# Řešené úlohy z Úvodu do algebry [1]

Veronika Sobotíková

katedra matematiky FEL ČVUT

Vzhledem k tomu, že se ze strany studentů často setkávám s nepochopením požadavku zdůvodnit jednotlivé kroky postupu řešení, uvádím zde na některých typech úloh, co vše by mělo správné řešení obsahovat. Jsou-li tu kvůli zjednodušení přípravy textu pro tisk některé kroky vynechány, máte připsáno, že ve vašem řešení mají být uvedeny. Poznámky, které nejsou součástí řešení úlohy, jsou psány kurzívou.

## 1 POLYNOMY

**PŘÍKLAD 1.1:** Polynom $P(x) = x^{10} + 2x^9 + 2x^8 - 625x^2 - 1250x - 1250$ rozložte v reálném oboru na součin dále nerozložitelných činitelů, víte-li, že jedním z kořenů tohoto polynomu je číslo $x_1 = -1 + j$.

*Řešení:* Protože polynom $P(x)$ má reálné koeficienty, musí být jeho kořenem také číslo $x_2 = \bar{x}_1 = -1 - j$. Tedy $P(x) = (x + 1 - j)(x + 1 + j) \cdot Q(x) = (x^2 + 2x + 2) \cdot Q(x)$, kde $Q(x)$ je polynom osmého stupně s reálnými koeficienty. Dělením polynomu $P(x)$ polynomem $x^2 + 2x + 2$ dostaneme $Q(x) = x^8 - 625$. (*Uveďte postup dělení!*).

Rozklad polynomu $Q(x)$:
$x^8 - 625 = (x^4 - 25)(x^4 + 25) = (x^2 - 5)(x^2 + 5)(x^4 + 10x^2 - 10x^2 + 25) = (x^2 - 5)(x^2 + 5) \cdot$
$\cdot ((x^2 + 5)^2 - 10x^2) = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x^2 + 5)(x^2 - \sqrt{10}x + 5)(x^2 + \sqrt{10}x + 5)$.
Dále v reálném oboru rozkládat nelze, neboť kvadratické činitele nemají reálné kořeny.

Hledaný rozklad polynomu $P(x)$ tedy je:
$P(x) = (x^2 + 2x + 2)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x^2 + 5)(x^2 - \sqrt{10}x + 5)(x^2 + \sqrt{10}x + 5)$. □

**PŘÍKLAD 1.2:** Najděte kořeny polynomu $P(x) = x^{10} - 8x^9 + 27x^8 - 48x^7 + 45x^6 + 8x^5 - 131x^4 + 240x^3 - 150x^2$ a určete jejich násobnost, víte-li, že číslo $x_1 = 2 - j$ je vícenásobným kořenem polynomu $P$.

*Řešení:* Protože polynom $P(x)$ nemá lineární ani absolutní člen, je zřejmě nula jeho dvojnásobným kořenem. Můžeme psát $P(x) = x^2 \cdot Q(x)$. Číslo $x_1$ není kořenem polynomu $x^2$, a tedy musí být kořenem polynomu $Q(x)$ (násobnost se nemění). Protože polynom $Q(x)$ má reálné koeficienty, je jeho kořenem také číslo $\bar{x}_1 = 2 + j$ (násobnost je stejná jako u $x_1$). Máme tedy $Q(x) = (x - 2 + j)^k (x - 2 - j)^k \cdot R(x) = (x^2 - 4x + 5)^k \cdot R(x)$, kde polynom $R(x)$ již nemá kořeny $2 \pm j$. Několikerým dělením polynomu $Q(x)$ polynomem $x^2 - 4x + 5$ (*postup dělení uveďte!*) zjistíme, že $k = 2$ a $R(x) = x^4 + x^2 - 6$. (*Proces dělení si můžeme zjednodušit, jestliže využijeme toho, že $x_1$ je vícenásobný kořen. V prvním dělení pak můžeme polynom $Q(x)$ dělit rovnou polynomem $(x^2 - 4x + 5)^2 = x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25$.* )

Zbývá rozložit polynom $R(x)$:
$R(x) = x^4 + x^2 - 6 = (x^2 + 3)(x^2 - 2) = (x - \sqrt{3}j)(x + \sqrt{3}j)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.

Polynom $P(x)$ má tedy tři dvojnásobné kořeny $0,\ 2 - j,\ 2 + j$ a čtyři jednoduché kořeny $\sqrt{3}j,\ -\sqrt{3}j,\ \sqrt{2},\ -\sqrt{2}$. (*Za uvedení kořenů s násobnostmi lze považovat též zápis:*
$x_{1,2} = 2 - j;\ x_{3,4} = 2 + j;\ x_{5,6} = 0;\ x_7 = \sqrt{3}j;\ x_8 = -\sqrt{3}j;\ x_9 = \sqrt{2};\ x_{10} = -\sqrt{2}$.) □

[1] Tento materiál byl původně určen studentům FEL ČVUT, kterým jsem ve školních letech 1999/2000 – 2002/2003 přednášela předmět Úvod do algebry. Tomu také odpovídají úvodní poznámka a kurzívou psané komentáře.

# 2 LINEÁRNÍ PROSTORY

**PŘÍKLAD 2.1:** V lineárním prostoru $L$ jsou dány lineárně nezávislé vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Určete, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé vektory:
a) $\vec{a} = \vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{w},\ \vec{b} = -3\vec{u} + \vec{v} + 4\vec{w},\ \vec{c} = \vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$,
b) $\vec{a} = \vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{w},\ \vec{b} = -3\vec{u} + \vec{v} + 4\vec{w},\ \vec{c} = \vec{u} - 2\vec{v} - 3\vec{w}$.

*Řešení:* **a)** Máme určit, zda z rovnosti $\alpha\,\vec{a}\ + \beta\,\vec{b}\ + \gamma\,\vec{c}\ =\ \vec{o}$ vyplývá $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Nechť tedy čísla $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ splňují uvedenou rovnost. Potom

$$\begin{aligned}\vec{o} &= \alpha(\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{w}) + \beta(-3\vec{u} + \vec{v} + 4\vec{w}) + \gamma(\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}) = \\ &= (\alpha - 3\beta + \gamma)\vec{u} + (3\alpha + \beta - 2\gamma)\vec{v} + (-2\alpha + 4\beta + 3\gamma)\vec{w}.\end{aligned}$$

Protože jsou vektory $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ lineárně nezávislé (a tedy pouze jejich triviální lineární kombinace je nulová), musí být všechny závorky v posledním výrazu rovny nule. Dostáváme tak pro $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ soustavu tří lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & - & 3\beta & + & \gamma & = & 0, \\ 3\alpha & + & \beta & - & 2\gamma & = & 0, \\ -2\alpha & + & 4\beta & + & 3\gamma & = & 0. \end{array}$$

Koeficienty této homogenní soustavy zapíšeme do matice a matici upravujeme pomocí Gaussovy eliminační metody. Dostáváme:

$$\begin{pmatrix} 1, & -3, & 1 \\ 3, & 1, & -2 \\ -2, & 4, & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & -3, & 1 \\ 0, & 10, & -5 \\ 0, & -2, & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & -3, & 1 \\ 0, & 2, & -1 \\ 0, & -2, & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & -3, & 1 \\ 0, & 2, & -1 \\ 0, & 0, & 4 \end{pmatrix}.$$

(*Napište, jaké úpravy s maticí provádíte!*) Hodnost matice soustavy je 3 a je rovna počtu neznámých. Soustava má tedy právě jedno řešení $\alpha = \beta = \gamma = 0$ a vektory $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ jsou lineárně nezávislé.

**b)** Máme opět zjistit, zda z rovnosti $\alpha\,\vec{a}\ + \beta\,\vec{b}\ + \gamma\,\vec{c}\ =\ \vec{o}$ vyplývá $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Nechť tedy čísla $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ splňují uvedenou rovnost. Potom

$$\begin{aligned}\vec{o} &= \alpha(\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{w}) + \beta(-3\vec{u} + \vec{v} + 4\vec{w}) + \gamma(\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w}) = \\ &= (\alpha - 3\beta + \gamma)\vec{u} + (3\alpha + \beta - 2\gamma)\vec{v} + (-2\alpha + 4\beta - \gamma)\vec{w}.\end{aligned}$$

Protože jsou vektory $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ lineárně nezávislé (a tedy pouze jejich triviální lineární kombinace je nulová), musí být všechny závorky v posledním výrazu rovny nule. Dostáváme tak pro $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ soustavu tří lineárních rovnic (*z důvodu nedostatku místa ji zde nevypisuji*). Koeficienty této homogenní soustavy zapíšeme do matice a matici upravujeme pomocí Gaussovy eliminační metody. Dostáváme:

$$\begin{pmatrix} 1, & -3, & 1 \\ 3, & 1, & -2 \\ -2, & 4, & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & -3, & 1 \\ 0, & 10, & -5 \\ 0, & -2, & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & -3, & 1 \\ 0, & 2, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

(*Napište, jaké úpravy s maticí provádíte!*) Hodnost matice soustavy je 2 a je menší než počet neznámých. Soustava má tedy i netriviální řešení a vektory $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ jsou lineárně závislé.

