Lineární prostor

9. Odvoďte z axiomů linearity (v definici lineárního prostoru) vlastnosti: a) $x + o = x$, b) $\alpha o = o$ pro x libovolný prvek lineárního prostoru, o nulový prvek a $\alpha \in \mathbf{R}$.

1.7. Věta. Pro nulový prvek $\boldsymbol{o}$ lineárního prostoru L platí vlastnosti:

(1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{x} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in L,$
(2) $\alpha \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \qquad \forall \alpha \in \mathbf{R},$
(3) Nechť $\boldsymbol{x} \in L$. Je-li $\alpha \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ a $\alpha \neq 0$, pak $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

Důkaz. Použijeme vlastnosti z definice 1.6. Pro přehlednost píšeme nad rovnítka číslo použité vlastnosti.

(1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{o} \overset{(7)}{=} \boldsymbol{x} + 0 \cdot \boldsymbol{x} \overset{(6)}{=} 1 \cdot \boldsymbol{x} + 0 \cdot \boldsymbol{x} \overset{(5)}{=} (1 + 0) \cdot \boldsymbol{x} = 1 \cdot \boldsymbol{x} \overset{(6)}{=} \boldsymbol{x}.$
(2) $\alpha \cdot \boldsymbol{o} \overset{(7)}{=} \alpha \cdot (0 \cdot \boldsymbol{x}) \overset{(3)}{=} (\alpha \cdot 0) \cdot \boldsymbol{x} = 0 \cdot \boldsymbol{x} \overset{(7)}{=} \boldsymbol{o}.$
(3) $\boldsymbol{x} \overset{(6)}{=} 1 \cdot \boldsymbol{x} = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right) \cdot \boldsymbol{x} \overset{(3)}{=} \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha \cdot \boldsymbol{x}) \overset{\text{(z předpokladu)}}{=} \frac{1}{\alpha} \cdot \boldsymbol{o} \overset{\text{(vlastnost (2) věty 1.7)}}{=} \boldsymbol{o}.$

10. Ověřte podrobně, že $\mathbf{R}^n$ s obvyklým +, · tvoří lineární prostor.

Následující příklad je pro $\mathbf{R}^2$, pokud bychom chtěli rozvinout obecně pro $\mathbf{R}^n$, pak je nutno provést pro tento obecný příklad:

$\mathbf{R}^n_1$ a $\mathbf{R}^n_2$ si napíšeme ve tvaru $(a_1, a_2, ..., a_n)$ a $(b_1, b_2, ... b_n)$
Např. sčítání: $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$, pro další axiomy linearity je to pak obdobné.
(Viz Příklad 1.11 na konci této otázky.)

1.3. Příklad. Nechť $\mathbf{R}^2$ je množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel, tj. $\mathbf{R}^2 = \{(a, b); a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}\}$ (symbolem $\mathbf{R}$ označujeme reálná čísla, složky uspořádané dvojice píšeme do kulatých závorek a oddělujeme čárkou). Definujme sčítání dvou uspořádaných dvojic:

$$(a, b) \oplus (c, d) \overset{\text{df}}{=} (a + c, b + d) \tag{1.1}$$

a násobení uspořádané dvojice reálným číslem $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$\alpha \odot (a, b) \overset{\text{df}}{=} (\alpha\, a, \alpha\, b). \tag{1.2}$$

Všimneme si, že jsme definovali operaci $\oplus$ sčítání objektů tak, že výsledek sčítání je zase uspořádaná dvojice. Stejně součin $\odot$ reálného čísla s uspořádanou dvojicí je zase uspořádaná dvojice, tedy prvek množiny $\mathbf{R}^2$. Naše sčítání je tedy operace, do které vstupují dva prvky množiny $\mathbf{R}^2$ a vystupuje z ní prvek množiny $\mathbf{R}^2$. Naše násobení je operace, do které vstupuje reálné číslo a prvek z $\mathbf{R}^2$ a vystupuje z ní prvek z $\mathbf{R}^2$. Tuto skutečnost zapíšeme pomocí kartézského součinu množin:

$$\oplus : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \qquad \odot : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2. \tag{1.3}$$

1.6. Definice. *Lineárním prostorem* nazýváme každou neprázdnou množinu L, na které je definováno sčítání $+\colon L \times L \to L$ a násobení reálným číslem $\cdot\colon \mathbf{R} \times L \to L$ a tyto operace splňují pro každé $\boldsymbol{x} \in L, \boldsymbol{y} \in L, \boldsymbol{z} \in L, \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}$ vlastnosti:

