(17) - **Hodnost** matice udává počet lineárně nezávislých řádků matice. Převedeme-li matici Gaussovou eliminací do schodovitého tvaru, její hodnost bude odpovídat počtu nenulových řádků.

- **Gaussova eliminační metoda** využívá elementární řádkové úpravy, které lze simulovat násobením dané matice B jistou regulární maticí A zleva. Platí tedy věta: Je-li A regulární a existuje-li součin matic $A \cdot B$, pak $h(A \cdot B) = h(B)$. Násobení regulární maticí tedy hodnost původní matice nezmění.

(19) - **Maticové násobení** - Je-li A matice typu $m \times p$ a B matice typu $p \times n$, potom $A \cdot B$ je matice typu $m \times n$ definovaná předpisem: $(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj}$.

- **Vlastnosti součinu matic:**

1) Je-li definován součin $(A \cdot B) \cdot C$, pak je definován i součin $A \cdot (B \cdot C)$ a platí $(A \cdot B) \cdot C = A(B \cdot C)$ – je asociativní
2) Je-li definován součin $A \cdot (B+C)$, pak je definován i součin $AB + AC$ a platí $A(B+C) = AB + AC$
3) Je-li definován součin $(A+B) \cdot C$, pak je definován i součin $AC + BC$ a platí $(A+B) \cdot C = AC + BC$

$\}$ je distributivní zleva i zprava vzhledem ke sčítání

4) Je-li A typu $m \times n$, pak $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$ - násobení jednotkovou maticí je komutativní
5) Maticové násobení **není** obecně **komutativní**, tj. $A \cdot B = B \cdot A$ obecně neplatí
6) Je-li součin $A \cdot B$ definován, je $A \cdot (\lambda \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B)$ pro $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ - lineární vůči násobení reálným číslem

- Násobení matic je asociativní, tj. $A \cdot A^2 = A \cdot (A \cdot A) = (A \cdot A) \cdot A = A^2 \cdot A$ ... tj. A komutuje s A^2

(21) - **Horní trojúhelníková matice** má pod diagonálou samé nuly, tj. $a_{ij} = 0$ pro $\forall j < i$.

- Počet lineárně nezávislých řádků matice odpovídá její hodnosti. Hodnost matice ve schodovitém tvaru je dána počtem jejích nenulových řádků. Horní trojúhelníková matice je ve schodovitém tvaru a neobsahuje žádné nulové řádky. Z toho plyne, že se jedná o matici plné hodnosti, jejíž řádky jsou lineárně nezávislé.

(22) Je-li $1+2i$ kořenem daného polynomu $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 11x^2 + 10x$, je automaticky kořenem i číslo komplexně sdružené, tj. $1-2i$. Polynom $P(x)$ je proto dělitelný součinem kořenových činitelů $(x-1-2i) \cdot (x-1+2i) = (x^2 - x + 2ix - x + 1 - 2i - 2ix + 2i - 4i^2) = (x^2 - 2x + 5)$

$$(x^5 + x^4 + x^3 + 11x^2 + 10x) : (x^2 - 2x + 5) = x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-x^5 \mp 2x^4 \pm 5x^3} \\
\quad 3x^4 - 4x^3 + 11x^2 + 10x \\
\quad \underline{-3x^4 \mp 6x^3 \pm 15x^2} \\
\qquad 2x^3 - 4x^2 + 10x \\
\qquad \underline{-2x^3 \mp 4x^2 \pm 10x} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow x^5 + x^4 + x^3 + 11x^2 + 10x = (x^2 - 2x + 5)(x^3 + 3x^2 + 2x) =$$
$$= (x^2 - 2x + 5) \cdot x(x^2 + 3x + 2) =$$
$$\underline{\underline{= x(x^2 - 2x + 5)(x+2)(x+1)}}$$