Najdeme ještě nějakou netriviální nulovou lineární kombinaci vektorů $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$. Zvolíme např. $\gamma = 2$ ( *abychom se vyhnuli zlomkům; jinak můžeme volit jakkoliv kromě nuly*). Potom z druhé rovnice máme $2\beta - 2 = 0$, tj. $\beta = 1$, a z první rovnice $\alpha - 3 + 1 = 0$, tj. $\alpha = 1$. Platí tedy $\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} = \vec{o}$.

*Poznámka:* Upozorňuji, že u úloh takovéhoto typu nebude úloha považována za vyřešenou, pokud její řešení začne sestavením matice soustavy bez jakéhokoliv zdůvodnění, jak se k této matici došlo. $\square$

**PŘÍKLAD 2.2:** $V$ a $W$ jsou podprostory lineárního prostoru $\mathbf{R}^3$. Určete bázi a dimenzi prostorů $V$, $W$, $\langle V \cup W \rangle$ a $V \cap W$, víte-li, že $V = \langle\, (1,-3,1),\ (-2,1,3),\ (-1,4,-2)\,\rangle$, $W = \langle\, (1,-4,3),\ (-1,-2,4),\ (1,-2,-1),\ (-3,-2,9)\,\rangle$.

*Řešení:* **Prostor V:** Vektory generující $V$ napíšeme jako řádky matice. Hodnost takto vzniklé matice bude rovna dimenzi podprostoru $V$. Upravujeme:

$$\begin{pmatrix} 1, & -3, & 1 \\ -2, & 1, & 3 \\ -1, & 4, & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & -3, & 1 \\ 0, & -5, & 5 \\ 0, & 1, & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & -3, & 1 \\ 0, & 1, & -1 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice je 2, a tedy také $\dim V = 2$. Jedna z bazí prostoru $V$ je $\{\,(1,-3,1),(0,1,-1)\,\}$.

**Prostor W:** Vektory generující $W$ napíšeme opět jako řádky matice. Hodnost takto vzniklé matice bude rovna dimenzi podprostoru $W$. Po úpravě dostaneme (*uveďte celý postup*):

$$\begin{pmatrix} 1, & -4, & 3 \\ -1, & -2, & 4 \\ 1, & -2, & -1 \\ -3, & -2, & 9 \end{pmatrix} \sim \quad \ldots \quad \sim \begin{pmatrix} 1, & -4, & 3 \\ 0, & 1, & -2 \\ 0, & 0, & -5 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice je 3, a tedy také $\dim W = 3$. Jedna z bazí prostoru $W$ je $\{\,(1,-4,3),(0,1,-2),(0,0,-5)\,\}$.

**Spojení prostorů V a W:** <u>1. možnost</u> (ne příliš vhodná): Vektory generující (pod)prostory $V$ a $W$ napíšeme jako řádky matice. Hodnost takto vzniklé matice bude rovna dimenzi $\langle V \cup W \rangle$. Upravujeme:

$$\begin{pmatrix} 1, & -3, & 1 \\ -2, & 1, & 3 \\ -1, & 4, & -2 \\ 1, & -4, & 3 \\ -1, & -2, & 4 \\ 1, & -2, & -1 \\ -3, & -2, & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & -3, & 1 \\ 0, & -5, & 5 \\ 0, & 1, & -1 \\ 0, & 7, & 2 \\ 0, & -5, & 5 \\ 0, & 1, & -2 \\ 0, & -11, & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & -3, & 1 \\ 0, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice je 3, a tedy také $\dim\langle V \cup W \rangle = 3$. Jedna z bazí prostoru $\langle V \cup W \rangle$ je $\{\,(1,-3,1),(0,1,-1),(0,0,1)\,\}$.

<u>2. možnost</u> (vhodná v obecném případě): Vektory bazí podprostorů $V$ a $W$ generující $\langle V \cup W \rangle$ napíšeme jako řádky matice. (*Každý vektor z V (resp. W) lze napsat jako lineární kombinaci vektorů báze V (resp. W). Proto každý vektor ze spojení podprostorů V a W lze zapsat jako lineární kombice vektorů obou bazí.*)
Hodnost takto vzniklé matice bude rovna dimenzi $\langle V \cup W \rangle$. Upravujeme:

$$\begin{pmatrix} 1, & -3, & 1 \\ 0, & 1, & -1 \\ 1, & -4, & 3 \\ 0, & 1, & -2 \\ 0, & 0, & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & -3, & 1 \\ 0, & 1, & -1 \\ 0, & -1, & 2 \\ 0, & 1, & -2 \\ 0, & 0, & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & -3, & 1 \\ 0, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice je 3, a tedy také $\dim\langle V \cup W \rangle = 3$. Jedna z bazí prostoru $\langle V \cup W \rangle$ je $\{(1,-3,1),(0,1,-1),(0,0,1)\}$. (*Nevadí, že nám vyšla jiná báze než v první možnosti, protože báze lineárního prostoru není určena jednoznačně.*)

3. možnost (použitelná jen ve speciálních případech, jako je tento): Protože spojení podprostorů $V$ a $W$ je podprostor prostoru $\mathbf{R}^3$ a $\dim\mathbf{R}^3 = 3$, musí být $\dim\langle V \cup W \rangle \leq 3$. Na druhou stranu, protože $W$ je podprostor $\langle V \cup W \rangle$ a $\dim W = 3$, musí platit
$3 \leq \dim\langle V \cup W \rangle$. Odtud už ale vyplývá, že $\dim\langle V \cup W \rangle = 3$, $W = \langle V \cup W \rangle = \mathbf{R}^3$ a bazí prostoru $\langle V \cup W \rangle$ je libovolná báze prostoru $\mathbf{R}^3$, např. $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. (*Všimněte si, že stejným způsobem jsme mohli zvolit bázi i u $W$.*)

**Průnik prostorů V a W:** K určení dimenze $V \cap W$ použijeme vztah

$$\dim V + \dim W = \dim\langle V \cup W \rangle + \dim(V \cap W).$$

Z něj dostáváme

$$\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim\langle V \cup W \rangle = 2 + 3 - 3 = 2.$$

Nalezení báze už je složitější. Označme nejdříve $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ vektory generující $V$ a $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ vektory generující $W$. Dále máme opět několik možností:

1. možnost (ne příliš vhodná): Vektor $\vec{u} \in \mathbf{R}^3$ leží v $V \cap W$ právě tehdy, když existují čísla $a_1, a_2, a_3$ a $b_1, b_2, b_3, b_4$ taková, že $\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3 = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + b_3\vec{v}_3 + b_4\vec{v}_4$. Odečteme-li nyní od výše uvedené lineární kombinace vektorů $\vec{u}_i$ lineární kombinaci vektorů $\vec{v}_j$, získáme nulový vektor. Porovnáním jednotlivých složek vektorů tak dostaneme pro $a_i, b_j$ homogenní soustavu tří lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
a_1 & - & 2a_2 & - & a_3 & - & b_1 & + & b_2 & - & b_3 & + & 3b_4 & = & 0 \\
-3a_1 & + & a_2 & + & 4a_3 & + & 4b_1 & + & 2b_2 & + & 2b_3 & + & 2b_4 & = & 0 \\
a_1 & + & 3a_2 & - & 2a_3 & - & 3b_1 & - & 4b_2 & + & b_3 & - & 9b_4 & = & 0.
\end{array}$$

Úpravami matice této soustavy (*uveďte postup!*) zjistíme, že soustava je ekvivalentní se soustavou

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
a_1 & - & 2a_2 & - & a_3 & - & b_1 & + & b_2 & - & b_3 & + & 3b_4 & = & 0 \\
 & - & 5a_2 & + & a_3 & + & b_1 & + & 5b_2 & - & b_3 & + & 11b_4 & = & 0 \\
 & & & & & - & b_1 & & & + & b_3 & - & b_4 & = & 0.
\end{array}$$

Můžeme tedy libovolně volit například hodnoty $b_4 = r, b_3 = s, b_2 = t$ a $a_3 = z$. Pak dopočítáme (*uveďte postup*) $b_1 = s - r, a_2 = 1/5z + 2r + t, a_1 = 7/5z + t + 2s$. Nyní stačí dosadit $a_i$ do vyjádření vektoru $\vec{u}$ na začátku našich úvah. Dostaneme

$$\vec{u} = (7/5z + t + 2s)(1,-3,1) + (1/5z + 2r + t)(-2,1,3) + z(-1,4,-2) =$$

$$= (-t + 2s - 4r, -2t - 6s + 2r, 4t + 2s + 6r) = t(-1,-2,4) + s(2,-6,2) + r(-4,2,6).$$

(*Pro kontrolu je vhodné dosadit též $b_j$ do vyjádření vektoru $\vec{u}$. Musíme dostat totéž, co při dosazení $a_i$.*) Je tedy vidět, že $V \cap W = \langle(-1,-2,4),(2,-6,2),(-4,2,6)\rangle$. Protože už víme, že $\dim(V \cap W) = 2$, dostaneme bázi průniku podprostorů tak, že z vektorů generujících $V \cap W$ vybereme jakékoliv dva lineárně nezávislé. Báze je tedy například $\{(-1,-2,4),(2,-6,2)\}$.