(1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ (komutativní zákon sčítání),

(2) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ (asociativní zákon sčítání),

(3) $\alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{x}) = (\alpha\beta) \cdot \boldsymbol{x}$ (asociativní zákon násobení),

(4) $\alpha \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot \boldsymbol{y}$ (distributivní zákon pro sčítání prvků z L),

(5) $(\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{x} = \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{x}$ (distributivní zákon pro sčítání čísel),

(6) $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ (vlastnost reálného čísla 1),

(7) existuje $\boldsymbol{o} \in L$, že pro každé $\boldsymbol{x} \in L$ je $0 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ (existence nulového prvku).

1.9. Příklad. Ukážeme, že množina $\mathbf{R}^2$ z příkladu 1.3 se sčítáním a násobením skalárem podle definic (1.1) a (1.2) tvoří lineární prostor. Místo znaků „$\oplus$“ a „$\odot$“ budeme nadále používat znaky „$+$“ a „$\cdot$“.

Nejprve je třeba zjistit, zda operace „$+$“ a „$\cdot$“ jsou skutečně definovány způsobem, jak požaduje definice 1.6, tj. zda platí $+\colon \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ a $\cdot\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. To jsme ale už ověřili dříve, viz (1.3).

Dále zjistíme platnost vlastností (1) až (7) z definice 1.6. Vlastnost (1) jsme podrobně ověřovali v příkladu 1.3. Pokračujeme tedy vlastností (2). Pro každé $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$ platí:

$$\begin{aligned}\big((a,b)+(c,d)\big)+(e,f) &= (a+c,b+d)+(e,f) = \big((a+c)+e,(b+d)+f\big) = \\ &= \big(a+(c+e),b+(d+f)\big) = (a,b)+(c+e,d+f) = (a,b)+\big((c,d)+(e,f)\big).\end{aligned}$$

Při úpravách jsme nejprve dvakrát použili definici (1.1), pak jsme v jednotlivých složkách využili toho, že pro sčítání reálných čísel platí asociativní zákon a konečně jsme zase dvakrát použili definici (1.1). Nyní dokážeme další vlastnosti. Pro každé $a, b, c, d, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ platí:

(3) $\alpha \cdot \big(\beta \cdot (a,b)\big) = \alpha \cdot \big(\beta\, a, \beta\, b\big) = \big(\alpha\,(\beta\, a), \alpha\,(\beta\, b)\big) = \big((\alpha\,\beta)\, a, (\alpha\,\beta)\, b\big) = (\alpha\,\beta)\,(a,b)$,

(4) $\alpha \cdot \big((a,b)+(c,d)\big) = \alpha \cdot (a+c, b+d) = \big(\alpha\,(a+c), \alpha\,(b+d)\big) = (\alpha\, a + \alpha\, c, \alpha\, b + \alpha\, d) =$
$= (\alpha\, a, \alpha\, b) + (\alpha\, c, \alpha\, d) = \alpha\,(a,b) + \alpha\,(c,d)$,

(5) $(\alpha+\beta) \cdot (a,b) = \big((\alpha+\beta)\, a, (\alpha+\beta)\, b\big) = (\alpha\, a + \beta\, a, \alpha\, b + \beta\, b) = (\alpha\, a, \alpha\, b) + (\beta\, a, \beta\, b) =$
$= \alpha\,(a,b) + \beta\,(a,b)$,

(6) $1 \cdot (a,b) = (1\, a, 1\, b) = (a,b)$,

(7) dvojice $(0,0)$ splňuje: $(0,0) = 0 \cdot (a,b)$, protože $0 \cdot (a,b) = (0\, a, 0\, b) = (0,0)$.

Použili jsme nejprve definice (1.1) a (1.2), pak jsme využili vlastnosti reálných čísel v jednotlivých složkách dvojice. Nakonec jsme znovu použili definice (1.1) a (1.2).

Vidíme, že nulovým vektorem lineárního prostoru $\mathbf{R}^2$ je dvojice $(0,0)$. Podle konvence ze závěru definice 1.6 jsme oprávněni uspořádaným dvojicím se sčítáním a násobením podle definic (1.1) a (1.2) říkat vektory.

