf{A}\rangle$ = počet prvků báze lineárního prostoru $\langle \mathrm{r}\colon \mathbf{A}\rangle$.

3.19. Poznámka. Například ve skriptech [7] je hodnost matice definována jako maximální počet lineárně nezávislých řádků matice. Pro důkaz věty 3.17 je v těchto skriptech vyvinuto poněkud větší úsilí, protože se tento důkaz neopírá o pojmy lineární obal a o výsledky z kapitoly 2.0.

40. Popište metodu ověření lineární závislosti vektorů z R^n eliminací matice, ve které jsou tyto vektory zapsány po řádcích. Jak tato metoda souvisí s definicí lineární závislosti?

(3.71)
radek ktery je nulovy ci je linearne zavisly muzeme vyradit (nechat pouze jeden). Po dokonceni GEM muzeme zapsat dle definice linearniho prostoru muzeme vektory prostoru polozit nule a pokud je pouze jedno trivialni reseni "o" pak je dokazana linearni nezavislost. α_1a1 + α_2a_2 + ... + α_na_n = σ

3.71. Cvičení. Dokažte, že pro ověření lineární nezávislosti vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ v $\mathbf{R}^n$ je možné použít následující metodu: Nechť $\mathbf{A}$ je matice, jejíž řádky jsou všechny vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$. Tyto vektory jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když hod $\mathbf{A} = k$, tedy když hodnost uvedené matice je rovna počtu jejích řádků.

3.71.[4] Řešení. Nechť nejprve hod $\mathbf{A} = k$. Tedy $\dim\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle = k$. Pak podle věty 2.64 (vlastnost 3) je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ lineárně nezávislá množina. Nechť nyní obráceně vektory $x_1, x_2, \ldots, x_k$ jsou LN. Pak je to báze svého lineárního obalu a nutně jeho dimenze je rovna k.

41. Definujte maticové násobení. Proč čtvercová matice A komutuje s A2?

(3.34; 3.40)
Definice: A, B jsou matice (A.B)ij = suma p od k=1 (Aik*Bkj) nejsem si zcela jist ale kratce bez prikladu ... pokud matice komutuji tak musi splnovat nasobeni A.B = B.A, kde pocet sloupcu a pocet radku by mel byt stejny. po vypocitani techto matic dostaneme matice typu n2 kde muzeme dojit k zaveru ze budeme volit nektere promene tak ze matice A.B bude komutovat s matici B.A.

Matice A komutuje s maticí A^2:

```
A * A^2 = A * (A * A) = A * A * A = (A * A) * A = A^2 * A
```

3.34. Definice. Nechť $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ je matice typu (m, n) a $\mathbf{B} = (b_{j,k})$ je matice typu (n, p). Pak je definován *součin matic* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (v tomto pořadí) jako matice typu (m, p) takto: každý prvek $c_{i,k}$ matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je dán vzorcem *Násobení matic*

$$c_{i,k} = a_{i,1}\, b_{1,k} + a_{i,2}\, b_{2,k} + \cdots + a_{i,n}\, b_{n,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{j,k}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \quad k \in \{1, \ldots, p\}. \tag{3.2}$$

3.35. Poznámka. Všimneme si, že násobení je definováno jen tehdy, pokud počet sloupců první matice je roven počtu řádků druhé matice. Výsledná matice má stejný počet řádků, jako první matice a stejný počet sloupců, jako druhá matice. Názorně:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \circ & \cdots & \circ \\ & & \cdots & \\ \circ & \circ & \cdots & \circ \end{pmatrix}}_{n} m \quad \cdot \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \cdots & \circ \\ & \cdots & \\ \circ & \cdots & \circ \end{pmatrix}}_{p} n \quad = \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \cdots & \circ \\ & \cdots & \\ \circ & \cdots & \circ \end{pmatrix}}_{p} m$$