2. možnost (vhodná v obecném případě): (*K vyjádření vektoru ležícího v průniku $V \cap W$ použijeme báze $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ a $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$ prostorů $V$ a $W$.*) Vektor $\vec{u} \in \mathbf{R}^3$ leží v $V \cap W$ právě tehdy, když existují čísla $a_1, a_2$ a $b_1, b_2, b_3$ taková, že $\vec{u} = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 = b_1\vec{y}_1 + b_2\vec{y}_2 + b_3\vec{y}_3$. Odečteme-li nyní od výše uvedené lineární kombinace vektorů $\vec{x}_i$ lineární kombinaci vektorů

$\vec{y}_j$, získáme nulový vektor. Porovnáním jednotlivých složek vektorů tak dostaneme pro $a_i, b_j$ homogenní soustavu tří lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} a_1 & & & - & b_1 & & & & & = & 0 \\ -3a_1 & + & a_2 & + & 4b_1 & - & b_2 & & & = & 0 \\ a_1 & - & a_2 & - & 3b_1 & + & 2b_2 & + & 5b_3 & = & 0. \end{array}$$

Úpravami matice této soustavy (*uveďte postup!*) zjistíme, že soustava je ekvivalentní se soustavou

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} a_1 & & & - & b_1 & & & & = & 0 \\ & & a_2 & + & b_1 & - & b_2 & & = & 0 \\ & & & - & b_1 & + & b_2 & + & 5b_3 & = & 0. \end{array}$$

Můžeme tedy libovolně volit například hodnoty $b_3 = t, b_2 = s$. Pak dopočítáme (*uveďte postup*) $b_1 = s + 5t, a_2 = -5t, a_1 = s + 5t$. Nyní stačí dosadit $a_i$ do vyjádření vektoru $\vec{u}$ na začátku našich úvah. Dostaneme
$\vec{u} = (s + 5t)(1, -3, 1) - 5t(0, 1, -1) = (s + 5t, -3s - 20t, s + 10t) = s(1, -3, 1) + t(5, -20, 10)$.
(*Pro kontrolu je opět vhodné dosadit též $b_j$ do vyjádření vektoru $\vec{u}$.*)
Je tedy vidět, že $V \cap W = \langle (1, -3, 1), (5, -20, 10) \rangle$. Protože už víme, že $\dim(V \cap W) = 2$, tvoří dva vektory generující $V \cap W$ také bázi tohoto prostoru. (*Místo vektoru* $(5, -20, -10)$ *můžeme vzít vektor* $(1, -4, -2)$.)

3. možnost (použitelná jen ve speciálních případech, jako je tento): Protože průnik $V \cap W$ je podprostorem prostoru $V$ a $\dim V = \dim(V \cap W) = 2$, musí platit $V \cap W = V$. Bazí průniku prostorů $V$ a $W$ je tedy libovolná báze prostoru $V$, tj. např. $\{(1, -3, 1), (0, 1, -1)\}$ (*viz výše*).

$\square$

**PŘÍKLAD 2.3:** Nechť $B = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$ a $C = (\vec{v_1}, \vec{v_2})$ jsou uspořádané báze lineárního prostoru $L$ a $\vec{u}, \vec{v} \in L$. Určete $\langle \vec{v} \rangle_B$, $\langle \vec{u} \rangle_C$, víte-li, že $\vec{v_1} = \vec{u_1} - 2\vec{u_2}$, $\vec{v_2} = 3\vec{u_1} - 5\vec{u_2}$ a $\langle \vec{v} \rangle_C = (-4, 3)$, $\langle \vec{u} \rangle_B = (2, -3)$.

*Řešení:* **a)** První část úlohy je velmi jednoduchá: Protože $\langle \vec{v} \rangle_C = (-4, 3)$, máme

$$\vec{v} = -4\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 = -4(\vec{u_1} - 2\vec{u_2}) + 3(3\vec{u_1} - 5\vec{u_2}) = 5\vec{u}_1 - 7\vec{u}_2.$$

Platí tedy $\langle \vec{v} \rangle_B = (5, -7)$.

**b)** Druhá část úlohy je trochu složitější. Potřebujeme vektor $\vec{u}$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$. Předpokládejme tedy, že $\vec{u} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$. Protože $\langle \vec{u} \rangle_B = (2, -3)$, musí platit

$$2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 = \vec{u} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \alpha(\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2) + \beta(3\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2) = (\alpha + 3\beta)\vec{u}_1 + (-2\alpha - 5\beta)\vec{u}_2.$$

Protože vektory $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ tvoří bázi lineárního prostoru $L$, lze každý vektor z $L$ (tedy i $\vec{u}$) vyjádřit právě jedním způsobem jako jejich lineární kombinaci. Porovnáme-li tedy koeficienty ve dvou výše uvedených vyjádřeních vektoru $\vec{u}$ jako lineární kombinace vektorů $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, dostaneme

$$\begin{array}{rcrcr} \alpha & + & 3\beta & = & 2 \\ -2\alpha & - & 5\beta & = & -3 \end{array}$$

Řešením této soustavy (*rozepište!*) je dvojice $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$, a tedy $\langle \vec{u} \rangle_C = (-1, 1)$.

$\square$

# 3 Soustavy lineárních rovnic

**PŘÍKLAD 3.1:** V závislosti na $a \in \mathbf{R}$ řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & + & 11x_4 & = & a. \end{array}$$

Pokud má soustava řešení, nalezněte také prostor $M$ všech řešení přidružené homogenní soustavy, jeho bázi a dimenzi.

*Řešení:* Sestavíme rozšířenou matici soustavy a upravujeme ji pomocí Gaussovy eliminační metody:

$$\left(\mathbf{A}|\vec{b}^T\right) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & 2, & -1, & 4 & 2 \\ 2, & -1, & 1, & 1 & 1 \\ 1, & 7, & -4, & 11 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & 2, & -1, & 4 & 2 \\ 0, & -5, & 3, & -7 & -3 \\ 0, & 5, & -3, & 7 & a-2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & 2, & -1, & 4 & 2 \\ 0, & -5, & 3, & -7 & -3 \\ 0, & 0, & 0, & 0 & a-5 \end{array}\right).$$

Hodnost matice soustavy $h(\mathbf{A})$ je vždy rovna dvěma (a přidružená homogenní soustava má tedy 4 (*počet neznámých*) - 2 (*hodnost matice soustavy*) = 2 lineárně nezávislá řešení). Hodnost rozšířené matice soustavy závisí na $a$: $h(\mathbf{A}|\vec{b}^T) = 2$ pro $a = 5$, $h(\mathbf{A}|\vec{b}^T) = 3$ pro $a \neq 5$. Podle Frobeniovy věty má soustava řešení pouze pro $a = 5$.

Nechť tedy dále $a = 5$.