Příklad pro $\mathbf{R}^n$:

1.11. Příklad. Znakem $\mathbf{R}^n$ označíme množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel, (n je nějaké přirozené číslo, $n \geq 1$). Jinými slovy:

$$\mathbf{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n);\ a_1 \in \mathbf{R},\ a_2 \in \mathbf{R}, \ldots,\ a_n \in \mathbf{R}\}.$$

Definujme $+ : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ takto: pro každé $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in \mathbf{R}$ je

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) \stackrel{\text{df}}{=} (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),$$
$$\alpha \cdot (a_1, \ldots, a_n) \stackrel{\text{df}}{=} (\alpha\, a_1, \ldots, \alpha\, a_n).$$

Množina $\mathbf{R}^n$ s takto definovanými operacemi tvoří lineární prostor.

Důkaz bychom provedli analogicky jako v příkladu 1.9, ale pro úsporu místa to již nebudeme opakovat. Vidíme tedy, že uspořádané n-tice s takto definovaným sčítáním a násobením skalárem můžeme nazývat vektory. Speciálně v případě uspořádaných n-tic mluvíme o *aritmetických vektorech*. Číslo a_i nazýváme i-tou složkou vektoru $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

11. Ukažte, že množina nekonečných posloupností s + a · definovaným „po složkách“ tvoří LP.

Posloupnost = nekonečná řada n-tic.

Dejme tomu, že jednotlivé posloupnosti značíme $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$, ... $\mathbf{L_n}$.
Pokud máme definovat sčítání a násobení skalárem po složkách, tak vezmeme všechny prvky libovolné posloupnosti $\mathbf{L_1}$ $\mathbf{\{x_1, x_2, ..., x_{inf}\}}$ a libovolné posloupnosti $\mathbf{L_2}$ $\mathbf{\{y_1, y_2, ..., y_{inf}\}}$ a sečteme je.
Tím vznikne opět nekonečná posloupnost $\mathbf{\{ x_{1+}y_1, x_{2+}\, y_2, ..., x_{inf+}y_{inf}\}}$.
S násobením je to obdobné.
To znamená, že množina nekonečných posloupností je uzavřena na operace + a ., tzn. že platí kartézský součin pro + a ., tj. “+”: L x L → L a “.”: R x L → L.

1.74. Cvičení. Nechť (a_i) jsou nekonečné posloupnosti reálných čísel. Definujte

součet: $(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$ **a násobek reálným číslem:** $\alpha(a_i) = (\alpha a_i)$.

Ukažte, že množina všech nekonečných posloupností s takto definovaným sčítáním a násobením skalárem tvoří lineární prostor.

1.74.[3] Řešení. Součet posloupností je posloupnost, α-násobek posloupnosti je posloupnost. Vlastnosti (1)–(7) ověříme stejně, jako v příkladě 1.9. Ukážu jen ověření vlastnosti (3), ostatní si propočítá laskavý čtenář sám. Posloupnost (a_i) je pro větší názornost označena jako $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Platí: $\alpha(\beta(a_0, a_1, a_2, \ldots)) = \alpha(\beta a_0, \beta a_1, \beta a_2, \ldots) = (\alpha\beta a_0, \alpha\beta a_1, \alpha\beta a_2, \ldots) = (\alpha\beta)(a_0, a_1, a_2, \ldots)$.

$$L_1 = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty},\ n \in \mathbb{N},\ a \in L_1 \right\}$$

$$L_2 = \left\{ \{b_n\}_{n=1}^{\infty},\ n \in \mathbb{N},\ b \in L_2 \right\}$$

$$\{a_n\} + \{b_n\} = a_n + b_n$$

$$\alpha \{a_n\} = \alpha a_n$$

12. Proč je množina všech posloupností s limitou=0 lineárním podprostorem LP všech posloupností?

Posloupnost = nekonečná řada n-tic s limitou = 0.

Podmnožina M lineárního prostoru je sama LP, pokud pro $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ z M platí $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in$ M a pro všechna reálná čísla $\boldsymbol{\alpha}$ platí $\boldsymbol{\alpha u} \in$ M.