Každý prvek matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ přitom musíme počítat podle vzorce (3.2) jako součet součinů odpovídajících prvků řádku první matice a sloupce druhé matice. Začátečníci mohou použít tzv. „dvouprstovou vizuální metodu“: při výpočtu čísla $c_{i,k}$ přiložte ukazováček levé ruky na začátek i-tého řádku první matice a ukazováček pravé ruky na začátek k-tého sloupce druhé matice. Pak pronásobte mezi sebou čísla, na která ukazují prsty, a výsledek uložte do sčítací paměti. Posuňte levý prst na další prvek v řádku a pravý prst na další prvek v sloupci. Znovu vynásobte a přičtěte výsledek ke sčítací paměti. Posunujte dále levý prst v řádku a pravý prst ve sloupci, násobte a sčítejte ve sčítací paměti tak dlouho, dokud nevyčerpáte celý řádek první matice. To se stane podle definice v okamžiku, kdy též vyčerpáte celý sloupec druhé matice. Výsledek sčítací paměti pak napište jako prvek $c_{i,k}$ do postupně budované výsledné matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

3.40. Příklad. Nechť je dána čtercová matice $\mathbf{A}$ typu (n,n). Pokud matice $\mathbf{B}$ splňuje rovnost $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, říkáme, že matice $\mathbf{B}$ *komutuje* s maticí $\mathbf{A}$. Ukážeme, že množina všech komutujících matic s danou maticí $\mathbf{A}$ tvoří lineární podprostor lineárního prostoru všech matic typu (n,n). *Komutující matice*

Především každá taková matice $\mathbf{B}$ musí mít stejný počet řádků jako matice $\mathbf{A}$ sloupců (aby bylo definováno $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$) a také musí mít stejný počet sloupců jako matice $\mathbf{A}$ řádků (aby bylo definováno $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$). To prakticky znamená, že matice $\mathbf{B}$ musí být také čtvercová, typu (n,n).

Podle definice 1.17 stačí ukázat, že pokud jsou $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ komutující matice s maticí $\mathbf{A}$ a $\alpha\in\mathbf{R}$, pak též $\mathbf{B}+\mathbf{C}$ a $\alpha\,\mathbf{B}$ jsou komutující matice. Předpokládejme tedy, že platí $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}$. V následujícím výpočtu použijeme věty 3.38, vzorce (2) až (4) a našeho předpokladu.

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{C}\cdot\mathbf{A} = (\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{A},$$
$$\mathbf{A}\cdot(\alpha\,\mathbf{B}) = \alpha\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \alpha\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}) = (\alpha\,\mathbf{B})\cdot\mathbf{A}.$$

3.41. Příklad. Najdeme bázi a dimenzi lineárního podprostoru M všech matic komutujících s maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Podle předchozího příkladu musejí být matice komutující s maticí $\mathbf{A}$ rovněž typu $(2,2)$. Předpokládejme, že matice $\mathbf{B}$ lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Jednotlivé součiny pak vypadají následovně

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}.$$

Tyto součiny se mají rovnat. Podle poznámky 3.2 se dvě matice rovnají, pokud se vzájemně rovnají všechny jejich odpovídající prvky. To nás vede ke čtyřem rovnicím o čtyřech neznámých, které upravíme Gaussovou elmininační metodou.

$$\begin{array}{rrrrl} & 3b & -2c & & =0 \\ 2a & +3b & & -2d & =0 \\ -3a & & -3c & +3d & =0 \\ & -3b & +2c & & =0 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{rrrl} 2a & +3b & -2d & =0 \\ & 3b & -2c & =0 \end{array}$$

Proměnné c a d můžeme volit libovolně. Uvedené dvě rovnice nám umožňují dopočítat proměnné b a a takto: $b = 2/3\,c$, $a = d-c$. Všechny matice, které komutují s maticí $\mathbf{A}$ jsou tedy určeny dvěma parametry:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} d-c & \frac{2}{3}c \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c\in\mathbf{R}, \quad .d\in\mathbf{R}.$$

Lineární prostor všech komutujících matic M se nám podařilo vyjádřit jako množinu všech lineárních kombinací dvou konstantních matic. Tuto skutečnost zapíšeme pomocí lineárního obalu takto:

$$M = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Poslední úpravu (pronásobení první matice třemi) jsme nemuseli dělat, pokud se spokojíme se zlomkem ve výsledku. V modelových příkladech se dosti často snažíme dostat výsledek vyjádřitelný v malých celých číslech. Není to samozřejmě naší povinností, pouze pak výsledek lépe vypadá a nás více potěší.

