Soustavy lineárních rovnic

58. Frobeniova věta, přesná formulace, význam, důkaz.

(5.4)
Nehomogenní soustava lineárních algebraických rovnic má řešení pouze v případě, že hodnost matice soustavy $h(\mathbf{A})$ je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy $h(\mathbf{A}|\vec{b})$ (tj. soustava je vnitřně bezrozporná). Pokud je $h(\mathbf{A})$ rovno počtu neznámých, má soustava jedno řešení; pokud je $h(\mathbf{A})$ menší než počet neznámých, je řešení nekonečně mnoho (je-li větší než počet neznámých, nemůže být splněna předchozí podmínka a soustava tedy nemá řešení).

5.4. Věta (Frobeniova). Soustava $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má řešení právě tehdy, když $\operatorname{hod}\mathbf{A} = \operatorname{hod}(\mathbf{A}|\boldsymbol{b})$, tj. když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy. *Frobeniova věta*

Důkaz. Vektor $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ je řešením soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ právě tehdy, když platí (5.1). To znamená, že sloupec $\boldsymbol{b}$ je lineární kombinací sloupců matice $\mathbf{A}$ s koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. To platí právě tehdy, když

$$\operatorname{hod}\begin{pmatrix}\mathbf{A}^T\\ \boldsymbol{b}^T\end{pmatrix} = \operatorname{hod}\mathbf{A}^T.$$

Protože platí věta 3.31, je Frobeniova věta dokázána.

3.31. Věta. Pro každou matici $\mathbf{A}$ platí: $\operatorname{hod}(\mathbf{A}^T) = \operatorname{hod}(\mathbf{A})$.

59. Definice pojmu řešení soustavy lineárních rovnic.

(5.2)
Resenim soustavy Ax=b je takovy vektor 'a', pro ktery plati: dosadime li 'a' za 'x', pak je splnena pozadovana maticova rovnost. Resit soustavu Ax=b znamena nalezt vsechny takove vektory 'a'.

5.2. Definice. *Řešením soustavy* $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je takový vektor $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$, pro který platí: dosadíme-li hodnoty α_i za symboly x_i, pak je splněna požadovaná maticová rovnost, tj.

$$\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Řešit soustavu $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ znamená nalézt všechna její řešení, tj. nalézt podmnožinu $\mathbf{R}^n$ všech řešení této soustavy.

5.3. Poznámka. Všimneme si, že z historických důvodů se v rovnosti $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ značí jednosloupcové matice malým písmenem podobně, jako vektory. Často se na tyto matice zjednodušeně díváme jako na prvky z $\mathbf{R}^n$ nebo $\mathbf{R}^m$, jen nesmíme zapomenout, že složky těchto uspořádaných m-tic a n-tic v kontextu rovnosti $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ píšeme do sloupce a nikoli do řádku.

Matice $\boldsymbol{x}$ může místo symbolů $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obsahovat i jiné symboly, například x, y, z.

60. Proč množina řešení homogenní soustavy lineárních rovnic tvoří lineární podprostor?

(5.10)
Za prve ukazeme, ze mnozina reseni homogenni soustavy neni prazdna: to je trivialni, protoze nulovy vektor je vzdycky resenim homogenni soustavy. Pak dokazeme, ze pokud 'u' a 'v' jsou resenim, pak (u+v) je resenim a 'a*v' je resenim (kde a je skalar). Dokazuje se dosazenim do rovnice Ax=o. Podle predpokladu mame Au=o, Av=o. Secteme a dostaneme Au+Av = o+o. Z toho A(u+v) =o. Se skalarem postupujeme obdobne.

5.9. Definice. Existuje-li v matici $\boldsymbol{b}$ aspoň jeden prvek nenulový, říkáme, že je soustava lineárních rovnic $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *nehomogenní*. Jsou-li všechny prvky v matici $\boldsymbol{b}$ nulové, nazýváme soustavu rovnic *homogenní* a zapisujeme ji takto: *Řešení homogenní soustavy*

$\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ (symbolem $\boldsymbol{o}$ nyní značíme jednosloupcovou nulovou matici).