V druhé rovnici upravené soustavy můžeme hodnoty dvou neznámých volit. Nechť tedy $x_4 = s,\ x_3 = t$, kde $s,\ t$ jsou libovolná reálná čísla. Pro $x_2$ tak máme:

$$-5x_2 + 3t - 7s = -3, \qquad \text{tj.} \qquad x_2 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}\,t - \frac{7}{5}\,s.$$

Dosadíme-li nyní do první rovnice za $x_2,\ x_3,\ x_4$, dostaneme

$$x_1 + 2(\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\,t - \frac{7}{5}\,s) - t + 4s, \quad \text{tj.} \quad x_1 = 2 - \frac{6}{5} - \frac{6}{5}\,t + \frac{14}{5}\,s + t - 4s = \frac{4}{5} - \frac{t}{5} - \frac{6}{5}\,s.$$

Každé řešení soustavy lze tedy zapsat ve tvaru

$$\vec{x} = (\frac{4}{5} - \frac{t}{5} - \frac{6}{5}\,s, \frac{3}{5} + \frac{3}{5}\,t - \frac{7}{5}\,s,\ t,\ s) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0) + t(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, 0) + s(-\frac{6}{5}, -\frac{7}{5}, 0, 1) =$$

$$= \vec{x}_0 + t\vec{x}_1 + s\vec{x}_2, \quad s,\ t \in \mathbf{R}.$$

(*Abychom neměli tolik zlomků, můžeme označit* $t_1 = \frac{t}{5},\ s_1 = \frac{s}{5}$. *Potom*

$$x_1 = \frac{4}{5} - t_1 - 6s_1,\ x_2 = \frac{3}{5} + 3t_1 - 7s_1,\ x_3 = 5t_1,\ x_4 = 5s_1,$$

*což zapsáno vektorově dává*

$$\vec{x} = (\frac{4}{5} - t_1 - 6s_1, \frac{3}{5} + 3t_1 - 7s_1, 5t_1, 5s_1) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0) + t_1(-1, 3, 5, 0) + s_1(-6, -7, 0, 5)).$$

Protože vektor $x_0$ je řešením zadané soustavy (*ověřte dosazením nuly za $s$ a $t$*) a dvě řešení nehomogenní soustavy se liší právě o řešení přidružené homogenní soustavy, musí být vektor $t_1\vec{x}_1 + s_1\vec{x}_2$ obecným řešením přidružené homogenní soustavy.

Proto $M = \langle \vec{x}_1,\ \vec{x}_2 \rangle = \langle (-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, 0),\ (-\frac{6}{5}, -\frac{7}{5}, 0, 1) \rangle$. Protože jsou vektory $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ lineárně nezávislé, je množina $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ bazí prostoru $M$ všech řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{x}^T = \vec{o}^T$ a $\dim M = 2$ (*srovnejte s poznámkou u hodnosti matice* $\mathbf{A}$). $\square$

**PŘÍKLAD 3.2:** V závislosti na $a \in \mathbf{R}$ řešete soustavu lineárních rovnic s rozšířenou maticí soustavy

$$\left(\mathbf{A}|\vec{b}^T\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a, & 1, & 1 & a \\ 1, & a, & 1 & 1 \\ 1, & 1, & a & a \end{array}\right).$$

*Řešení:* Abychom zjistili, kdy lze k řešení zadané soustvy rovnic použít Cramerovo pravidlo, spočítáme nejdříve determinant matice $\mathbf{A}$:

$$D = det\mathbf{A} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2).$$

Determinant je nenulový právě tehdy, když $a \notin \{1; -2\}$. Uvažujme proto dále tři možnosti:

**a)** $\underline{a \notin \{1, -2\}}$: V tomto případě má soustava právě jedno řešení a k jeho nalezení lze použít Cramerovo pravidlo. Počítáme:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a, & 1, & 1 \\ 1, & a, & 1 \\ a, & 1, & a \end{vmatrix} = a^3 + a + 1 - a^2 - a - a = a^3 - a^2 - a + 1 = (a-1)^2(a+1).$$

*Poznámka:* Determinant $D_1$ je také možné počítat tak, že od prvního sloupce matice odečteme třetí sloupec a pak použijeme rozvoj determinantu podle prvního sloupce (v kterém už je jen jeden nenulový prvek). (*Tento postup budu používat často v případech, kdy je v matici málo nul a některé její řádky nebo sloupce jsou "velmi podobné"*):

$$D_1 = \begin{vmatrix} a, & 1, & 1 \\ 1, & a, & 1 \\ a, & 1, & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1, & 1, & 1 \\ 0, & a, & 1 \\ 0, & 1, & a \end{vmatrix} = (a-1)(-1)^2(a^2-1) = (a-1)^2(a+1).$$

(*Všimněte si, že při tomto způsobu výpočtu determinantu je jednodušší najít jeho rozklad na součin.*)

Podobně spočítáme

$$D_2 = \begin{vmatrix} a, & a, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \\ 1, & a, & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 1 \\ 1, & a-1, & a \end{vmatrix} = (a-1)(-1)^5(a-1) = -(a-1)^2$$

a

$$D_3 = \begin{vmatrix} a, & 1, & a \\ 1, & a, & 1 \\ 1, & 1, & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & 1, & 0 \\ 1, & a, & 0 \\ 1, & 1, & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)(-1)^6(a^2-1) = (a-1)^2(a+1).$$

Odtud dostáváme

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{(a-1)^2(a+1)}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a+1}{a+2}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{-1}{a+2},$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{(a-1)^2(a+1)}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a+1}{a+2}.$$

Řešením soustavy je tedy vektor

$$\vec{x} = \left( \frac{a+1}{a+2}, \frac{-1}{a+2}, \frac{a+1}{a+2} \right).$$

**b)** $\underline{a = 1}$: V tomto případě Cramerovo pravidlo použít nelze. Dosadíme proto $a$ do soustavy a tu pak vyřešíme Gaussovou eliminační metodou. Máme

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1, & 1, & 1 & 1 \\ 1, & 1, & 1 & 1 \\ 1, & 1, & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1, & 1, & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Hodnost matice soustavy i hodnost rozšířené matice soustavy jsou rovny jedné. Řešení tedy existuje a závisí na dvou parametrech. (*"počet parametrů = počet neznámých - hodnost matice soustavy"*). Máme:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \qquad \text{tj.} \quad x_1 = 1 - x_2 - x_3,$$

$x_2,\ x_3$ mohou být libovolná reálná čísla. Řešením soustavy jsou tak všechny vektory

$$\vec{x} = (1 - x_2 - x_3, x_2, x_3) = (1,0,0) + x_2(-1,1,0) + x_3(-1,0,1), \quad x_2,\ x_3 \ \in \ \mathbf{R}.$$

Vektor $(1,0,0)$ je partikulárním řešením nehomogenní soustavy, vektor $x_2(-1,1,0)+x_3(-1,0,1)$ představuje obecné řešení přidružené homogenní soustavy.

**c)** $\underline{a = -2}$: Ani v tomto případě nelze použít Cramerovo pravidlo. Opět dosadíme $a$ do soustavy a řešíme Gaussovou eliminací:

$$\left( \begin{array}{rrr|r} -2, & 1, & 1 & -2 \\ 1, & -2, & 1 & 1 \\ 1, & 1, & -2 & -2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{rrr|r} 1, & 1, & -2 & -2 \\ 0, & -3, & 3 & 3 \\ 0, & 3, & -3 & -6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{rrr|r} 1, & 1, & -2 & -2 \\ 0, & -3, & 3 & 3 \\ 0, & 0, & 0 & -3 \end{array} \right)$$

Tentokrát je $h(\mathbf{A}) = 2 \neq h(\mathbf{A}|\vec{b}^T) = 3$. Podle Frobeniovy věty soustava nemá řešení. $\square$

# 4 LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

**PŘÍKLAD 4.1:** Je dáno lineární zobrazení $A : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ takové, že pro vektory $\vec{u}_1 = (1, 0, 2),\ \vec{u}_2 = (-3, 4, -2),\ \vec{u}_3 = (0, 2, 1)$ platí $A(\vec{u}_1) = (1, 3),\ A(\vec{u}_2) = (2, -1),\ A(\vec{u}_3) = (-3, 5)$. Najděte

**a)** A(-1,2,1),

**b)** jádro, defekt, obraz a hodnost zobrazení $A$,

**c)** všechny vektory $\vec{v}$, pro které platí $A(\vec{v}) = (-1, 4)$,

**d)** matici zobrazení $A$ vzhledem k uspořádaným bazím $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ a $C = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, kde $v_1 = (1, 2),\ v_2 = (2, 0)$.

*Řešení:* Nejdříve ověříme, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ jsou lineárně nezávislé. Protože hodnost matice je rovna maximálnímu počtu jejích lineárně nezávislých řádků, budou $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když hodnost matice s řádky tvořenými těmito vektory bude rovna třem. Upravujeme

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 2 \\ -3, & 4, & -2 \\ 0, & 2, & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 0, & 2 \\ 0, & 4, & 4 \\ 0, & 2, & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 0, & 2 \\ 0, & 4, & 4 \\ 0, & 0, & -2 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice je 3, a tedy vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ jsou lineárně nezávislé a $B$ je uspořádaná báze v $\mathbf{R}^3$. To znamená, že zobrazení je určeno dostatečně.