Protože poslední dvě uvedené matice jsou lineárně nezávislé (to snadno zjistíme) a jejich lineární obal je celý podprostor M, máme výsledek:

$$\text{Báze } M = \left\{ \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{tj. } \dim M = 2.$$

42. Dokažte asociativitu maticového násobení.

(3.38 -1)
mejme matice A typu n,m B m,p a matici C k,p A.B.C=(AB).C=A(BC) ale to neznamena ze mohu nasibut matici A.C matice maji ruzny pocet radku i sloupcu.

dukaz se provadi obecnym vyjadrenim matic sumy radku a sloupcu kde ziskame dukaz toho ze soucet radku v jedne matice(A.B=AB) se rovna souctu radku i druhe matice (B.C=BC)

43. Dokažte asociativitu maticového násobení a maticového násobku.

(3.38 -1,3)
viz 42. maticový násobek - pokud jsem do dobre pochopil tak je to matice nasobena skalarem dukaz je zrejmy z linearni zavislosti radku

myslim ze jde o dukaz asociativity maticoveho nasobku, tj. veta 3.38 (4) alfa*(A*B)=A*(alfa*B)....důkaz je hned pod větou ve skriptech

3.38. Věta. Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$ a matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ jsou odpovídajících typů tak, aby níže uvedené součiny a součty byly definovány. Pak platí

(1) $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$ (asociativní zákon),
(2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ (distributivní zákon),
(3) $\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}$ (distributivní zákon),
(4) $\alpha(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\alpha\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(\alpha\,\mathbf{B})$,
(5) $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T$.

Důkaz. Jako cvičení doplňte ke každému vzorci věty předpoklady o typech matic. Tyto předpoklady se budou pro různé vzorce lišit. V tomto důkazu předpokládáme typy matic (m,n), (n,p) a (p,q).

(1) Označme $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, $\mathbf{B} = (b_{j,k})$, $\mathbf{C} = (c_{k,l})$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (d_{i,k})$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} = (f_{j,l})$, $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = (g_{i,l})$, $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) = (h_{i,l})$ pro $i \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, $k \in \{1,\dots,p\}$, $l \in \{1,\dots,q\}$. Jde o to ukázat, že $g_{i,l} = h_{i,l}$ pro všechna $i \in \{1,\dots,m\}$ a $l \in \{1,\dots,q\}$. Podle definice 3.34 je

$$d_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,b_{j,k}, \qquad f_{j,l} = \sum_{k=1}^{p} b_{j,k}\,c_{k,l},$$

takže platí

$$g_{i,l} = \sum_{k=1}^{p} d_{i,k}\,c_{k,l} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,b_{j,k}\right)c_{k,l} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,b_{j,k}\,c_{k,l}\right) = X,$$

$$h_{i,l} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,f_{j,l} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{j,k}\,c_{k,l}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,j}\,b_{j,k}\,c_{k,l}\right) = Y.$$

Vysvětlíme si, proč platí $X = Y$. Volme i, l pevná. Součiny $a_{i,j}\cdot b_{j,k}\cdot c_{k,l}$ můžeme zapsat do tabulky, ve které index j odpovídá řádku tabulky a index k sloupci. Hodnota X pak znamená součet sloupcových mezisoučtů v tabulce a hodnota Y součet řádkových mezisoučtů. Každá účetní ví, že obě hodnoty musí dát stejný výsledek. My ostatní to snadno nahlédneme.

(2) Označme $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, $\mathbf{B} = (b_{i,j})$, $\mathbf{C} = (c_{j,k})$, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = (d_{i,k})$ pro $i \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, $k \in \{1,\dots,p\}$. Pak podle definic 3.34 a 3.3 platí

$$d_{i,k} = \sum_{j=1}^{n}(a_{i,j}+b_{i,j})\,c_{j,k} = \sum_{j=1}^{n}(a_{i,j}\,c_{j,k}+b_{i,j}\,c_{j,k}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,c_{j,k} + \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}\,c_{j,k},$$

což odpovídá prvkům matice $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$.

(3) Důkaz bychom provedli obdobně, jako v případě (2).