1.75. Cvičení. Nechť M je množina všech nekonečných posloupností reálných čísel (c_i) s vlastností:

a) $\lim c_i = 3$ pro $i \to \infty$,
b) $\lim c_i = 0$ pro $i \to \infty$,
c) (c_i) je konvergentní posloupnost,
d) $c_i \neq 0$ jen pro konečně mnoho $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ (tzv. posloupnosti s konečným nosičem),
e) $c_{i+2} = c_i + c_{i+1}$ pro všechna $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ (pro $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ je to tzv. Fibonacciho posloupnost),
f) (c_i) je geometrická posloupnost, tj. existuje $q \in \mathbf{R}$ tak, že $c_i = c_0 q^i$ pro všechna $i \in \mathbf{N}$,
g) c_i je nezáporné pro lichá i a je nekladné pro sudá i,
h) (c_i) je omezená posloupnost,
i) (c_i) je posloupnost tvaru $(x, y, z, x, y, z, x, y, z, \dots)$ pro nějaké $x, y, z \in \mathbf{R}$.

Rozhodněte, zda M tvoří lineární podprostor lineárního prostoru všech nekonečných posloupností.

1.75.[3] Řešení. M jsou ve všech případech podmnožiny lineárního prostoru všech posloupností. Stačí tedy ověřit, zda součet prvků z M leží v M a α-násobek prvku z M leží v M.

→ (a) Součet posloupností s limitou 3 je posloupnost s limitou 6, tj. neleží v M, tj. M není lineární podprostor.

→ (b) Součet posloupností s limitou 0 je posloupnost s limitou 0, α-násobek taky. M je lineární podprostor.

→ (c) Součet konvergentních posloupností je konvergentní posloupnost, α-násobek taky (je to cvičení spíše do úvodního kurzu matematické analýzy). M je lineární podprostor.

→ (d) Součet posloupností s konečným nosičem K_1 a K_2 má konečný nosič, který je podmnožinou $K_1 \cup K_2$. α-násobek posloupnosti s konečným nosičem má (pro $\alpha \neq 0$) stejný nosič a pro $\alpha = 0$ je nosičem prázdná množina. Tedy nosič je konečný. M je lineární podprostor.

→ (e) Nechť (c_i) a (d_i) jsou posloupnosti, které splňují $c_{i+2} = c_i + c_{i+1}$, $d_{i+2} = d_i + d_{i+1}$. Pak $c_{i+2} + d_{i+2} = c_i + d_i + c_{i+1} + d_{i+1}$, tedy $(c+d)_{i+2} = (c+d)_i + (c+d)_{i+1}$. Také $\alpha c_{i+2} = \alpha c_i + \alpha c_{i+1}$. Takže M je lineární podprostor.

→ (f) Nechť $c_i = c_0 p^i$, $d_i = d_0 q^i$. Pro $p \neq q$ není součet $(c_i) + (d_i)$ geometrická posloupnost. M není lineární podprostor. Kdyby M_q byla množina všech geometrických posloupností se stejným kvocientem q, pak M_q tvoří lineární podprostor.

→ (g) M není lineární podprostor: stačí nenulovou posloupnost násobit číslem -1.

→ (h) Součet posloupností omezených konstantami K_1, K_2 je posloupnost omezená konstantou $K_1 + K_2$, také α-násobek posloupnosti omezené konstantou K_1 je posloupnost omezená konstantou $|\alpha| K_1$. Takže M tvoří lineární podprostor.

→ (i) $(x, y, z, x, y, z, \dots) + (a, b, c, a, b, c, \dots) = (x+a, y+b, z+c, x+a, y+b, z+c, \dots)$, $\alpha(x, y, z, x, y, z, \dots) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha x, \alpha y, \alpha z, \dots)$, tedy M je lineární podprostor.

$L = \{\{a_i\}, \lim_{n\to\infty} a_i = 0, n \in \mathbb{R}\}$

? $M \subset L$

$\{a_n\}, \{b_n\} \in M \Rightarrow$ musí být i prvkem L, pokud $M \subset L$

⊕: $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n =$

$= 0 + 0 = 0 \Rightarrow \{a_n\} + \{b_n\} \in L$

⊙: $\lim_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \cdot 0 = 0$

13. Proč množina M = {(a, b, c, d), |a| = |b|, |c| = |d|} není podprostorem R^4?

nejlépe uvést na příkladu

z **M = {(a, b, c, d), |a| = |b|, |c| = |d|}** vybereme dva konkrétní prvky takto:
(1, -1, 0, 0) $\in$ M a (1, 1, 0, 0) $\in$ M
nyní ověříme, zda platí + a .
+: (1, -1, 0, 0) + (1, 1, 0, 0) = (2, 0, 0, 0) $\Rightarrow$ není $\in$ M, a proto výše definovaná množina není podprostorem R^4

1.20. Příklad. Uvažujme $M \subseteq \mathbf{R}^n$, $M = \{(a, a, \ldots, a);\ a \in \mathbf{R}\}$. Předpokládáme tedy, že množina M obsahuje takové n-tice, ve kterých se všechny složky vzájemně rovnají. Ukážeme, že M je lineární podprostor lineárního prostoru $\mathbf{R}^n$.