**a)** Potřebujeme vyjádřit vektor $\vec{u} = (-1, 2, 1)$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$. (Takovéto vyjádření existuje a je právě jedno, protože $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ tvoří bázi $\mathbf{R}^3$.) Hledáme tedy čísla $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ taková, že

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3$$

neboli

$$(-1, 2, 1) = \alpha_1(1, 0, 2) + \alpha_2(-3, 4, -2) + \alpha_3(0, 2, 1) = (\alpha_1 - 3\alpha_2, 4\alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3).$$

Porovnáním jednotlivých složek vektorů dostáváme pro $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha_1 & - & 3\alpha_2 & & & = & -1 \\ & & 4\alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 2 \\ 2\alpha_1 & - & 2\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 1. \end{array}$$

Řešením této soustavy dostaneme (*uveďte postup řešení*) $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$. Tedy při využití linearity zobrazení $A$ máme

$A(\vec{u}) = A(2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3) = 2A(\vec{u}_1) + A(\vec{u}_2) - A(\vec{u}_3) = 2(1, 3) + (2, -1) - (-3, 5) = (7, 0).$

**b)** Podle definice jádra platí $\vec{v} \in \mathrm{Ker}A$ právě tehdy, když $A(\vec{v}) = (0, 0)$. Nechť tedy $\vec{v} \in \mathrm{Ker}A$. Protože $B$ je báze $\mathbf{R}^3$, existují čísla $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ taková, že $\vec{v} = \beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + \beta_3\vec{u}_3$. Vzhledem k linearitě $A$ musí platit:

$(0, 0) = A(\vec{v}) = \beta_1 A(\vec{u}_1) + \beta_2 A(\vec{u}_2) + \beta_3 A(\vec{u}_3) = \beta_1(1, 3) + \beta_2(2, -1) + \beta_3(-3, 5) =$
$= (\beta_1 + 2\beta_2 - 3\beta_3, 3\beta_1 - \beta_2 + 5\beta_3)$

neboli $\beta_1 + 2\beta_2 - 3\beta_3 = 0$ a $3\beta_1 - \beta_2 + 5\beta_3 = 0$.

Dostali jsme tak pro $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ soustavu dvou lineárních rovnic, kterou jednoduše vyřešíme pomocí Gaussovy eliminační metody:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & -3 \\ 3, & -1, & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 2, & -3 \\ 0, & -7, & 14 \end{pmatrix}.$$

Odtud $\beta_3 = t \in \mathbf{R}$ je libovolné, $\beta_2 = 2t$, $\beta_1 = 3t - 4t = -t$. Dosadíme-li nyní do vyjádření $\vec{v}$, máme

$$\vec{v} \;= \beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + \beta_3\vec{u}_3 = -t(1,0,2) + 2t(-3,4,-2) + t(0,2,1) = t(-7,10,-5), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Tedy $\mathrm{Ker}A = \langle(-7,10,-5)\rangle$ a $\mathrm{def}A = \dim(\mathrm{Ker}A) = 1$.

Protože každý vektor z $\mathbf{R}^3$ lze zapsat jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, a tudíž jeho obraz jako lineární kombinaci vektorů $A(\vec{u}_1), A(\vec{u}_2), A(\vec{u}_3)$, stačí zjistit, jak vypadá lineární obal vektorů $A(\vec{u}_1), A(\vec{u}_2), A(\vec{u}_3)$.

Nejdříve zjistíme dimenzi tohoto lineárního obalu. Protože hodnost matice je taká rovna dimenzi lineárního obalu jejích řádkových vektorů, stačí najít hodnost matice s řádky tvořenými vektory $A(\vec{u}_1), A(\vec{u}_2), A(\vec{u}_3)$. Upravujeme:

$$\begin{pmatrix} 1, & 3 \\ 2, & -1 \\ -3, & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 3 \\ 0, & -7 \\ 0, & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 3 \\ 0, & -7 \end{pmatrix}.$$

Hodnost zkoumané matice je rovna dvěma, a proto je i $\dim A(\mathbf{R^3}) = 2$. Tedy $A(\mathbf{R^3})$ je podprostorem $\mathbf{R}^2$ stejné dimenze jako $\mathbf{R}^2$, což znamená, že $A(\mathbf{R}^3) = \mathbf{R}^2$.

**c)** Hledáme všechny vektory $\vec{w} \in \mathbf{R}^3$, pro které platí $A(\vec{w}) = (-1,4)$. Můžeme postupovat stejně jako při hledání jádra. Je-li $A(\vec{w}) = (-1,4)$ a $\vec{w} = \gamma_1\vec{u}_1 + \gamma_2\vec{u}_2 + \gamma_3\vec{u}_3$, musí platit

$$(-1,4) = A(\vec{w}) = \gamma_1 A(\vec{u}_1) + \gamma_2 A(\vec{u}_2) + \gamma_3 A(\vec{u}_3) =$$
$$= \gamma_1(1,3) + \gamma_2(2,-1) + \gamma_3(3,-5) = (\gamma_1 + 2\gamma_2 - 3\gamma_3, 3\gamma_1 - \gamma_2 + 5\gamma_3).$$

Řešením takto získané soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} \gamma_1 & + & 2\gamma_2 & - & 3\gamma_3 & = & -1 \\ 3\gamma_1 & - & \gamma_2 & + & 5\gamma_3 & = & 4 \end{array}$$

dostáváme: $\gamma_3 = t \in \mathbf{R}$ je libovolné, $\gamma_2 = 2t - 1$, $\gamma_1 = -1 - 2(2t-1) + 3t = -t + 1$. (*Porovnejte se soustavou a jejím řešením v předchozí části.*)

Tedy $A(\vec{w}) = (-1,4)$ právě tehdy, když
$\vec{w} = (-t+1)(1,0,2) + (2t-1)(-3,4,-2) + t(0,2,1) = t(-7,10,-5) + (2,-4,-2)$,
kde $t \in \mathbf{R}$.

**d)** Označíme $\mathbf{A} = [A; B, C]$. Pro každý vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ má platit

$$\mathbf{A} \cdot \langle\vec{x}\rangle_B^T = \langle A(\vec{x})\rangle_C^T.$$

Speciálně pro $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$:

$$\mathbf{A} \cdot \langle\vec{u}_1\rangle_B^T = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \langle A(\vec{u}_1)\rangle_C^T = \langle(1,3)\rangle_C^T$$

(tedy $\langle(1,3)\rangle_C^T$ je první sloupec matice $A$),

$$\mathbf{A} \cdot \langle\vec{u}_2\rangle_B^T = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \langle A(\vec{u}_2)\rangle_C^T = \langle(2,-1)\rangle_C^T$$

(tedy $\langle(2,-1)\rangle_C^T$ je druhý sloupec matice $A$),

$$\mathbf{A}\cdot\langle\vec{u}_3\rangle_B^T=\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\langle A(\vec{u}_3)\rangle_C^T=\langle(-3,5)\rangle_C^T$$

(tedy $\langle(-3,5)\rangle_C^T$ je třetí sloupec matice $A$).

Snadno ověříme (*uveďte postup!*), že

$$\begin{array}{rclcl}
(1,3) &=& \frac{3}{2}\vec{v}_1 - \frac{1}{4}\vec{v}_2 & \text{tj.} & \langle(1,3)\rangle_C = (\frac{3}{2},-\frac{1}{4}),\\
(2,-1) &=& -\frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{5}{4}\vec{v}_2 & \text{tj.} & \langle(2,-1)\rangle_C = (-\frac{1}{2},\frac{5}{4}),\\
(-3,5) &=& \frac{5}{2}\vec{v}_1 - \frac{11}{4}\vec{v}_2 & \text{tj.} & \langle(-3,5)\rangle_C = (\frac{5}{2},-\frac{11}{4}).
\end{array}$$

Celkem tak dostáváme

$$\mathbf{A}=[A;B,C]=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}, & -\frac{1}{2}, & \frac{5}{2}\\ -\frac{1}{4}, & \frac{5}{4}, & -\frac{11}{4}\end{pmatrix}.$$

□

**PŘÍKLAD 4.2:** Ověřte, že zobrazení $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ dané předpisem

$$f(x_1,x_2)=(x_1+2x_2,-3x_1+x_2,2x_1-x_2)$$

je lineární. Najděte matici zobrazení $f$ vzhledem k uspopřádaným bazím $B=(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$, $C=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$, kde $\vec{u}_1=(2,1)$, $\vec{u}_2=(1,2)$ a $\vec{v}_1=(1,1,1)$, $\vec{v}_2=(1,1,0)$, $\vec{v}_3=(1,0,0)$. Dále nalezněte jádro zobrazení $f$.

