Konečná dimenze

65. Definujte pojem souřadnice vzhledem k uspořádané bázi. Zdůvodněte existenci a jednoznačnost souřadnic.

definice 6.10, poznamka 6.11 a veta 6.12.

```
Nechť B = {b1, b2, ... bn} je uspořádaná báze a 'x' je libovolný vektor prostoru L.
Uspořádanou n-tici reálných čísel (α1, α2,... αn) nazýváme souřadnicemi vektoru x vzhledem k uspořádar
x = α1b1 + α2b2 + ... + αnb
```

Souřadnice vektoru

6.8. Definice. Nechť $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ je báze lineárního prostoru L. Záleží-li nám na pořadí prvků báze $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ (tj. požadujeme, aby $\boldsymbol{b}_1$ byl první prvek báze, $\boldsymbol{b}_2$ druhý prvek atd.), pak mluvíme o *uspořádané bázi*. Uspořádaná báze je tedy uspořádaná n-tice prvků báze, tj. $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$. Skutečnost, že báze B je uspořádaná, budeme vyznačovat symbolem (B).

6.9. Poznámka. Uspořádanou bázi máme definovánu jen pro lineární prostory konečné dimenze. Ačkoli tedy v dalším textu nebude tato skutečnost výslovně uvedena, všude tam, kde se mluví o uspořádaných bázích, máme na mysli lineární prostor konečné dimenze.

6.10. Definice. Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je uspořádaná báze lineárního prostoru L a $\boldsymbol{x} \in L$ je libovolný vektor. Uspořádanou n-tici reálných čísel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ nazýváme *souřadnicemi vektoru $\boldsymbol{x}$ vzhledem k uspořádané bázi (B)*, pokud platí

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n.$$

Skutečnost, že $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ jsou souřadnice vektoru $\boldsymbol{x}$ vzhledem k uspořádané bázi (B) budeme zapisovat takto:

$$\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{(B)}.$$

Existence a jednoznačnost souřadnic

6.11. Poznámka. Nechť B je báze lineárního prostoru L. Protože $\langle B \rangle = L$, je každý prvek $\boldsymbol{x}$ lineární kombinací prvků báze a tudíž každý prvek $\boldsymbol{x}$ má nějaké souřadnice vzhledem k uspořádané bázi (B). Následující věta ukazuje, že jsou tyto souřadnice určeny uspořádanou bází (B) jednoznačně.

6.12. Věta. Nechť (B) je uspořádaná báze lineárního porostoru L. Pak pro každý prvek $\boldsymbol{x} \in L$ jsou souřadnice $\boldsymbol{x}$ vzhledem k bázi (B) určeny jednoznačně.

Důkaz. Označme $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$. Nechť $\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{(B)} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)_{(B)}$. Ukážeme, že pak je $\alpha_i = \beta_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Podle definice 6.10 je

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n, \qquad \boldsymbol{x} = \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{b}_n.$$

Odečtením těchto rovností dostáváme

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} = (\alpha_1 - \beta_1)\, \boldsymbol{b}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\, \boldsymbol{b}_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\, \boldsymbol{b}_n.$$

Protože vektory báze $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ jsou lineárně nezávislé, pouze triviální lineární kombinace může být rovna nulovému vektoru. Všechny koeficienty uvedené lineární kombinace musejí tedy být rovny nule. Tím dostáváme $\alpha_i = \beta_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

6.13. Věta. Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je uspořádaná báze lineárního prostoru L. Pak pro každý prvek $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, existuje $\boldsymbol{x} \in L$ takový, že $\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{(B)}$.

Důkaz. Stačí volit $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n$.

66. Proč jsou souřadnice polynomu vzhledem ke standardní bázi lin. prostoru polynomů nejvýše n-tého stupně rovny koeficientům tohoto polynomu?

(6.16)
podle mne je to blba otazka, jinak odpoved' plyne primo z definice 6.10

6.16. Příklad. Uvažujme stejný lineární prostor L jako v předchozím příkladě a v něm stejný polynom $p \in L$, $p(x) = 2x^3 + x^2 - 3x$. Vzhledem ke standardní uspořádané bázi $B_0 = (1, x, x^2, x^3)$ má polynom souřadnice shodné se svými koeficienty, tedy

$$p = (0, -3, 1, 2)_{(B_0)}.$$

Platí totiž $p(x) = 0 \cdot 1 + (-3) \cdot x + 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3$.