5.10. Věta. Množina všech řešení homogenní soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ s n neznámými tvoří lineární podprostor lineárního prostoru $\mathbf{R}^n$.

Důkaz. Především množina řešení homogenní soustavy je neprázdná, protože nulový vektor v $\mathbf{R}^n$ je samozřejmě řešením této soustavy.

Podle definice 1.17 musíme dále dokázat: (1) jsou-li $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$ řešení soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, pak též $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ je řešením stejné soustavy. (2) je-li $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n$ řešením soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ a $\alpha \in \mathbf{R}$, pak též $\alpha\,\boldsymbol{u}$ je řešením stejné soustavy. Pro účely důkazu označme symbolem $\boldsymbol{u}^T$ jednosloupcovou matici, jejíž prvky odpovídají složkám vektoru $\boldsymbol{u}$. Podobně $\boldsymbol{v}^T$ je sloupec vzniklý z vektoru $\boldsymbol{v}$.

Protože $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ jsou řešení soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, platí: $\mathbf{A}\,\boldsymbol{u}^T = \boldsymbol{o}$ a $\mathbf{A}\,\boldsymbol{v}^T = \boldsymbol{o}$. Máme dokázat, že $\mathbf{A}\,(\boldsymbol{u}^T + \boldsymbol{v}^T) = \boldsymbol{o}$ a $\mathbf{A}\,(\alpha\,\boldsymbol{u}^T) = \boldsymbol{o}$. Podle věty 3.38 je

$$\mathbf{A}\,(\boldsymbol{u}^T + \boldsymbol{v}^T) = \mathbf{A}\,\boldsymbol{u}^T + \mathbf{A}\,\boldsymbol{v}^T = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o},$$
$$\mathbf{A}\,(\alpha\,\boldsymbol{u}^T) = \alpha\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{u}^T = \alpha\,\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}.$$

5.11. Příklad. Najdeme množinu všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic se šesti neznámými:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 8x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Eliminujeme matici soustavy (vektor pravých stran je nulový, takže je zbytečné jej psát).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Z poslední rovnice budeme počítat x_6, z předposlední rovnice x_3 a z první rovnice x_1. Hodnoty neznámých x_2, x_4, x_5 mohou být libovolné. Zaveďme pro ně parametry $x_2 = t$, $x_4 = u$, $x_5 = v$. Z poslední rovnice vychází jedině $x_6 = 0$, z předposlední rovnice máme $x_3 = -2v$ a konečně z první rovnice dostáváme $x_1 = -t + 4v - 3u - 3v = -t + v - 3u$. Výsledek sumarizujeme takto:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= (-t + v - 3u,\ t,\ -2v,\ u,\ v,\ 0) = \\ &= t\,(-1, 1, 0, 0, 0, 0) + u\,(-3, 0, 0, 1, 0, 0) + v\,(1, 0, -2, 0, 1, 0). \end{aligned}$$

Z tohoto zápisu vyplývá, že množina všech řešení dané homogenní soustavy je množinou všech lineárních kombinací uvedených tří vektorů, což můžeme zapsat pomocí lineárního obalu takto:

$$M_0 = \langle (-1, 1, 0, 0, 0, 0), (-3, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, -2, 0, 1, 0) \rangle.$$

61. Nechť v je jedno řešení soustavy lineárních rovnic. Proč všechna ostatní řešení této soustavy jsou ve tvaru součtu v + u, kde u je nějaké řešení homogenní soustavy přidružené k dané soustavě?

viz 5.18(1). Dokazuje se dosazenim do rovnice Ax=b. z predpokladu vime, ze Av=b, Au=0. Secteme, dostaneme Av+Au = 0+b. Podle distributivity mame A(v+u)=b. Z toho plyne, ze (v+u) je take resenim soustavy Ax=b.

Řešení nehomogenní soustavy

5.17. Definice. Nechť $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je nehomogenní soustava lineárních rovnic o n neznámých a $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$ je nějaké jedno její řešení. Takovému řešení $\boldsymbol{v}$ říkáme *partikulární řešení* nehomogenní soustavy.