*Řešení:* Ověříme, že $f$ je lineární: Nechť $\vec{x}=(x_1,x_2)$ a $\vec{y}=(y_1,\ y_2)$ jsou dva libovolné vektory z $\mathbf{R}^2$. Pak

$$f(\vec{x}+\vec{y})=f(x_1+y_1,x_2+y_2)=((x_1+y_1)+2(x_2+y_2),-3(x_1+y_1)+(x_2+y_2),2(x_1+y_1)-(x_2+y_2))=$$

$$=(x_1+2x_2,-3x_1+x_2,2x_1-x_2)+(y_1+2y_2,-3y_1+y_2,2y_1-y_2)=f(\vec{x})+f(\vec{y}).$$

Je-li dále $\alpha$ libovolné reálné číslo, máme:

$$f(\alpha\vec{x})=f(\alpha x_1,\alpha x_2)=(\alpha x_1+2\alpha x_2,-3\alpha x_1+\alpha x_2,2\alpha x_1-\alpha x_2)=$$

$$=\alpha(x_1+2x_2,-3x_1+x_2,2x_1-x_2)=\alpha f(\vec{x}).$$

Zobrazení $f$ je tedy lineární.

Nyní najdeme požadovanou matici zobrazení $f$ vzhledem k uspořádaným bazím $B$ a $C$. Matice $\mathbf{A}=[f;B,C]$ je typu $(3,2)$ a má pro ní platit (mimo jiné)

$$\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\mathbf{A}\cdot\langle\vec{u}_1\rangle_B^T=\langle f(\vec{u}_1)\rangle_C^T,$$

$$\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\mathbf{A}\cdot\langle\vec{u}_2\rangle_B^T=\langle f(\vec{u}_2)\rangle_C^T.$$

Tedy $\langle f(\vec{u}_1)\rangle_C^T$ je první sloupec matice $\mathbf{A}$ a $\langle f(\vec{u}_2)\rangle_C^T$ je druhý sloupec matice $A$.

Snadno ověříme (*uveďte postup !*), že

$$f(\vec{u}_1) = (4, -5, 3) = 3\vec{v}_1 - 8\vec{v}_2 + 9\vec{v}_3, \qquad \text{tj. } \langle f(\vec{u}_1)\rangle_C = (3, -8, 9)$$

a

$$f(\vec{u}_2) = (5, -1, 0) = -\vec{v}_2 + 6\vec{v}_3, \qquad \text{tj. } \langle f(\vec{u}_2)\rangle_C = (0, -1, 6).$$

Celkem tak dostáváme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3, & 0 \\ -8, & -1 \\ 9, & 6 \end{pmatrix}.$$

Jádro $f$ tvoří všechny vektory $\vec{x} = (x_1, x_2)$, pro které platí

$$f(\vec{x}) = (0, 0, 0) \qquad \text{neboli} \qquad \mathbf{A} \cdot \langle \vec{x}\rangle_B^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Potřebujeme tedy najít všechna řešení homogenní soustavy lineárních rovnic, jejíž maticí je matice $\mathbf{A}$.

Upravujeme:

$$\begin{pmatrix} 3, & 0 \\ -8, & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3, & 0 \\ 0, & -3 \\ 0, & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3, & 0 \\ 0, & -3 \end{pmatrix}.$$

Protože hodnost matice soustavy je rovna počtu neznámých, má soustava pouze triviální řešení, a tedy $\mathrm{Ker} f = \{\vec{o}_{\mathbf{R}^2}\}$. $\square$

**PŘÍKLAD 4.3:** Lineární zobrazení $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ má vzhledem ke standardní uspořádané bázi $E = ((1, 0), (0, 1))$ matici

$$[h; E, E] = \begin{pmatrix} 2, & -4 \\ -1, & 3 \end{pmatrix}.$$

Najděte matici tohoto zobrazení vzhledem k uspořádaným bázím $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, $C = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, kde $\vec{u}_1 = (1, 1)$, $\vec{u}_2 = (-1, 1)$ a $\vec{v}_1 = (0, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, -1)$.

*Řešení:* Označme $\mathbf{A} = [h; B, C]$. Pak

$$\langle h(\vec{u}_1)\rangle_E^T = \mathbf{A} \cdot \langle \vec{u}_1\rangle_E^T = \begin{pmatrix} 2, & -4 \\ -1, & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a

$$\langle h(\vec{u}_2)\rangle_E^T = \mathbf{A} \cdot \langle \vec{u}_2\rangle_E^T = \begin{pmatrix} 2, & -4 \\ -1, & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Tedy $h(\vec{u}_1) = -2(1, 0) + 2(0, 1) = (-2, 2)$ a $h(\vec{u}_2) = -6(1, 0) + 4(0, 1) = (-6, 4)$.

Nyní najdeme souřadnice $h(\vec{u}_1)$ a $h(\vec{u}_2)$ v uspořádané bázi $C$. Hledáme tedy čísla $\alpha_1,\ \alpha_2$ a $\beta_1,\ \beta_2$ tak, aby platilo

$$(-2, 2) = \alpha_1(0, 1) + \alpha_2(2, -1)$$

a

$$(-6, 4) = \beta_1(0, 1) + \beta_2(2, -1).$$

Standardním způsobem (*uveďte postup!*) dostaneme, že $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -1$ a $\beta_1 = 1,\ \beta_2 = -3$, čili $\langle h(\vec{u}_1)\rangle_C = (1, -1)$ a $\langle h(\vec{u}_2)\rangle_C = (1, -3)$.

Označíme-li nyní $\mathbf{B} = [h; B, C]$ ($\mathbf{B}$ *je typu*$(2,2)$), zjišťujeme, že má platit

$$\mathbf{B} \cdot \langle \vec{u}_1 \rangle_E^T = \mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \langle h(\vec{u}_1) \rangle_C^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{B} \cdot \langle \vec{u}_2 \rangle_E^T = \mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \langle h(\vec{u}_2) \rangle_C^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Tedy první sloupec matice $\mathbf{B}$ je $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, druhý sloupec matice $\mathbf{B}$ je $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ a

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & -3 \end{pmatrix}.$$

□

**PŘÍKLAD 4.4:** Je dáno lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ takové, že

$$\mathbf{A} = [f; B, C] = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -2, & 1 \\ 0, & -2 \end{pmatrix},$$

kde $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2) = ((1,1),(2,0))$ a $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3) = ((1,1,1),(2,1,0),(0,1,0))$ jsou uspořádané báze v $\mathbf{R}^2$ resp. $\mathbf{R}^3$.

Dále je dáno zobrazení $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ takové, že pro každé $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ platí

$$g(\vec{x}) = g(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, 2x_3 - x_2).$$

Najděte matici $\mathbf{H}$ složeného zobrazení $g \circ f$ vzhledem k uspořádaným bazím $B$ a $D$, kde $D = (\vec{d}_1, \vec{d}_2) = ((0,-2),(1,1))$.

*Řešení:* **a)** Ověříme, že $g$ je lineární: Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ jsou libovolné. Potom

$$g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = g(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) =$$
$$= (2(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_3 + \beta y_3), 2(\alpha x_3 + \beta y_3) - (\alpha x_2 + \beta y_2)) =$$
$$= (2\alpha x_1 - \alpha x_3 + 2\beta y_1 - \beta y_3, 2\alpha x_3 - \alpha x_2 + 2\beta y_3 - \beta y_2) =$$
$$= \alpha(2x_1 - x_3, 2x_3 - x_2) + \beta(2y_1 - y_3, 2y_3 - y_2) = \alpha g(\vec{x}) + \beta g(\vec{y}).$$

Zobrazení $g$ je tedy lineární.

**b)** Nalezení matice $\mathbf{H}$.

<u>1. možnost:</u> Matice $\mathbf{H}$ je taková matice, že pro všechna $\vec{x} \in \mathbf{R}^2$ platí

$$\mathbf{H} \cdot \langle \vec{x} \rangle_B^T = \langle (g \circ f)(\vec{x}) \rangle_D^T.$$

Matice $\mathbf{H}$ je tedy typu $(2,2)$,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11}, & h_{12} \\ h_{21}, & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Pro vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ zřejmě platí $\langle \vec{b}_1 \rangle_B = (1,0)$, $\langle \vec{b}_2 \rangle_B = (0,1)$. Tedy, dosadíme-li do výše uvedeného vztahu za $\vec{x}$ postupně vektory $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, dostaneme:

$$\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \cdot \langle \vec{b}_1 \rangle_B^T = \langle (g \circ f)(\vec{b}_1) \rangle_D^T$$

a

$$\begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \cdot \langle \vec{b}_2 \rangle_B^T = \langle (g \circ f)(\vec{b}_2) \rangle_D^T.$$

Nalezneme nejprve $\langle (g \circ f)(\vec{b}_1) \rangle_D^T$. Máme

$$\langle f(\vec{b}_1) \rangle_C^T = \mathbf{A} \cdot \langle \vec{b}_1 \rangle_B^T = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -2, & 1 \\ 0, & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tedy $f(\vec{b}_1) = 1\vec{c}_1 - 2\vec{c}_2 + 0\vec{c}_3 = (1, 1, 1) - 2(2, 1, 0) = (-3, -1, 1)$. Z definice $g$ pak dostáváme

$$(g \circ f)(\vec{b}_1) = g(-3, -1, 1) = (2(-3) - 1, 2 \cdot 1 - (-1)) = (-7, 3).$$

Hledáme nyní $\alpha, \beta$ tak, aby

$$(-7, 3) = \alpha\vec{d}_1 + \beta\vec{d}_2 = \alpha(0, -2) + \beta(1, 1) = (\beta, -2\alpha + \beta).$$

Snadno zjistíme, že $\alpha = -5, \beta = -7$. (*Rozepište!*) Tedy $\langle (g \circ f)(\vec{b}_1) \rangle_D = (-5, -7)$.