Stačí pro množinu M dokázat vlastnosti (1) a (2) z definice 1.17. Platí (1) součet dvou uspořádaných n-tic, ve kterých se složky rovnají, je uspořádaná n-tice, ve kterých se složky rovnají. (2) vynásobením uspořádané n-tice, ve které se složky rovnají, reálným číslem, dostáváme zase uspořádanou n-tici, ve které se složky rovnají.

1.21. Příklad. Uvažujme množiny $M \subseteq \mathbf{R}^3$, $N \subseteq \mathbf{R}^3$ a $S \subseteq \mathbf{R}^3$, které jsou definovány takto:

$$M = \{(x, y, z);\ x + 2y = 0,\ z \text{ libovolné}\},$$
$$N = \{(x, y, z);\ 2x + y - z = 0\},$$
$$S = \{(x, y, z);\ 2x + y - z = 3\}.$$

Ukážeme, že M a N jsou lineárními podprostory lineárního prostoru $\mathbf{R}^3$, zatímco S není lineárním podprostorem lineárního prostoru $\mathbf{R}^3$.

Ověříme vlastnost (1) z definice 1.17: Nechť $(x_1, y_1, z_1) \in M$ a $(x_2, y_2, z_2) \in M$. Pak platí $x_1 + 2y_1 = 0$ a $x_2 + 2y_2 = 0$. Pro součet $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ platí $x_1 + 2y_1 + x_2 + 2y_2 = 0$ (sečetli jsme

předchozí rovnice), tj. $(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = 0$, takže i součet leží v množině M. Nyní vlastnost (2): Jestliže $(x, y, z) \in M$, $\alpha \in \mathbf{R}$, pak platí $x + 2y = 0$. Vynásobením rovnice číslem α dostáváme, že též $\alpha x + 2\alpha y = 0$, což ale znamená, že i trojice $\alpha \cdot (x, y, z)$ leží v množině M. Ověření, že množina N je lineárním podprostorem, lze provést podobně.

Množina S není lineárním podprostorem, protože například $0 \cdot (x, y, z) = (0, 0, 0)$, což je ale prvek, který neleží v S. Neplatí totiž $2 \cdot 0 + 0 - 0 = 3$.

14. Zdůvodněte, proč průnik lineárních podprostorů je lineární podprostor a sjednocení lineárních podprostorů nemusí být lineární podprostor.

1.22. Věta. Nechť $M \subseteq L$ a $N \subseteq L$ jsou lineární podprostory lineárního prostoru L. Pak platí:

(1) $M \cap N$ je lineární podprostor lineárního prostoru L.
(2) $M \cup N$ nemusí být lineární podprostor lineárního prostoru L.

Důkaz. (1) Z předpokladů věty a definice 1.17 víme, že pro $\boldsymbol{x} \in M$, $\boldsymbol{y} \in M$, $\alpha \in \mathbf{R}$ je $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in M$ a $\alpha \cdot \boldsymbol{x} \in M$. Totéž platí pro množinu N. Pokud nyní $\boldsymbol{x} \in M \cap N$, $\boldsymbol{y} \in M \cap N$, pak $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ leží současně v M i N, takže platí, že $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in M$, $\alpha \cdot \boldsymbol{x} \in M$ a současně $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in N$, $\alpha \cdot \boldsymbol{x} \in N$. Prvky $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ a $\alpha \cdot \boldsymbol{x}$ leží v obou množinách M a N současně a to není jinak možné, než že leží v průniku těchto množin.

(2) Abychom ukázali, že sjednocení $M \cup N$ nemusí být lineárním podprostorem, stačí najít vhodný příklad. Nechť $M = \{(a, 0);\ a \in \mathbf{R}\}$, $N = \{(0, b);\ b \in \mathbf{R}\}$. Je zřejmé, že M a N jsou lineárními podprostory lineárního prostoru $\mathbf{R}^2$. Sjednocením těchto množin je množina uspořádaných dvojic, pro které je první nebo druhá složka nulová. Vezmeme nyní $(1, 0) \in M \cup N$ a $(0, 1) \in M \cup N$. Součet $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ je uspořádaná dvojice, která neleží ve sjednocení $M \cup N$.