(8) - Neprázdná množina $S \subseteq V$ je lineárním podprostorem vektorového prostoru V právě tehdy, když je uzavřená vzhledem k operacím sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem, tj. když platí:

1) $x, y \in S : x+y \in S$

2) $x \in S, \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \cdot x \in S$.

- Množina $M = \{(a,b,c,d), |a|=|b|, |c|=|d|\}$ není lineárním podprostorem $\mathbb{R}^4$, protože nesplňuje hned první axiom. Snadno lze najít vektory $u, v \in M$, pro které neplatí, že $u+v \in M$: např. $u=(1,1,2,-2)$, $v=(-1,1,2,2) \Rightarrow u+v=(0,2,4,0)$, neplatí $|0|=|2|$ a $|4|=|0| \Rightarrow u+v \notin M$

(20) Definice lineárního podprostoru - viz (8)↑

-Aby množina M byla lineárním podprostorem, musí platit:

1) $\forall B, C \in M : B+C \in M$

2) $\forall B \in M, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \cdot B \in M$

ad 1) $B, C \in M \Rightarrow B \cdot A = A \cdot B$, $C \cdot A = A \cdot C$

$B+C \in M$?

$\underbrace{(B+C) \cdot A}_{\text{distributivita násobení matic vůči sčítání}} = BA + CA = AB + AC = A(B+C)$ ... také $B+C$ komutuje s $A \Rightarrow \underline{\underline{B+C \in M}}$

ad 2) $B \in M \Rightarrow B \cdot A = A \cdot B$

$\alpha \cdot B \in M$ pro $\forall \alpha \in \mathbb{R}$?

$\underbrace{(\alpha \cdot B) \cdot A = \alpha \cdot (B \cdot A)}_{\text{linearita vůči násobení reálným číslem}} = \alpha \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\alpha \cdot B)$ ... $\Rightarrow \underline{\underline{\alpha \cdot B \in M}}$ $\underline{\underline{\text{a } M \text{ je lin. podprostorem}}}$

(16) **Báze** lin. prostoru V je množina $\{v_1, ..., v_n\}$ taková, že:

1) vektory $v_1, ..., v_n$ jsou lineárně nezávislé

2) $\forall u \in V$ je lineární kombinací $\{v_1, ..., v_n\}$

Tyto axiomy ověříme pro množinu $\{x^2+1, x, x-1\}$

1) Jsou-li (x^2+1), x a $(x-1)$ lin. nezávislé, pak platí: $a(x^2+1) + b(x) + c(x-1) = 0 \Leftrightarrow a=b=c=0$

$ax^2 + (b+c) \cdot x + a - c = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x^2: \underline{a=0} \\ x^0: a-c=0 \wedge a=0 \Rightarrow \underline{c=0} \\ x^1: b+c=0 \wedge c=0 \Rightarrow \underline{b=0} \end{array}\right\} \text{jsou LN} \checkmark$$

$^* ax^2+bx+c = \alpha(x^2+1) + \beta(x) + \gamma(x-1)$

$x^2: \underline{\alpha = a}$

$x^0: \alpha - \gamma = c \Rightarrow \underline{\gamma = a-c}$

$x^1: \beta + \gamma = b \Rightarrow \underline{\beta = b-a+c}$

$\checkmark$

2) $\forall p(x) = ax^2+bx+c$ musí jít zapsat jako lin. kombinaci $\{x^2+1, x, x-1\}^*$