(4) Označme $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, $\mathbf{B} = (b_{j,k})$ pro $i \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, $k \in \{1,\dots,p\}$. Platí

$$\alpha\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,b_{j,k} = \sum_{j=1}^{n}\alpha\,a_{i,j}\,b_{j,k} = \sum_{j=1}^{n}(\alpha\,a_{i,j})\,b_{j,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,(\alpha\,b_{j,k}),$$

což dokazuje vzorec: (4).

(5) Označíme $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, $\mathbf{B} = (b_{j,k})$, $\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (c_{i,k})$, $i \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, $k \in \{1,\dots,p\}$. Je tedy $\mathbf{A}^T = (\alpha_{j,i})$, $\mathbf{B}^T = (\beta_{k,j})$, kde $\alpha_{j,i} = a_{i,j}$, $\beta_{k,j} = b_{j,k}$. Označme ještě součin $\mathbf{D} = \mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T = (d_{k,i})$. Podle definice násobení je

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,b_{j,k} = \sum_{j=1}^{n}\beta_{k,j}\,\alpha_{j,i} = d_{k,i},$$

takže $\mathbf{D}^T = \mathbf{C}$, což dokazuje vzorec (5).

44. Zdůvodněte, proč maticové násobení nemusí být komutativní ani pro čtvercové matice.

(3.37)
viz to co jsem definoval v otazce cislo 41.

3.37. Příklad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Tento příklad ilustruje, že násobení matic obecně nesplňuje komutativní zákon ani pro čtvercové matice, tj. existují matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, pro které neplatí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Pokud některá z matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ není čtercová, pak součin $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ nemusí být vůbec definován, přestože součin $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ definován je.

Příklad dále ukazuje, že není splněna ani vlastnost nuly, na kterou jsme zvyklí při násobení reálných čísel: je-li $a \neq 0$, $b \neq 0$, pak $ab \neq 0$. V příkladu násobíme dvě nenulové matice, a přitom dostáváme matici nulovou.

Musíme si z toho odnést ponaučení, že násobení matic nesplňuje všechny vlastnosti, na které jsme zvyklí, a proto při úpravách vzorců obsahujících násobení matic si musíme dát pozor, co můžeme v dané situaci udělat.

Nabízí se přirozená otázka, zda násobení matic splňuje aspoň nějaké zákony, na které jsme zvyklí (jinak by bylo skoro zbytečné tuto operaci nazývat násobením). Následující věta ukazuje, že násobení matic je asociativní a také distributivní vzhledem ke sčítání matic.

45. Proč má horní trojúhelníková matice linárně nezávislé řádky?

(3.22)
protoze jsme ekvivalentnimi upravami viz co jsem zminil nahore dosli k nezavislosti radkum - vypusteni nuloveho radku ci vypusteni stejneho radku. a samozrejme dle definice hodnosti hodnost nam definuje matici v konecnem stavu po GEM (radky jsou nezavisle).

Trojúhelníkové matice

3.20. Poznámka. Matice $\mathbf{B}$ v příkladu 3.14 je typickou ukázkou matice, která vznikne po ukončení přímého chodu Gaussovy eliminační metody. Jedná se o matici, ve které každý následující řádek má aspoň o jednu nulu v souvislé řadě nul (psané z leva) více, než řádek předchozí. Přitom matice neobsahuje nulové řádky. Takovým maticím budeme říkat horní trojúhelníkové (nenulové prvky jsou jen v „pásmu horního trojúhelníka“).

3.21. Definice. Nechť matice $\mathbf{A}$ má řádky $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ a nechť žádný z nich není nulový. Nechť pro každé dva po sobě jdoucí řádky $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{a}_{i+1}$ platí: má-li řádek $\boldsymbol{a}_i$ prvních k složek nulových, musí mít řádek $\boldsymbol{a}_{i+1}$ aspoň prvních $k+1$ složek nulových. Pak matici $\mathbf{A}$ nazýváme *horní trojúhelníkovou maticí*.