67. Proč jsou souřadnice vektoru z Rn vzhledem ke standardní bázi rovny složkám tohoto vektoru?

koukněte se na definici souřadnic vzhledem k uspořádané bázi (6.10) a hned potom na samotnou definici standartní báze v R^n (2.46), jen dosate do sebe a je to.

6.10. Definice. Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je uspořádaná báze lineárního prostoru L a $\boldsymbol{x} \in L$ je libovolný vektor. Uspořádanou n-tici reálných čísel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ nazýváme *souřadnicemi vektoru $\boldsymbol{x}$ vzhledem k uspořádané bázi (B)*, pokud platí

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n.$$

Skutečnost, že $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ jsou souřadnice vektoru $\boldsymbol{x}$ vzhledem k uspořádané bázi (B) budeme zapisovat takto:

$$\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{(B)}.$$

2.46. Příklad. Množina uspořádaných n-tic $B = \{(1,0,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,0,0,\ldots,0,1)\}$ tvoří bázi lineárního prostoru $\mathbf{R}^n$. Je lineárně nezávislá a platí $\langle B \rangle = \mathbf{R}^n$ z analogických důvodů, jako v příkladu 2.45. Takovou bázi lineárního prostoru $\mathbf{R}^n$ nazýváme *standardní bází*.

68. Proč je zobrazení, které vektorům přiřadí uspořádanou n-tici jejich souřadnic vzhledem k pevně zvolené bázi, lineární?

popsano v priklade 7.25.

7.25. Příklad. Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je uspořádaná báze lineárního prostoru L. Uvažujme zobrazení $\mathcal{A}\colon L \to \mathbf{R}^n$ definované takto *Souřadnice jako lineární zobrazení*

$$\text{nechť} \quad \boldsymbol{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{(B)}, \qquad \text{pak} \quad \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Ukážeme, že toto zobrazení je lineární a že $\operatorname{def} \mathcal{A} = 0$, $\operatorname{hod} \mathcal{A} = n$.

Nechť $\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{(B)}$, $\boldsymbol{y} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)_{(B)}$. Pro tyto vektory tedy platí

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n, \qquad \boldsymbol{y} = \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{b}_n.$$

Po sečtení těchto rovností a po vynásobení první rovnosti číslem $\gamma \in \mathbf{R}$ dostáváme

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\alpha_1 + \beta_1)\boldsymbol{b}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\boldsymbol{b}_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\boldsymbol{b}_n,$$
$$\gamma \boldsymbol{x} = (\gamma \alpha_1)\boldsymbol{b}_1 + (\gamma \alpha_2)\boldsymbol{b}_2 + \cdots + (\gamma \alpha_n)\boldsymbol{b}_n.$$

Protože souřadnice vektoru vzhledem k bázi jsou určeny jednoznačně, z uvedených rovností plyne, že $\mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$, $\mathcal{A}(\gamma \boldsymbol{x}) = \gamma \mathcal{A}(\boldsymbol{x})$. Zobrazení $\mathcal{A}$ je tedy lineární.

Hledejme nyní $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Z jednoznačnosti souřadnic vzhledem k bázi plyne, že existuje jediný vektor $\boldsymbol{x} = (0,0,\ldots,0)_{(B)}$. Protože $\boldsymbol{o} = 0\boldsymbol{b}_1 + 0\boldsymbol{b}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{b}_n$, je $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\boldsymbol{o}\}$ a $\operatorname{def} \mathcal{A} = 0$.

Protože ke každému prvku $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ existuje $\boldsymbol{x} \in L$, pro který $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$ (stačí volit $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n$), je $\mathcal{A}(L) = \mathbf{R}^n$. Zobrazení $\mathcal{A}$ je tedy zobrazením z L „na“ $\mathbf{R}^n$. Je $\operatorname{hod} \mathcal{A} = \dim \mathbf{R}^n = n$.