Pokud zaměníme matici $\boldsymbol{b}$ za nulovou matici stejného typu, dostáváme homogenní soustavu $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, kterou nazýváme *přidruženou homogenní soustavou* k soustavě $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

5.18. Věta. (1) Nechť $\boldsymbol{v}$ je partikulární řešení nehomogenní soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{u}$ je libovolné řešení přidružené homogenní soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Pak $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ je také řešením soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

(2) Nechť $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$ jsou dvě partikulární řešení nehomogenní soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Pak $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ je řešením přidružené homogenní soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

Důkaz. Označme (stejně jako v důkazu věty 5.10) symbolem $\boldsymbol{v}^T$ jednosloupcovou matici, která obsahuje složky vektoru $\boldsymbol{v}$. Analogicky označme $\boldsymbol{u}^T$ a $\boldsymbol{w}^T$.

(1) Podle předpokladu platí $\mathbf{A}\,\boldsymbol{v}^T = \boldsymbol{b}$, $\mathbf{A}\,\boldsymbol{u}^T = \boldsymbol{o}$. Pro součet $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ pak platí

$$\mathbf{A}\,(\boldsymbol{v}^T + \boldsymbol{u}^T) = \mathbf{A}\,\boldsymbol{v}^T + \mathbf{A}\,\boldsymbol{u}^T = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{b}.$$

(2) Podle předpokladu platí $\mathbf{A}\,\boldsymbol{v}^T = \boldsymbol{b}$, $\mathbf{A}\,\boldsymbol{w}^T = \boldsymbol{b}$. Pro rozdíl $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ pak platí

$$\mathbf{A}\,(\boldsymbol{v}^T - \boldsymbol{w}^T) = \mathbf{A}\,\boldsymbol{v}^T - \mathbf{A}\,\boldsymbol{w}^T = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}.$$

5.19. Věta. Nechť $\boldsymbol{v}$ je partikulární řešení soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a M_0 je lineární prostor všech řešení přidružené homogenní soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Pak pro množinu M všech řešení soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ platí

$$M = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u};\ \boldsymbol{u} \in M_0\}.$$

Důkaz. Z vlastnosti (1) věty 5.18 plyne, že $\{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u};\ \boldsymbol{u} \in M_0\} \subseteq M$. Stačí dokázat obrácenou inkluzi. Pokud $\boldsymbol{w} \in M$, pak podle vlastnosti (2) věty 5.18 existuje $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v} \in M_0$, takže $\boldsymbol{w} \in \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u};\ \boldsymbol{u} \in M_0\}$. Platí tedy i obrácenná inkluze.

62. Zformulujte a dokažte Cramerovu větu.

5.29. Věta (Cramerovo pravidlo). Nechť $\mathbf{A}$ je regulární čtvercová matice. Pak pro i-tou složku řešení soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ platí

$$\alpha_i = \frac{\det \mathbf{B}_i}{\det \mathbf{A}},$$

kde matice $\mathbf{B}_i$ je shodná s maticí $\mathbf{A}$ až na i-tý sloupec, který je zaměněn za sloupec pravých stran.

Důkaz. Víme, že platí $\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\boldsymbol{b}$. Podle důkazu věty 4.37 o existenci inverzní matice platí

$$\mathbf{A}^{-1} = (c_{i,j}) = \left(\frac{D_{j,i}}{\det \mathbf{A}}\right), \quad \text{kde } D_{i,j} \text{ je matice doplňků k matici } \mathbf{A}.$$

Nechť b_i jsou složky sloupce $\boldsymbol{b}$. Podle definice maticového násobení je

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}\,b_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_{j,i}}{\det \mathbf{A}}\,b_j = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\left(D_{1,i}\,b_1 + D_{2,i}\,b_2 + \cdots + D_{k,i}\,b_k\right) = \frac{\det \mathbf{B}_i}{\det \mathbf{A}}.$$

V poslední rovnosti jsme využili větu o rozvoji determinantu matice $\mathbf{B}_i$ podle i-tého sloupce, viz poznámku 4.33.