3.22. Věta. Horní trojúhelníková matice má vždy lineárně nezávislé řádky.

Důkaz. Lineární nezávislost ověříme z definice. Nechť matice $\mathbf{A}$ má řádky $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ a položme

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}.$$

Po převedení této rovnosti do soustavy rovnic odpovídají koeficienty jednotlivých rovnic sloupcům matice $\mathbf{A}$. Přitom tato soustava má vždy pouze triviální řešení. Z první nenulové rovnice totiž okamžitě plyne, že $\alpha_1 = 0$. Dosazením tohoto výsledku do ostatních rovnic dostaneme z některé z následujících rovnic výsledek $\alpha_2 = 0$. Znovu dosadíme. Tento postup opakujeme tak dlouho, dokud nedostaneme $\alpha_i = 0 \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

46. Zdůvodněte, proč matice komutující s pevně danou maticí tvoří lineární podprostor.

Matice A,B komutuji prave tehdy kdyz splnuji pravidla distibutivnosti a komutativnosti matic, nasobku

// musime proste dokazat, ze pokud matice B1 a B2 jsou komutujici s A, tak matice C=(B1+B2) a matice D=a*B1 (kde a je skalar) jsou take komutujici s A. Tim dokazeme dve postacujici vlastnosti z definice linearniho podprostoru a jsme hotovi. (dokazuje se prostym dosazenim do rovnice AB=BA)

```
Nechť B, C jsou matice komutující s maticí A (čili platí AB=BA a AC=CA), α je reálný koeficient
Dokážu pravidla podprostoru - sčítání dvou matic a násobení matice skalárem:
1) A * (B+C) = A*B + A*C = B*A + C*A = (B+C) * A
2) A * α*B = α * (A*B) = α * (B*A) = α*B * A
```

47. Proč je součin regulárních matic regulární?

(3.52)
Mejme matice A,B kde matice A je typu (m,n) a matice B je typu (n,p) tyto matice jsou regularni prave tehdy pokud => m=n a n=p vzhledem k nasobeni techto dvou matic vznikne matice C ktera je typu (m,p), vzhledem k uvedene rovnosti vyse z toho nutne vyplyva ze m=p z definice regularity matice => matice typu C je regularni a ma hodnost m(p)

//tohle je podle mě zcela nedostačující, taková matice by mohla bejt klidně i singulární. My musíme dokázat, že pokud k A,B existuje inverzni A,B, tak musi existovat i A^-1*B^-1. Potom je teprve výsledná matice také regulární. // tohle je spravna odpoved, viz. veta 3.52 a jeji dukaz

//a neslo by to dokazat pres determinant..?regularni matice ma det!=0 , determinant soucinu je soucin determinantu, takze soucin dvou nenulovych cisel da nejake nenulove cislo=>det vysledne matice je ruzny od nuly, takze matice je regularni..

Regulární, singulární matice

3.51. Definice. Čtvercová matice $\mathbf{A}$ typu (n,n) se nazývá *regulární*, pokud $\hod(\mathbf{A}) = n$. Čtvercová matice $\mathbf{A}$ se nazývá *singulární*, pokud není regulární, tj. $\hod(\mathbf{A}) < n$.

3.52. Věta. Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou regulární čtvercové matice typu (n,n). Pak matice $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ je rovněž regulární matice typu (n,n).

Důkaz. Matice $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ je čtvercová typu (n,n). To plyne přímo z definice maticového součinu. Stačí tedy dokázat, že je regulární. Podle věty 3.50 je matice regulární právě tehdy, když k ní existuje inverzní matice. Podle předpokladu k matici $\mathbf{A}$ existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ a k matici $\mathbf{B}$ existuje inverzní matice $\mathbf{B}^{-1}$. Stačí ukázat, že existuje inverzní matice k matici $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. Hledaná inverzní matice je tvaru $\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}$, protože:

$$(\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1})\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{B}^{-1}\cdot(\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{E},$$
$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot(\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{-1})\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}.$$

48. Čím je zaručena jednoznačnost inverzní matice?

(3.49)
pokud by měla matice A dvě invezrní matice B a C pak B = B.E = B.(A.C) = (B.A).C = E.C=C

Inverzní matice

3.47. Poznámka. V definici 3.44 jsme zavedli jednotkovou matici s podobnými vlastnostmi, jako má reálné číslo 1. Vraťme se znovu ke srovnání s reálnými čísly. Pro každé nenulové reálné číslo a existuje reálné číslo b takové, že $ab = 1$. Takové reálné číslo obvykle nazýváme převrácenou hodnotou čísla a a označujeme $1/a$ nebo též a^{-1}. Analogicky definujeme „převrácenou hodnotu matice", tzv. inverzní matici.