Podobně dostaneme, že $\langle (g \circ f)(\vec{b}_2) \rangle_D = \langle g(2, -1, 0) \rangle_D = \langle (4, 1) \rangle_D = (\frac{3}{2}, 4)$. (*Rozepište!*)

Máme tak

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -5, & \frac{3}{2} \\ -7, & 4 \end{pmatrix}.$$

<u>2.možnost:</u> Protože platí $\mathbf{H} = [g \circ f; B, D] = [g; C, D] \cdot [f; B, C]$ a $[f; B, C] = \mathbf{A}$ známe, stačí nalézt matici $\mathbf{B} = [g; C, D]$. Pro $\mathbf{B}$ a bázové vektory $\vec{c}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ musí platit

$$\mathbf{B} \cdot \langle \vec{c}_i \rangle_C^T = \langle g(\vec{c}_i) \rangle_D^T.$$

Máme

$$g(\vec{c}_1) = g(1, 1, 1) = (1, 1), \quad g(\vec{c}_2) = g(2, 1, 0) = (4, -1), \quad g(\vec{c}_3) = g(0, 1, 0) = (0, -1).$$

Snadno zjistíme (*rozepište!*), že

$$(1, 1) = 0 \cdot \vec{d}_1 + 1 \cdot \vec{d}_2, \quad (4, -1) = \frac{5}{2} \cdot \vec{d}_1 + 4 \cdot \vec{d}_2, \quad (0, -1) = \frac{1}{2} \cdot \vec{d}_1 + 0 \cdot \vec{d}_2,$$

tedy

$$\langle g(\vec{c}_1) \rangle_D = (0, 1), \quad \langle g(\vec{c}_2) \rangle_D = (\frac{5}{2}, 4), \quad \langle g(\vec{c}_3) \rangle_D = (\frac{1}{2}, 0).$$

Stejnou úvahou jako u 1. možnosti tak dostáváme, že

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0, & \frac{5}{2}, & \frac{1}{2} \\ 1, & 4, & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud už snadno spočítáme $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0, & \frac{5}{2}, & \frac{1}{2} \\ 1, & 4, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -2, & 1 \\ 0, & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5, & \frac{3}{2} \\ -7, & 4 \end{pmatrix}.$$

Maticí složeného zobrazení $g \circ f$ vzhledem k uspořádaným bazím $B, D$ je tedy matice

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -5, & \frac{3}{2} \\ -7, & 4 \end{pmatrix}.$$

$\square$

# 5 MATICE A DETERMINANTY

**PŘÍKLAD 5.1:** Je dána matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 4 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že množina $M$ všech matic $\mathbf{X}$ typu $(2,2)$, pro které platí $\mathbf{BX} + \mathbf{XB} = \mathbf{O}$ ($\mathbf{O}$ je nulová matice), je podprostorem prostoru $\mathbf{R}_{(2,2)}$. Najděte $M$, jeho bázi a dimenzi.

*Řešení:* **a)** Nejdříve ukážeme, že $M$ je podprostor prostoru $\mathbf{R}_{(2,2)}$, tedy že pro všechny matice $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in M$ a všechna reálná čísla $\alpha, \beta$ platí $\alpha\mathbf{X}+\beta\mathbf{Y} \in M$, tj. $\mathbf{B}(\alpha\mathbf{X}+\beta\mathbf{Y})+(\alpha\mathbf{X}+\beta\mathbf{Y})\mathbf{B} = \mathbf{O}$.

Máme

$$\mathbf{B}(\alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{Y}) + (\alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{Y})\mathbf{B} = (\alpha\mathbf{BX} + \beta\mathbf{BY}) + (\alpha\mathbf{XB} + \beta\mathbf{YB}) =$$

$$= \alpha(\mathbf{BX} + \mathbf{XB}) + \beta(\mathbf{BY} + \mathbf{YB}) = \alpha\mathbf{O} + \beta\mathbf{O} = (\alpha + \beta)\mathbf{O} = \mathbf{O}.$$

Tedy $\alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{Y} \in M$ a $M$ je podprostor prostoru $\mathbf{R}_{(2,2)}$.

**b)** Označme $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$. Pak

$$\mathbf{BX} = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c, & b+2d \\ 2a+4c, & 2b+4d \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{XB} = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+2b, & 2a+4b \\ c+2d, & 2c+4d \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{BX} + \mathbf{XB} = \begin{pmatrix} 2a+2b+2c, & 2a+5b+2d \\ 2a+5c+2d, & 2b+2c+8d \end{pmatrix}.$$

Má-li platit $\mathbf{BX} + \mathbf{XB} = \mathbf{0}$, musí být

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2a & + & 2b & + & 2c & & & = & 0, \\ 2a & + & 5b & & & + & 2d & = & 0, \\ 2a & & & + & 5c & + & 2d & = & 0, \\ & & 2b & + & 2c & + & 8d & = & 0. \end{array}$$

Řešením této soustavy dostáváme (*rozepište!*)

$$a = 4d, \quad b = -2d, \quad c = -2d, \quad d \in \mathbf{R}.$$

Všechny hledané matice $\mathbf{X}$ jsou tak tvaru

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4d, & -2d \\ -2d, & d \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 4, & -2 \\ -2, & 1 \end{pmatrix}, \qquad d \in \mathbf{R}.$$

Tedy $M = \left\langle \begin{pmatrix} 4, & -2 \\ -2, & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Protože lineární obal jakékoliv podmnožiny lineárního prostoru je vždy podprostorem tohoto prostoru, je $M$ podprostor prostoru $\mathbf{R}_{(2,2)}$. (*Uvedete-li toto zdůvodnění, nemusíte provádět část* **a)**.)

Bází $M$ je například jednoprvková množina $\left\{ \begin{pmatrix} 4, & -2 \\ -2, & 1 \end{pmatrix} \right\}$, a tedy $\dim M = 1$.

$\square$

**PŘÍKLAD 5.2:** Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AXB} + \mathbf{AX} = \mathbf{B}$ s neznámou maticí $\mathbf{X}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5, & 4, & 2 \\ 4, & 1, & 0 \\ 2, & 0, & -1 \end{pmatrix}.$$

*Řešení:* Upravujeme rovnici

$$\begin{gathered} \mathbf{AXB} + \mathbf{AX} = \mathbf{B} \\ \mathbf{AXB} + \mathbf{AXE} = \mathbf{B} \\ \mathbf{AX}(\mathbf{B} + \mathbf{E}) = \mathbf{B}. \end{gathered}$$

Protože

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

a

$$\det(\mathbf{B} + \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 6, & 4, & 2 \\ 4, & 2, & 0 \\ 2, & 0, & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$$

existují matice $\mathbf{A}^{-1}$ a $(\mathbf{B}+\mathbf{E})^{-1}$. Můžeme proto v úpravách rovnice pokračovat dále. Dostáváme:

$$\begin{gathered} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX}(\mathbf{B} + \mathbf{E})(\mathbf{B} + \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{B} + \mathbf{E})^{-1} \\ \mathbf{EXE} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{B} + \mathbf{E})^{-1} \\ \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{B} + \mathbf{E})^{-1}. \end{gathered}$$

Inverzní matice k $\mathbf{A}$ a $(\mathbf{B} + \mathbf{E})$ nalezneme pomocí řádkových úprav. Máme

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 1, & 1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 1, & 0, & 0, & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 1, & 1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 1, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 0, & 0, & 1, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 1, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 0, & 0, & 1, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0 \end{array}\right).$$

(Nejdříve jsme prohodili druhý a třetí řádek, pak od prvního odečetli druhý a nakonec od druhého odečetli třetí.)

$$(\mathbf{B} + \mathbf{E}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6, & 4, & 2, & 1, & 0, & 0 \\ 4, & 2, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 4, & 2, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 6, & 4, & 2, & 1, & 0, & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 2, & 0, & 0, & 1, & -2 \\ 0, & 4, & 2, & 1, & 0, & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 2, & 0, & 0, & 1, & -2 \\ 0, & 0, & 2, & 1, & -2, & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2} \\ 0, & 1, & 0, & 0, & \frac{1}{2}, & -1 \\ 0, & 0, & 1, & \frac{1}{2}, & -1, & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

(Nejdříve jsme prohodili první a třetí řádek, pak odečetli od druhého dvojnásobek prvního a od třetího trojnásobek prvního, dále jsme od třetího řádku odečetli dvojnásobek řádku druhého a nakonec jsme všechny řádky vydělili dvěma.)