5.30. Příklad. Při řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

použijeme Cramerovo pravidlo. Dostáváme:

$$x_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 11 & 4 & 5 \\ 12 & 6 & 8 \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 3 & 11 & 5 \\ 5 & 12 & 8 \end{vmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 3 & 4 & 11 \\ 5 & 6 & 12 \end{vmatrix}, \quad \text{kde } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix}.$$

Vypočítáním čtyř determinantů z uvedených matic typu (3,3) dostáváme výsledek

$$x_1 = \frac{18}{-2} = -9, \quad x_2 = \frac{-19}{-2} = \frac{19}{2}, \quad x_3 = \frac{0}{-2} = 0, \quad (x_1, x_2, x_3) = \left(-9, \frac{19}{2}, 0\right).$$

5.31. Poznámka. Cramerovo pravidlo se nejeví pro výpočet řešení soustavy s regulární maticí příliš účelné. Potřebujeme spočítat $n + 1$ determinantů matic typu (n, n), což je pro velká n náročnější, než spočítat inverzní matici eliminační metodou. Výhodná může být tato metoda pouze tehdy, když nepotřebujeme znát všechny složky řešení, ale jen některé. Například můžeme mít nějaký fyzikální model vyjádřený rozsáhlou soustavou lineárních rovnic, přičemž z mnoha stovek výstupních veličin (tj. složek řešení) nás zajímá jen pár.

63. Nechť M = v+hu1, . . . ,uki,M′ = v′+hu′ 1, . . . ,u′ ki. Navrhněte a zdůvodněte postup, podle kterého poznáte, že M = M′.

(5.61)
Nejdriv overime rovnost linearnich obalu (u1,u2,...,un) a (u'1,u'2,...,u'n). Pak dokazeme, ze v-v' patri do linearniho obalu (u'1, u'2,...,u'n).

5.61. Cvičení. Níže uvedené množiny M_1 a M_2 jsou zápsány způsobem obvyklým pro zápis množiny řešení soustav lineárních rovnic, tj. jako součet partikulárního řešení a množiny všech řešení přidružené homogenní soustavy vyjádřené pomocí lineárního obalu. V následujících úlohách ověřte, zda $M_1 = M_2$.

a) $M_1 = (1,1) + \langle (2,1) \rangle$, $M_2 = (3,2) + \langle (4,2) \rangle$,
b) $M_1 = (1,1,1) + \langle (2,1,3) \rangle$, $M_2 = (1,0,2) + \langle (4,2,6) \rangle$,
c) $M_1 = (1,0,0) + \langle (2,1,0), (1,2,1) \rangle$, $M_2 = (2,-1,-1) + \langle (3,0,-1), (0,3,2) \rangle$,
d) $M_1 = (1,2,3,4) + \langle (-2,4,-1,0), (4,0,2,-1), (0,2,1,-3) \rangle$,
$M_2 = (3,2,2,9) + \langle (6,-2,0,7), (0,4,-2,5), (3,1,-1,6) \rangle$,
e) $M_1 = (1,2,3,4,5,6) + \langle (2,1,0,3,0,-1), (3,1,0,3,-1,2), (5,-1,2,3,-3,1) \rangle$,
$M_2 = (6,-2,7,4,0,7) + \langle (-7,6,-6,0,7,0), (-3,5,-4,3,5,-2), (5,0,2,6,-1,-6) \rangle$.

5.61.[4] Řešení.
→ (a) ano,
→ (b) ne (obaly se rovnají, rozdíl partikulárních řešení neleží v obalu),
→ (c) ano,
→ (d) ne (dimenze prvního lin. obalu je 3, zatímco dimenze druhého lin. obalu je 2),
→ (e) ano.

64. Jakou dimenzi má prostor řešení homogenní soustavy lineárních rovnic a proč?

(5.13; 5.14)
Nechť R je prostor reseni homogenni soustavy. Pak dim R = n - h(A), kde n - pocet sloupcu matice A, h(A) - pocet nezavislych radku matice A.

5.13. Věta. Nechť $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ je homogenní soustava lineárních rovnic o n neznámých, $k = n - \operatorname{hod}\mathbf{A}$. Pak existuje k lineárně nezávislých vektorů $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ z $\mathbf{R}^n$ takových, že pro množinu M_0 všech řešení soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ platí

$$M_0 = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \rangle.$$

Vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ tvoří jednu z možných bází lineárního prostoru všech řešení M_0.