3.48. Definice. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice typu (n,n) a $\mathbf{E}$ je jednotková matice stejného typu. Matici $\mathbf{B}$ typu (n,n), která splňuje vlastnost $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{E} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ nazýváme *inverzní maticí* k matici $\mathbf{A}$. Inverzní matici k matici $\mathbf{A}$ označujeme symbolem $\mathbf{A}^{-1}$.

3.49. Věta. Pokud k matici $\mathbf{A}$ existuje inverzní matice, pak je tato inverzní matice jednoznačně určena.

Důkaz. Nechť má čtvercová matice $\mathbf{A}$ dvě inverzní matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$. Ukážeme, že pak $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Platí:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{C} = \mathbf{C}.$$

Zde jsme po řadě využili: poznámku 3.45, vlastnost, že $\mathbf{C}$ je inverzní matice k $\mathbf{A}$, vlastnost (1) z věty 3.38, vlastnost, že $\mathbf{B}$ je inverzní matice k $\mathbf{A}$, a konečně znovu poznámku 3.45.

3.50. Věta. Ke čtvercové matici typu (n,n) existuje inverzní matice právě tehdy, když $\hod(\mathbf{A}) = n$.

Důkaz. Důkaz této věty přesuneme až do příští kapitoly o determinantech. Věta ukazuje, že matice, které mají hodnost rovnu počtu řádků (tj. podle věty 3.18 jsou všechny řádky lineárně nezávislé) mají inverzní matici. Pokud jsou řádky lineárně závislé, inverzní matice neexistuje. Můžeme tedy říci, že pokud jsou řádky ve čtvercové matici lineárně závislé, je matice z hlediska maticového násobení „skoro nulová" v tom smyslu, že k ní neexistuje inverzní matice (podobně jako k reálnému číslu nula neexistuje převrácená hodnota). To nás inspiruje k následující definici.

49. Popište metodu výpočtu inverzní matice eliminací a zdůvodněte, proč tato metoda skutečně dává inverzní matici.

(3.55; 3.56)
mejme matici typu A tuto matici polozime rovno jednotkove matici po uprave matice A na dolni a horni trojuhelnikovy tvar nasledne vydelenim ztiskame jednotkovou matici. - postup. proc dava matice A polozena jednotkove matici inverzni matici? protoze vsechny provedene operace jsou muzeme prevest na typ matic cilize po prvnim kroku je matice A1 pak A2 ... kazda z techto matic (jsou regularni) ma za sebou nejakou elementarni upravu ktera je rovna definovanym operacim vyse.

Výpočet inverzní matice eliminací

3.53. Příklad. Nejprve na jednoduchém příkladu ukážeme obvyklý postup hledání inverzní matice k dané matici $\mathbf{A}$. Teprve pak dokážeme, že tento postup je oprávněný a vždy vede k inverzní matici.

Naším úkolem bude najít inverzní matici k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vedle prvků matice $\mathbf{A}$ napíšeme prvky jednotkové matice stejného typu (oddělíme od sebe pro přehlednost svislou čarou) a dále použijeme řádkové úpravy Gaussovy eliminační metody na matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ jako celek. To znamená, že pracujeme s řádky délky $2n$, v našem konkrétním případě s řádky o šesti prvcích. Při eliminaci se snažíme vlevo od svislé čáry dostat postupně jednotkovou matici.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right), \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tvrdíme, že hledaná inverzní matice k matici $\mathbf{A}$ je zapsána vpravo od svislé čáry v poslední úpravě. Přesněji, pokud $(\mathbf{A}|\mathbf{E}) \sim (\mathbf{E}|\mathbf{B})$, kde „$\sim$“ znamená konečně mnoho řádkových úprav matice podle Gaussovy eliminační metody, pak $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Zvídavý student se oprávněně ptá, proč tato metoda dává inverzní matici. Než si na to odpovíme, budeme muset propočítat následující příklad a dokázat dvě následující věty.

3.55. Věta. Nechť $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ jsou dvě matice, přičemž v eliminaci označené zde symbolem „$\sim$“ nebyl použit krok vynechání nebo přidání nulového řádku. Pak existuje regulární čtvercová matice $\mathbf{P}$ taková, že $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$.

