(25) Aby vektor $(1, 2, 3, t)$, $t \in \mathbb{R}$ ležel v lineárním obalu množiny M, musí být možné jej zapsat jako lineární kombinaci vektorů z tohoto obalu.

1) Nejdříve zjistíme, které vektory z množiny M jsou lineárně nezávislé a tvoří její lineární obal:

- Jsou-li vektory $m_1 = (1,2,4,3)$, $m_2 = (3,2,1,4)$, $m_3 = (4,1,2,1)$, $m_4 = (1,5,7,9)$ lineárně nezávislé, pak rovnice $a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3 + a_4 m_4 = 0$ má jediné řešení $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, tj.

$$\begin{aligned} a_1 + 3a_2 + 4a_3 + a_4 &= 0 \\ 2a_1 + 2a_2 + 1a_3 + 5a_4 &= 0 \\ 4a_1 + 1a_2 + 2a_3 + 7a_4 &= 0 \\ 3a_1 + 4a_2 + 1a_3 + 9a_4 &= 0 \end{aligned}$$

má jediné řešení $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & -11 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -11 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení, takže vektory m_1, m_2, m_3, m_4 jsou lineárně závislé.

Vedoucí prvky řádků výsledné matice leží v 1., 2. a 3. sloupci, tj. tyto vektory jsou lineárně nezávislé a tvoří lineární obal množiny M. $\langle M \rangle = \{m_1, m_2, m_3\}$.

- Musí tedy platit: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -11 & t-3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & 4t-12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 84t-288 \end{array}\right)$$

$84t - 288 = 0$, aby tato soustava měla řešení $\Rightarrow$ $t = \frac{288}{84} = \frac{72}{21} = \underline{\underline{\frac{24}{7}}}$

(32) Aby $M = N$, musí platit, že $(4, \alpha, 2) \in N$ a $(0, 0, -9) \in M$, tj.

$$\begin{aligned} 4 &= 0 + 1a + 3b \\ \alpha &= 0 + 1a + 5b \\ 2 &= -9 - 1a + \alpha \cdot b \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & \alpha \\ -1 & \alpha & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & \alpha-4 \\ 0 & 3+\alpha & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & \alpha-4 \\ 0 & 0 & \alpha^2-\alpha-42 \end{array}\right)$$

$\alpha^2 - \alpha - 42 = 0$

$(\alpha - 7)(\alpha + 6) = 0$

$\underline{\underline{\alpha_1 = 7}}$

$\alpha_2 = -6$

$$\begin{aligned} 0 &= 4 + 2c + d \\ 0 &= \alpha + 3c + 2d \\ -9 &= 2 + 3c + 4d \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -\alpha \\ 3 & 4 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 12-2\alpha \\ 0 & 2 & -11+\alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 12-2\alpha \\ 0 & 0 & -35+5\alpha \end{array}\right)$$

$-35 + 5\alpha = 0$

$\underline{\underline{\alpha = 7}}$

$M = N$ pro $\underline{\underline{\alpha = 7}}$