Dostali jsme tak, že platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad (\mathbf{B}+\mathbf{E})^{-1} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2}, & -1 \\ \frac{1}{2}, & -1, & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & -2 \\ 1, & -2, & 1 \end{pmatrix}.$$

To znamená, že

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{B}+\mathbf{E})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5, & 4, & 2 \\ 4, & 1, & 0 \\ 2, & 0, & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & -2 \\ 1, & -2, & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3, & 4, & 3 \\ -2, & -1, & -1 \\ 4, & 1, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & -2 \\ 1, & -2, & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3, & -2, & -2 \\ -1, & 1, & -1 \\ 0, & 1, & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešením rovnice je tedy matice

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}, & -1, & -1 \\ -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2}, & 1 \end{pmatrix}.$$

□

**PŘÍKLAD 5.3:** Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & a, & -2 \\ a, & -4, & a \\ -2, & a, & 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, pro jaká $a \in \mathbf{R}$ neexistuje inverzní matice k matici $\mathbf{A}$. Pro jaká $a \in \mathbf{R}$ je matice transponovaná k matici $\mathbf{A}$ regulární?

*Řešení:* **a)** Inverzní matice k $\mathbf{A}$ existuje právě tehdy, když $\det\mathbf{A} \neq 0$. Máme

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1, & a, & -2 \\ a, & -4, & a \\ -2, & a, & 1 \end{vmatrix} = 12 - 6a^2 = 6(2-a^2).$$

Tedy inverzní matice k matici $\mathbf{A}$ neexistuje (a $\mathbf{A}$ není regulární) právě tehdy, když $a^2 = 2$, tj. $a \in \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$.

**b)** Matice $\mathbf{A}^T$ je regulární právě tehdy, když $\mathbf{A}$ je regulární, tedy pro $a \notin \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$.

□

**PŘÍKLAD 5.4:** Vypočtěte determinant matice $\mathbf{C}$, kde $\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1, & 1, & -1, & 1, & -1 \\ 1, & -1, & 1, & -1, & 0 \\ -1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & -1, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & 1, & -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 2, & 0, & 2 \\ 0, & 2, & 0, & 2, & 0 \\ 2, & 0, & 0, & 0, & 2 \\ 0, & 0, & 0, & 2, & 0 \\ 2, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda existuje matice $\mathbf{C}^{-1}$, a pokud ano, vypočtěte její determinant.

*Řešení:* **a)** Protože hodně prvků matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je nulových, použijeme k výpočtu vztah

$$\det\mathbf{C} = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}.$$

Stačí tedy spočítat determinanty matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$:

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -1, & 1, & -1, & 1, & -1 \\ 1, & -1, & 1, & -1, & 0 \\ -1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & -1, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & 1, & -1, & 0, & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & -1, & 1, & -1, & 0 \\ -1, & 1, & -1, & 1, & -1 \\ 1, & -1, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & 1, & -1, & 0, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & -1, & 1, & -1, & 0 \\ -1, & 1, & -1, & 0, & 0 \\ 1, & -1, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & 1, & -1, & 1, & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & -1, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & 1, & -1, & 0, & 0 \\ 1, & -1, & 1, & -1, & 0 \\ -1, & 1, & -1, & 1, & -1 \end{vmatrix} = -(-1)^5 = 1.$$

(Nejdřív jsme prohodili 1. a 3. řádek, pak 3. a 5. řádek, nakonec 2. a 4. řádek.)

$$\det\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2, & 0, & 2, & 0, & 2 \\ 0, & 2, & 0, & 2, & 0 \\ 2, & 0, & 0, & 0, & 2 \\ 0, & 0, & 0, & 2, & 0 \\ 2, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2, & 0, & 2, & 0, & 2 \\ 0, & 2, & 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & 0, & 2 \\ 0, & 0, & 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & 0, & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & 0, & 2, & 0, & 2 \\ 0, & 2, & 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & 0, & 2 \\ 0, & 0, & 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 2 \end{vmatrix} = 2^5 = 32.$$

(Nejdříve jsme prohodili 1. a 3. sloupec, pak 3. a 5. sloupec.)

Máme tedy $\det\mathbf{C} = 1\cdot 32 = 32$.

**b)** Protože $\det\mathbf{C} \neq 0$, existuje matice $\mathbf{C}^{-1}$ a pro její determinant platí

$$\det(\mathbf{C}^{-1}) = \frac{1}{\det\mathbf{C}} = \frac{1}{32}.$$

□

**PŘÍKLAD 5.5:** Najděte inverzní matice k maticím $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ a $\mathbf{D} = \mathbf{BA}$, kde $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou matice z příkladu 5.4.

*Řešení:* Vzhledem k tvaru matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ bude poměrně snadné najít matice k nim inverzní. Matice $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ proto určíme ze vztahů

$$\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \qquad \mathbf{D}^{-1} = (\mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}.$$

Matice $\mathbf{A}^{-1}$ a $\mathbf{B}^{-1}$ budeme hledat pomocí řádkových úprav.

**a)** V případě matice $\mathbf{A}$ v prvním kroku pouze přerovnáme řádky, ve druhém budeme směrem zdola nahoru přičítat k řádku řádek, který je nad ním, nakonec všechny řádky vydělíme číslem $-1$. (*POZOR! Řádky upravujeme až tehdy, když už je nebudeme potřebovat k úpravě jiných řádků - mohli bychom se totiž "zacyklit".*):

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1, & 1, & -1, & 1, & -1, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & -1, & 1, & -1, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ -1, & 1, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|rrrrr} -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ -1, & 1, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & 1, & -1, & 1, & -1, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|rrrrr} -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & -1, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & -1, & 1, & 1, & 0, & 0, & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|rrrrr} 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -1, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & -1, & 0, & 0, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & -1, & -1, & 0, & 0, & 0 \end{array}\right).$$

**b)** V případě matice $\mathbf{B}$ začneme prohozením 1., 3. a 5.řádku, v dalším kroku nejdříve odečteme od 2.řádku 4.řádek, pak od 3.řádku 5.řádek a nakonec od 5.řádku 1.řádek. V posledním kroku každý řádek vydělíme dvěma:

$$(\mathbf{B}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{rrrrr|rrrrr} 2, & 0, & 2, & 0, & 2, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0, & 2, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 2, & 0, & 0, & 0, & 2, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|rrrrr} 2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 2, & 0, & 2, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 2, & 0, & 2, & 0, & 2, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 2, & 0, & 0, & 0, & 2, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|rrrrr} 2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & 0, & 0, & 1, & 0, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 2, & 0, & 0, & 1, & 0, & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|rrrrr} 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2} \\ 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2}, & 0, & -\frac{1}{2}, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & \frac{1}{2}, & 0, & -\frac{1}{2}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & \frac{1}{2}, & 0, & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -1, & -1 \\ 0, & -1, & 0, & 0, & -1 \\ -1, & -1, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2}, & 0, & -\frac{1}{2}, & 0 \\ \frac{1}{2}, & 0, & -\frac{1}{2}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{2}, & 0, & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Nyní už snadno spočítáme, jak vypadají matice $\mathbf{C}^{-1}$, $\mathbf{D}^{-1}$:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2}, & 0, & -\frac{1}{2}, & 0 \\ \frac{1}{2}, & 0, & -\frac{1}{2}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{2}, & 0, & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0, & 0, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -1, & -1 \\ 0, & -1, & 0, & 0, & -1 \\ -1, & -1, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ 0, & 0, & -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ 0, & -\frac{1}{2}, & 0, & 0, & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -1, & -1 \\ 0, & -1, & 0, & 0, & -1 \\ -1, & -1, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2}, & 0, & -\frac{1}{2}, & 0 \\ \frac{1}{2}, & 0, & -\frac{1}{2}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2}, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{2}, & 0, & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2}, & 0, & 0 \\ -\frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & 0 \\ 0, & 0, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ 0, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ 0, & -\frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$\square$