Důkaz. Pro jednotlivé kroky Gaussovy eliminační metody jsme našli odpovídající čtvercové matice v příkladu 3.54. Vznikla-li matice $\mathbf{B}$ po k krocích Gaussovy eliminační metody, pak zřejmě existují matice $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_k$ (každá z nich je některého ze tří typů podle příkladu 3.54) takové, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_k \cdot (\mathbf{C}_{k-1} \cdots (\mathbf{C}_2 \cdot (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{A})) \cdots) = (\mathbf{C}_k \cdot \mathbf{C}_{k-1} \cdots \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}.$$

Zde jsme využili asociativního zákona pro násobení matic z věty 3.38.

Výsledná matice $\mathbf{P}$ je regulární, protože všechny matice $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_k$ jsou regulární (mají lineárně nezávislé řádky) a součin regulárních matic je regulární podle věty 3.52.

3.56. Věta. Nechť $\mathbf{A}$ je regulární a $(\mathbf{A}|\mathbf{E}) \sim (\mathbf{E}|\mathbf{B})$, kde „$\sim$“ označuje konečný počet řádkových úprav podle eliminační metody a $\mathbf{E}$ jednotkovou matici. Pak $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Důkaz. Podle věty 3.55 existuje čtvercová matice $\mathbf{P}$ taková, že $(A|E) \sim (E|B) = (P \cdot A | P \cdot E)$

Protože $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$, je matice $\mathbf{P}$ inverzní maticí k matici $\mathbf{A}$. Protože $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}$, je matice $\mathbf{B}$ přímo rovna matici $\mathbf{P}$, tedy inverzní matici k matici $\mathbf{A}$.

Pozorný čtenář by měl v tuto chvíli namítnout: proč je $\mathbf{P}$ inverzní matice k $\mathbf{A}$, když víme pouze, že $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$, ale nevíme, jestli $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{E}$? Tento vzorec ale z existence inverzní matice pro regulární matici $\mathbf{A}$ plyne z prvního. Nechť $\mathbf{A}^{-1}$ je inverzní matice k matici $\mathbf{A}$ a nechť platí $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$. Vynásobíme nyní obě strany rovnice maticí $\mathbf{A}^{-1}$ zprava:

$$(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}^{-1}, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{P} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}^{-1}, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}.$$

3.57. Poznámka. Všimněme si, že metoda hledání inverzních matic, popsaná v příkladu 3.53 a dokázaná ve větě 3.56 nám mimochodem umožní odpovědět i na otázku, zda vůbec inverzní matice k dané matici $\mathbf{A}$ existuje. Pokud zapíšeme $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ a na konci přímého chodu Gaussovy eliminační metody zjistíme, že v poli vlevo od svislé čáry máme nulový řádek, pak podle věty 3.17 víme, že $\mathbf{A}$ je singulární. Věta 3.50 nám říká, že inverzní matice neexistuje, takže nemá smysl dál počítat.

50. Vynásobíme-li matici A regulární maticí, pak se matice A může změnit, ale nezmění se její hodnost. Proč?

laicky: protoze vysledna matice bude mit m nezavislych radku jako matice typu A a pocet nezavislych radku se rovna hodnosti matce

Hodnost součinu matic

3.60. Věta. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná matice (ne nutně čtvercová) a $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ jsou regulární matice takové, že je definováno násobení $\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}$. Pak $\operatorname{hod}\mathbf{A} = \operatorname{hod}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}) = \operatorname{hod}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q})$. Jinými slovy: násobení regulární maticí nemění hodnost.

Důkaz. Označme $\mathbf{B} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{A}$. Sestavíme matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ a budeme ji eliminovat, abychom vpravo od čáry získali matici $\mathbf{P}$, tj. podle věty 3.55 dostáváme $(\mathbf{A}|\mathbf{E}) \sim (\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\,|\,\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}) = (\mathbf{B}|\mathbf{P})$. Protože $\mathbf{P}$ je regulární, takovou eliminaci lze určitě provést. Kdo tomu nevěří, může eliminovat „pozpátku“ od matice $\mathbf{P}$ k matici $\mathbf{E}$ a použít pak větu 3.10. Proveďme nakonec tutéž eliminaci znovu, jen s maticemi vlevo od svislé čáry: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$. Protože Gaussova eliminace zachovává hodnost (věta 3.17), je $\operatorname{hod}\mathbf{A} = \operatorname{hod}\mathbf{B} = \operatorname{hod}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{A})$.