69. Definujte spojení dvou podprostorů. Čemu je rovnen součet dimenzí spojení a průniku dvou podprostorů?

6.3. Definice. Nechť L je lineární prostor, M a N jsou jeho podprostory. Množinu $\langle M \cup N \rangle$ nazýváme *spojením podprostorů M a N* a značíme $M \vee N$. *Spojení prostorů*

6.4. Poznámka. Podle věty 2.38 je $M \vee N$ nejmenší podprostor, který obsahuje všechny prvky z M i N dohromady.

6.5. Věta. Nechť L je lineární prostor, M a N jsou jeho podprostory. Pro podprostor $M \vee N$ platí:

$$M \vee N = \{\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z};\ \boldsymbol{y} \in M,\ \boldsymbol{z} \in N\}.$$

Důkaz. Je-li $\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z};\ \boldsymbol{y} \in M, \boldsymbol{z} \in N\}$, tj. $\boldsymbol{x}$ se dá rozepsat na součet prvku z M a prvku z N, pak podle definice lineárního obalu je $\boldsymbol{x} \in \langle M \cup N\rangle = M \vee N$. To dokazuje inkluzi $\{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z};\ \boldsymbol{y} \in M, \boldsymbol{z} \in N\} \subseteq M \vee N$.

Je-li $\boldsymbol{x} \in M \vee N = \langle M \cup N\rangle$, pak podle definice lineárního obalu existuje konečně mnoho prvků z M a konečně mnoho prvků z N takových, že $\boldsymbol{x}$ je lineární kombinací těchto prvků. Tuto lineární kombinaci rozdělíme na součet násobků prvků z M a součet násobků ostatních prvků (tedy prvků z N). První součet označíme $\boldsymbol{y}$ a druhý $\boldsymbol{z}$. Protože M a N jsou podprostory, je podle věty 2.37 $\langle M\rangle = M$, $\langle N\rangle = N$, takže lineární kombinace prvků z M leží v M a podobně pro N. Máme tedy $\boldsymbol{y} \in M$, $\boldsymbol{z} \in N$. Protože $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, je $\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z};\ \boldsymbol{y} \in M, \boldsymbol{z} \in N\}$. To dokazuje obrácenou inkluzi.

6.6. Věta. Nechť L je lineární prostor konečné dimenze, M a N jsou jeho podprostory. Pak

Dimenze průniku a spojení

$$\dim M + \dim N = \dim(M \cap N) + \dim(M \vee N).$$

Důkaz (pro hloubavé čtenáře). Nechť $\dim M = m$, $\dim N = n$, $\dim(M \cap N) = k$. Nechť $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ je báze podprostoru $M \cap N$. Vzhledem k tomu, že $M \cap N \subseteq M$, lze lineárně nezávislé vektory $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ doplnit o další prvky, aby dohromady tvořily bázi v M. Viz větu 2.51. Podobně lze doplnit $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ o další prvky, aby tvořily bázi v N. Máme tedy

$$\begin{array}{ll} \text{báze } M \cap N: & \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k\}, \\ \text{báze } M: & \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{c}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_m\}, \\ \text{báze } N: & \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{d}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{d}_n\}. \end{array}$$

Za této situace je množina $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{c}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_m, \boldsymbol{d}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{d}_n\}$ bází podprostoru $M \vee N$. Zdůvodníme proč.

Ukážeme nejdříve, že $\langle B\rangle = M \vee N$. Protože $B \subseteq M \cup N$, je $\langle B\rangle \subseteq \langle M \cup N\rangle = M \vee N$. Nyní ukážeme obrácenou inkluzi. Je-li $\boldsymbol{x} \in M \vee N$, pak podle věty 6.5 existují vektory $\boldsymbol{y} \in M$ a $\boldsymbol{z} \in N$ takové, že $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$. Vektor $\boldsymbol{y}$ lze zapsat jako lineární kombinaci prvků báze M a vektor $\boldsymbol{z}$ jako lineární kombinaci prvků báze N. Proto je vektor $\boldsymbol{x}$ lineární kombinací prvků množiny B a máme dokázánu obrácenou inkluzi $M \vee N \subseteq \langle B\rangle$.

Nyní ukážeme, že B je lineárně nezávislá množina. Množina $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{c}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_m\}$ je lineárně nezávislá, protože je bází prostoru M. Množina $\{\boldsymbol{d}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{d}_n\}$ je také lineárně nezávislá, protože je podmnožinou báze prostoru N. Navíc pro všechny prvky $\boldsymbol{d}_i$, $i \in \{k+1, \ldots, n\}$ platí, že neleží v M, tedy $\boldsymbol{d}_i \notin \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{c}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_m\rangle$. Přidáním těchto prvků k vektorům $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{c}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_m$ zůstává rozšířená množina podle věty 2.39 lineárně nezávislá.

Protože B je bází $M \vee N$ a je vidět, že B má $m + n - k$ prvků, je $\dim(M \vee N) = m + n - k$. Dokazovaná rovnost nyní plyne z toho, že platí $m + n = k + (m + n - k)$.