Důkaz. Vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ najdeme analogicky, jako jsme to udělali v příkladu 5.11. Podle poznámky 3.24 je počet rovnic soustavy po eliminaci roven $\operatorname{hod}\mathbf{A}$ a je roven počtu neznámých, které můžeme z rovnic vypočítat. Ostatních $k = n - \operatorname{hod}\mathbf{A}$ neznámých $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ může nabývat libovolných hodnot a zaveďme pro ně parametry $x_{i_1} = p_1, x_{i_2} = p_2, \ldots, x_{i_k} = p_k$. Všechna řešení získáme například dosazovací metodou použitou na rovnice po eliminaci (začínáme poslední rovnicí a končíme první). Z tohoto řešení můžeme vytknout parametry:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_1\,\boldsymbol{u}_1 + p_2\,\boldsymbol{u}_2 + \cdots + p_k\,\boldsymbol{u}_k \tag{5.2}$$

a dostáváme hledané vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$. Z uvedené rovnosti a z definice lineárního obalu 2.29 přímo plyne, že pro množinu všech řešení platí $M_0 = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \rangle$.

Zbývá dokázat, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ jsou lineárně nezávislé. Označme $\boldsymbol{u}'_1 \in \mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{u}'_2 \in \mathbf{R}^k, \ldots,$ $\boldsymbol{u}'_k \in \mathbf{R}^k$ ty části vektorů $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$, které obsahují jen složky $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Protože platí rovnost (5.2) a také platí označení $x_{i_1} = p_1, x_{i_2} = p_2, \ldots, x_{i_k} = p_k$, dostáváme

$$\boldsymbol{u}'_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \boldsymbol{u}'_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \boldsymbol{u}'_k = (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

Toto jsou lineárně nezávislé vektory. Z toho plyne, že jsou lineárně nezávislé i vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$, protože $\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \ldots, \boldsymbol{u}'_k$ jsou jejich části.

Závěrečné tvrzení věty, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ tvoří bázi prostoru řešení homogenní soustavy, plyne přímo z definice báze 2.42.

5.14. Věta. Nechť M_0 je lineární prostor všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ s n neznámými. Pak $\dim M_0 = n - \operatorname{hod}\mathbf{A}$.

Důkaz. Věta je přímým důsledkem předchozí věty.

5.15. Poznámka. Nechť n je počet neznámých homogenní soustavy $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Pak z věty 5.14 plyne tento důsledek:

$\operatorname{hod}\mathbf{A} = n$ pak soustava má jen nulové řešení,
$\operatorname{hod}\mathbf{A} < n$ pak soustava má nekonečně mnoho řešení.

5.34. Věta. Nechť homogenní soustava lineárních rovnic $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ má matici soustavy ve tvaru

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E}|\mathbf{C}),$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice typu (m, m) a $\mathbf{C}$ je libovolná matice typu (m, k). Pak existuje báze řešení této soustavy $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$, která má tvar:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_k \end{pmatrix} = (-\mathbf{C}^T|\mathbf{E}'),$$

kde $\mathbf{E}'$ je jednotková matice typu (k, k).

5.39. Věta. Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice a $\mathbf{B}$ je libovolná matice se stejným počtem řádků. Rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ je ekvivalentní s $(\mathbf{A}|\mathbf{B}) \sim (\mathbf{E}|\mathbf{X})$.

Důkaz. Protože $\mathbf{A}$ je regulární, má soustava soustav $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ jediné řešení. Eliminujme rozšířenou matici této soustavy soustav:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) \sim (\mathbf{E}|\mathbf{X}).$$

Rozšířená matice $(\mathbf{E}|\mathbf{X})$ obsahuje vpravo od čáry řešení původní soustavy soustav $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ právě tehdy, když $(\mathbf{E}|\mathbf{X})$ vznikla eliminací z původní rozšířené matice $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$.

5.40. Poznámka. Podobným postupem můžeme snadno obhájit známou metodu výpočtu inverzní matice $(\mathbf{A}|\mathbf{E}) \sim (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$. Vpravo od $\mathbf{E}$ máme řešení soustavy soustav $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$, tj. máme tam inverzní matici.