K důkazu $\operatorname{hod}\mathbf{A} = \operatorname{hod}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q})$ stačí podle (5) věty 3.38 přejít k transponovaným maticím a použít předchozí výsledek společně s větou 3.31: $\operatorname{hod}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}) = \operatorname{hod}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q})^T = \operatorname{hod}(\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{A}^T) = \operatorname{hod}\mathbf{A}^T = \operatorname{hod}\mathbf{A}$.

3.61. Věta. Je-li $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ definováno, pak $\operatorname{hod}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \le \min(\operatorname{hod}\mathbf{A}, \operatorname{hod}\mathbf{B})$.

Důkaz. Je-li $h = \operatorname{hod}\mathbf{A}$, pak lze provést eliminaci $\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$ takovou, že matice $\mathbf{C}$ má prvních h řádků nenulových a zbylé řádky nulové. Podle věty 3.55 existuje regulární $\mathbf{P}$ taková, že $\mathbf{A} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{C}$. Na levé straně dokazované nerovnosti tedy máme $\operatorname{hod}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \operatorname{hod}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}) = \operatorname{hod}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B})$. V poslední úpravě jsme použili větu 3.60. Nyní je potřeba si uvědomit, že díky nulovým řádkům matice $\mathbf{C}$ má matice $\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}$ pod h-tým řádkem všechny ostatní řádky nulové. Takže $\operatorname{hod}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}) \le h = \operatorname{hod}\mathbf{A}$. Dostáváme výsledek $\operatorname{hod}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \le \operatorname{hod}\mathbf{A}$. Přejdeme nyní k maticím transponovaným $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T$. Znovu použijeme právě dokázaný výsledek a větu 3.31: $\operatorname{hod}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \operatorname{hod}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T = \operatorname{hod}(\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T) \le \operatorname{hod}\mathbf{B}^T = \operatorname{hod}\mathbf{B}$. Protože $\operatorname{hod}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ je menší nebo rovna $\operatorname{hod}\mathbf{A}$ i $\operatorname{hod}\mathbf{B}$, musí být menší nebo rovna minimu těchto hodnot.

51. Co víme o hodnosti součinu matic, když známe hodnosti jednotlivých činitelů? Zdůvodněte.

3.61

Transponovaná matice

3.28. Definice. Nechť $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ je matice typu (m,n). Matici $\mathbf{A}^T = (a_{j,i})$, která je typu (n,m), nazýváme *transponovanou maticí* k matici $\mathbf{A}$. Matice $\mathbf{A}^T$ tedy vznikne z matice $\mathbf{A}$ přepsáním řádků matice $\mathbf{A}$ do sloupců matice $\mathbf{A}^T$, respektive přepsáním sloupců matice $\mathbf{A}$ do řádků matice $\mathbf{A}^T$.

3.29. Příklad.

$$\text{Je-li třeba } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{pak je } \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

3.30. Věta. Pro každou matici $\mathbf{A}$ platí: $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

3.31. Věta. Pro každou matici $\mathbf{A}$ platí: $\operatorname{hod}(\mathbf{A}^T) = \operatorname{hod}(\mathbf{A})$.

Jednotková matice

3.44. Definice. Čtvercovou matici $\mathbf{E}$ typu (n,n) nazýváme *jednotkovou maticí*, pokud pro její prvky $e_{i,j}$ platí: $e_{i,j} = 0$ pro $i \neq j$ a $e_{i,j} = 1$ pro $i = j$. Názorně:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

3.45. Poznámka. Z definice maticového násobení okamžitě plyne, že pro každou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ typu (n,n) je $\mathbf{E}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{A}$. Jednotková matice má tedy stejnou vlastnost vzhledem k násobení, jako jednička při násobení reálných čísel. Pro reálná čísla taky platí, že $1\cdot a = a\cdot 1 = a$.

Všimneme si také, že jednotková matice je komutující s každou čtvercovou maticí.